

Grundlagen der Mathematik I

Lösungsvorschlag zum 9. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^0 (2k-1) &= 0 \quad (\text{leere Summe}), \\ \sum_{k=1}^1 (2k-1) &= 1, \\ \sum_{k=1}^2 (2k-1) &= 1+3=4, \\ \sum_{k=1}^3 (2k-1) &= 1+3+5=9, \\ \sum_{k=1}^4 (2k-1) &= 1+3+5+7=16, \\ \sum_{k=1}^5 (2k-1) &= 1+3+5+7+9=25.\end{aligned}$$

Die Ergebnisse auf der rechten Seite sind allesamt Quadratzahlen, und man kann vermuten, daß $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ für alle $n \geq 0$ gilt.

b) Wir behaupten also, daß $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ stimmt die Behauptung (wir haben ja sogar schon alle $n \leq 5$ überprüft).

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: Es sei $n \geq 0$ und schon bewiesen, daß $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ gilt (**Induktionsvoraussetzung**). Wir wollen nun beweisen, daß dann auch $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$ gilt. Aber es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \left(\sum_{k=1}^n (2k-1) \right) + 2(n+1) - 1 \quad (\text{Induktionsvoraussetzung anwenden}) \\ &= n^2 + 2n + 1 \quad (\text{binomische Formel}) \\ &= (n+1)^2,\end{aligned}$$

wie behauptet.

Aufgabe 2. Weder die in a) noch die in b) angegebenen Strukturen sind Peanostrukturen:

a) Die Abbildung ν ist injektiv, d.h. die Eigenschaft i) einer Peanostruktur (wie sie in Definition 5.1 in der Vorlesung angegeben ist) ist erfüllt. Allerdings ist $n_0 = 0 = \nu(4) \in \nu(N)$, so daß die Eigenschaft ii) verletzt ist. Die Eigenschaft iii) dagegen ist wieder erfüllt: Denn ist $M \subset N$ eine Teilmenge mit $0 \in M$ und der Eigenschaft $\nu(m) \in M$ für alle $m \in M$, so folgt zunächst $1 = \nu(0) \in M$, daraus weiter $2 = \nu(1) \in M$, dann $3 = \nu(2) \in M$ und schließlich $4 = \nu(3) \in M$, also insgesamt $N \subset M$, d.h. $M = N$.

b) Die Abbildung ν ist nicht injektiv wegen $\nu(B) = C = \nu(F)$, d.h. Eigenschaft i) ist verletzt. Dagegen ist die Eigenschaft ii) erfüllt, denn $n_0 = A \notin \nu(N)$, wie man an der Wertetabelle ablesen kann (ihre untere Zeile enthält den Eintrag A nicht). Ebenso ist die Eigenschaft iii) erfüllt, denn ist $M \subset N$ eine Teilmenge mit $A \in M$ und der Eigenschaft $\nu(m) \in M$ für alle $m \in M$, so folgt $B = \nu(A) \in M$, weiter $C = \nu(B) \in M$, $D = \nu(C) \in M$, $E = \nu(D) \in M$ und schließlich $F = \nu(E) \in M$, also $M = N$.

Aufgabe 3.

a) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ lautet die Behauptung $0 \geq \sqrt{0} = 0$, diese ist korrekt.

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$. Es sei $n \geq 0$, und es sei bekannt, daß $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$ ist (**Induktionsvoraussetzung**). Wir wollen beweisen, daß dann auch $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$ ist. Aber es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\ &\geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} && (*) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sqrt{n^2 + n} + 1 \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sqrt{n^2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} (n + 1) \\ &= \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, daß für alle $a \geq 0$ gilt $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$; dies ist eine andere (weniger vertraute) Version der altbekannten Relation $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.

Die Rechnung ab der Stelle (*) ist etwas trickreich. Wie kann man auf eine solche Rechnung kommen oder sie umgehen? Wir wollen ja einsehen, daß $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$ ist. Ein bewährter Ansatz ist es zum Beweis solcher Ungleichungen ist, es mit einem Widerspruchsbeweis zu versuchen. Das könnte dann folgendermaßen aussehen: Angenommen, es wäre $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}$. Multiplikation mit $\sqrt{n+1}$ (dies ist eine positive Zahl!) liefert dann $\sqrt{n^2 + n} + 1 < n + 1$, also $\sqrt{n^2 + n} < n = \sqrt{n^2}$, im Widerspruch zu $n^2 + n \geq n^2$. – Tatsächlich habe ich die oben angegebene Rechnung auch genau durch diese Überlegung gefunden.

Ebenfalls möglich ist natürlich der Weg, die behauptete Ungleichung solange mit Äquivalenzumformungen zu traktieren, bis sich eine sicher wahre Aussage ergibt. Das könnte so aussehen:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\geq \sqrt{n+1} && \text{(mit } \sqrt{n+1} \text{ multiplizieren)} \\ \iff \sqrt{n^2 + n} + 1 &\geq n + 1 \\ \iff \sqrt{n^2 + n} &\geq n && \text{(quadrieren)} \\ (*) \iff n^2 + n &\geq n^2 \\ \iff n &\geq 0 \text{ (wahre Aussage)} \end{aligned}$$

An der Stelle (*) steht hier tatsächlich ein Äquivalenzpfeil, weil beide Seiten der darüberstehenden Ungleichung *nichtnegative* Zahlen sind (und für $a, b \geq 0$ gilt ja $a \geq b \iff a^2 \geq b^2$).

b) **Induktionsanfang.** Für $n = 10$ ist $2^{10} = 1024$ und $10^3 = 1000$, also tatsächlich $2^n < n^3$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$. Es sei $n \geq 10$ und schon bekannt, daß $2^n > n^3$ gilt (**Induktionsvoraussetzung**). Wir müssen nun $2^{n+1} > (n+1)^3$ zeigen. Aber es ist einerseits

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n && \text{(Induktionsvoraussetzung und binomische Formel anwenden)} \\ &> 2 \cdot n^3 \\ &= n^3 + n^3, \end{aligned}$$

andererseits (nach der binomischen Formel für dritte Potenzen oder durch direktes Ausmultiplizieren)

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

so daß es genügt, $n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1$ zu beweisen. Aber wegen $n \geq 10$ und $n^2 > n > 1$ ist $n^3 = n \cdot n^2 \geq 10n^2 > 7n^2 = 3n^2 + 3n^2 + n^2 > 3n^2 + 3n + 1$, und wir sind fertig.

- c) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ gilt $(1+x)^n = (1+x)^0 = 1$ sowie $1+(2^n-1)x = 1+(2^0-1)x = 1$, also tatsächlich $(1+x)^n \leq 1+(2^n-1)x$ für alle $x \in [0, 1]$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$. Es sei $n \geq 0$ und schon bewiesen, daß $(1+x)^n \leq 1+(2^n-1)x$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt (**Induktionsvoraussetzung**). Wir müssen nun $(1+x)^{n+1} \leq 1+(2^{n+1}-1)x$ für alle $x \in [0, 1]$ beweisen. Aber für diese x gilt $x^2 = x \cdot x \leq x$ und damit

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\
 &\leq (1+(2^n-1)x) \cdot (1+x) \\
 &= 1+(2^n-1)x+x+(2^n-1)x^2 \\
 &\leq 1+(2^n-1)x+x+(2^n-1)x \\
 &= 1+(2^n-1+1+2^n-1)x \\
 &= 1+(2 \cdot 2^n-1)x \\
 &= 1+(2^{n+1}-1)x,
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 4. Das Problem in diesem Induktionsbeweis wird deutlicher, wenn wir ihn den Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$ genau untersuchen: Sei die Behauptung für n Mathematiklehrer bewiesen (**Induktionsvoraussetzung**), und seien $n+1$ Mathematiklehrer L_1, \dots, L_{n+1} gegeben. Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert das folgende Bild:

$$\begin{array}{c}
 \text{tragen den gleichen Pullover} \\
 \underbrace{L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad \dots \quad L_n \quad L_{n+1}} \\
 \text{tragen den gleichen Pullover}
 \end{array}$$

Da die Lehrer L_2, L_3, \dots, L_n aber unter beiden Klammern erfaßt sind, tragen *alle* $n+1$ Lehrer den gleichen Pullover.

Dieses (an sich korrekte) Argument funktioniert aber nur dann, wenn es tatsächlich Lehrer *gibt*, die unter beiden Klammern stehen; ihre Anzahl ist aber genau $n-1$, und speziell für $n=1$ ergibt das 0. Der Induktionsschritt für den Schluß $1 \rightarrow 2$ scheitert also.

Erläutern wir diesen scheiternden Schluß noch ausführlicher: Seien zwei Mathematiklehrer L_1 und L_2 gegeben. Entfernen des Lehrers L_2 läßt den Lehrer L_1 alleine zurück, und dieser trägt natürlich „den gleichen Pullover wie er selbst“. Entfernt man stattdessen den Lehrer L_1 , so bleibt Lehrer L_2 alleine zurück. Weil die „Restmengen“ $\{L_1, L_2\} \setminus \{L_1\} = \{L_2\}$ und $\{L_1, L_2\} \setminus \{L_2\} = \{L_1\}$ sich aber nicht schneiden, kann man nicht schlußfolgern, daß L_1 und L_2 den gleichen Pullover tragen.