Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 7. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Es sei $a \in A$. Um zu zeigen, daß $a \in f^{-1}(f(A))$ gilt, ist nach Definition des Urbilds zu zeigen, daß $f(a) \in f(A)$ gilt, aber das ist klar nach der Definition des Bildes (wegen $a \in A$ ist $f(a) \in f(A)$).

b) Die Konstruktion eines Beispiels gelingt auch hier durch den Versuch, die umgekehrte Inklusion $f^{-1}(f(A)) \subset A$ zu beweisen. Diese Überlegung könnte wie folgt aussehen – wir drucken sie klein, weil sie „mathematisch" überflüssig ist (die Angabe des Gegenbeispiels am Ende genügt).

Zum „Beweis" von $f^{-1}(f(A)) \subset A$ müssen wir $x \in f^{-1}(f(A))$ annehmen, also $x \in M$ mit $f(x) \in f(A)$. Dies bedeutet, daß es ein $a \in A$ gibt mit $f(x) = f(a)$. An dieser Stelle kommen wir nicht weiter, weil aus $f(x) = f(a)$ (solange man nicht z.B. Injektivität von f voraussetzt) nicht viel über x und a folgt.

Wir sehen also: Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, müssen wir dafür sorgen, daß es ein $a \in A$ und ein $x \in M \setminus A$ gibt mit $f(a) = f(x)$.

Nehmen wir beispielsweise $M = N = \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die konstante Abbildung mit $f(x) = 5$ für alle $x \in \mathbb{N}$, und $A = \{1\} \subset \mathbb{N}$. Dann ist $f(A) = \{5\}$ und $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{5\}) = \mathbb{N}$ (denn es wird ja *alles* auf 5 abgebildet), also $A \subsetneqq f^{-1}(f(A))$.

Aufgabe 2.

a) Die Abbildung f ist **nicht surjektiv**, denn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$, also wird keine einzige negative Zahl getroffen.

Aber f ist **injektiv**: Denn seien $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, also $(x_1 - \frac{1}{3})^2 = (x_2 - \frac{1}{3})^2$. Wurzelziehen liefert $\left|x_1 - \frac{1}{3}\right| = \left|x_2 - \frac{1}{3}\right|$, also entweder $x_1 - \frac{1}{3} = x_2 - \frac{1}{3}$, also $x_1 = x_2$, oder $x_1 - \frac{1}{3} = -(x_2 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - x_2$, also $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$. Letzteres ist aber ausgeschlossen wegen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Also ist doch $x_1 = x_2$, und das beweist die Injektivität von f.

b) Die Abbildung g ist **nicht surjektiv** aus dem selben Grund wie in a).

Sie ist aber auch **nicht injektiv**: Beispielsweise für $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}$ ist $f(x_1) = (-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2 = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3})^2 = f(x_2)$.

Wie man auf den Beweis der Nicht-Injektivität kommt? Man werfe einen Blick auf den Beweis der Injektivität in a). Dort sieht man, daß $f(x_1) = f(x_2)$, aber $x_1 \neq x_2$, nur dann passieren kann, wenn $x_1 - \frac{1}{3} = -(x_2 - \frac{1}{3})$, also $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$ ist. Damit ist meine Wahl von $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}$ nicht mehr so überraschend.

c) Die Abbildung h ist **surjektiv**, denn für ein beliebiges Paar $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ist beispielsweise $f(a, 1, b) = (a \cdot 1, 1 \cdot b) = (a, b)$.

Dagegen ist h **nicht injektiv**, denn es ist etwa $f(x, y, z) = (xy, yz) = f(xy, 1, yz)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$; konkret ist also etwa $f(1, 2, 1) = f(2, 1, 2)$.

d) Die Abbildung k ist **injektiv**, denn aus $k(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$, also $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ und $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$, folgt durch Addition beider Gleichungen $2x_1 = 2x_2$, also $x_1 = x_2$, und damit weiter auch $y_1 = y_2$.

   Außerdem ist k **surjektiv**, denn ist $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben, ist die Gleichung $k(x, y) = (a, b)$ äquivalent zum Gleichungssystem $x + y = a$ und $x - y = b$; durch Addition beider Gleichungen erhält man $2x = a + b$, also $x = \frac{1}{2}(a + b)$, und weiter $y = a - x = \frac{1}{2}(a - b)$. Macht man die Probe, so erhält man tatsächlich

$$k\left(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a-b)\right) = \left(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b), \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\right) = (a, b).$$

Nur die Abbildung k aus d) ist also bijektiv.

Aufgabe 3.

- Die Abbildung f ist **injektiv**, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$, also $x_1 + 1 = x_2 + 1$, folgt $x_1 = x_2$.

  Aber f ist **nicht surjektiv**, denn es gibt kein $x \in \mathbb{N}$ mit $1 = f(x) = x + 1$ (es müßte $x = 0$ sein, aber $0 \notin \mathbb{N}$).

- Die Abbildung g ist **nicht injektiv**, denn es ist $f(1) = 1 = f(2)$.

  Jedoch ist g **surjektiv**, denn für jedes $y \in \mathbb{N}$ ist $f(y + 1) = y$.

- $f \circ g$ ist **weder injektiv noch surjektiv**: Denn es ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x - 1 + 1 = x, & \text{falls } x \geq 2, \\ 1 + 1 = 2, & \text{falls } x = 1, \end{cases}$$

  und an dieser Darstellung kann man erkennen:

  - Es ist $(f \circ g)(1) = 2 = (f \circ g)(2)$, was die Injektivität widerlegt.
  - Es ist $(f \circ g)(x) \geq 2$ für alle $x \in \mathbb{N}$, also gibt es kein $x \in \mathbb{N}$ mit $(f \circ g)(x) = 1$, was die Surjektivität ausschließt.

- $g \circ f$ ist **injektiv und surjektiv** (also bijektiv), denn für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = x + 1 \geq 2$ und damit

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 1 = (x + 1) - 1 = x.$$

  Damit ist $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, und die Identitätsabbildung ist stets bijektiv.

(Es lohnt sich, diese Ergebnisse mit Aufgabe 3 vom 7. Übungsblatt zu vergleichen!)

Aufgabe 4.

a) Die wohl einfachste Wahl ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = x - 1$. Beweisen wir ihre Bijektivität:

   - Aus $f(x_1) = f(x_2)$, also $x_1 - 1 = x_2 - 1$, folgt sofort $x_1 = x_2$, also ist f **injektiv**.
   - Für jedes $y \in \mathbb{N}_0$ ist $x := y + 1 \in \mathbb{N}$ und $f(x) = (y + 1) - 1 = y$, also ist f **surjektiv**.

b) Eine Möglichkeit ist, die positiven und negativen natürlichen Zahlen „abwechselnd“ anzusteuern, also die Abbildung $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ mit der folgenden Wertetabelle zu nehmen:

x	0	1	2	3	4	5	6	...
$g(x)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Die Bijektivität dieser Abbildung ist offensichtlich, denn die untere Zeile der Tabelle enthält nach ihrer Konstruktion jede ganze Zahl genau ein einziges mal.

Möchte man mathematisch stringenter argumentieren, so kann man die Abbildung g beispielsweise durch die folgende Formel angeben:

$$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & \text{falls } x \text{ gerade ist,} \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{falls } x \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Dies ist eine sinnvolle Abbildungsdefinition, da die Vorschrift tatsächlich stets Elemente von $\mathbb{Z}$ liefert; man kann sich auch davon überzeugen, daß diese Vorschrift tatsächlich die oben angegebene Wertetabelle liefert – was aber eigentlich egal ist, da wir nun ihre Bijektivität von vorne beweisen:

- Für die **Injektivität** nehmen wir an, wir haben $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ mit $g(x_1) = g(x_2)$. Dann müssen zunächst x_1 und x_2 entweder *beide gerade* oder *beide ungerade* sein: Denn es ist $g(x) < 0$, wenn x ungerade ist, und $g(x) \geq 0$, wenn x gerade ist, und wegen $g(x_1) = g(x_2)$ muß diese Eigenschaft für x_1 und x_2 identisch ausfallen. Im Fall, daß beide gerade sind, haben wir also $-\frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{2}x_2$, woraus $x_1 = x_2$ folgt; im Fall, daß beide ungerade sind, folgt $\frac{1}{2}(x_1+1) = \frac{1}{2}(x_2+1)$, also auch $x_1 = x_2$.
- Für die **Surjektivität** sei $y \in \mathbb{Z}$ gegeben. Ist $y \leq 0$, so ist $x := -2y$ eine gerade Zahl in $\mathbb{N}_0$ mit $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-2y) = y$. Ist $y > 0$, so ist $x := 2y - 1$ eine ungerade natürliche Zahl mit $g(x) = \frac{1}{2}(2y - 1 + 1) = y$.

c) Hier funktioniert beispielsweise die Abbildung

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad h(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0, \\ x+1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Dies ist eine sinnvolle Abbildungsdefinition, da tatsächlich niemals der Wert 0 angenommen wird. Beweisen wir nun die Bijektivität:

- Der Beweis der **Injektivität** verläuft ähnlich wie in b): Ist $h(x_1) = h(x_2)$, so erkennt man zunächst, daß x_1 und x_2 entweder *beide* < 0 oder *beide* ≥ 0 sein müssen, und dann folgt ihre Gleichheit entweder direkt oder aus $x_1 + 1 = x_2 + 1$.
- Zum Nachweis der **Surjektivität** sei $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ vorgegeben. Ist $y < 0$, so ist $h(y) = y$; ist $y > 0$, so ist $x := y - 1 \geq 0$, und es gilt $h(x) = (y-1) + 1 = y$.