Mathematisches Institut der Universität München | Daniel Rost
Wintersemester 2013/14 | Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Rekursiv definierte Folgen). Für die durch

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekusriv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beweise man

$$a_n = \frac{2}{3}\left(1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 2 (Fakultäten und Binomialkoeffizienten). Man beweise die folgenden Formeln durch vollständige Induktion nach n:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k! \cdot k) = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$.

Aufgabe 3 (Fibonacci-Zahlen). Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fibonacci-Zahlen zeige man

$$x_n^2 = x_{n-1}\, x_{n+1} - (-1)^n \quad \text{für alle } n \geq 2$$

a) ohne Verwendung der expliziten Formel für die Fibonacci-Zahlen (5.20 in der Vorlesung),

b) unter Verwendung dieser Formel.

Aufgabe 4 (Herleitung der Formel für die Fibonacci-Zahlen). Es sei

$$a := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

In Aufgabe 4 vom 11. Tutoriumsblatt haben wir gezeigt, daß die durch $y_n := a^n$ und $z_n := b^n$ definierten Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verallgemeinerte Fibonacci-Folgen sind, daß also

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} \quad \text{und} \quad z_{n+1} = z_n + z_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

a) Man finde Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für die durch $w_n := \alpha y_n + \beta z_n$ definierte Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $w_1 = w_2 = 1$.

b) Man gebe eine explizite Formel für die Glieder der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

c) Es sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Man beweise durch vollständige Induktion, daß $x_n = w_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 24. Januar 2014, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibiothek) einzuwerfen.