Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 6. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1. Es gilt

$$\begin{aligned}
x \in L \quad &\iff \quad \frac{2}{x-1} - \frac{x-2}{x+3} \le -1 \\
&\iff \quad \frac{2}{x-1} - \frac{x-2}{x+3} + 1 \le 0 \\
&\iff \quad \frac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)} - \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+3)} + \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} \le 0 \\
&\iff \quad \frac{2x+6-x^2+3x-2+x^2+2x-3}{(x-1)(x+3)} \le 0 \\
&\iff \quad \frac{7x+1}{(x-1)(x+3)} \le 0.
\end{aligned}$$

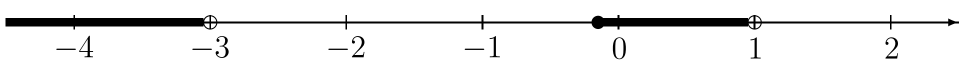
Beachte, daß wir das Produkt im Nenner nicht ausmultipliziert haben, da das sein Vorzeichenverhalten nur in faktorisierter Form direkt abzulesen ist! Man sollte nur dann ausmultiplizieren, wenn es nötig ist, denn Faktorisieren ist schwierig, also sind bereits faktorisierte Terme „wertvoll". – Beim Zähler kamen wir um das Ausmultiplizieren nicht herum, weil er die Form einer *Summe* aus Produkten hatte.

Die Faktoren $x-1$, $x+3$ und $7x+1$ ändern ihr Vorzeichen jeweils an der Stelle 1, -3 und $-\frac{1}{7}$; wir müssen also folgende Vorzeichentabelle anlegen:

		-3		$-\frac{1}{7}$		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x+3$	$-$		$+$		$+$		$+$
$7x+1$	$-$		$-$		$+$		$+$
$\frac{7x+1}{(x-1)(x+3)}$	$-$		$+$		$-$		$+$

Da die Werte $x=-3$ und $x=1$ außerdem nicht zugelassen sind, ergibt sich damit

$$L = \left]-\infty, -3\right[\;\cup\; \left[-\frac{1}{7}, 1\right[.$$



Aufgabe 2.

a) Wir unterscheiden drei Fälle (nach dem Trichotomiegesetz der Anordnung):

(i) Ist $a=b$, so ist $a-b=0=b-a$ und damit auch $|a-b|=|b-a|$.

(ii) Ist $a<b$, so ist $a-b<0$ und $b-a>0$; nach Definition des Betrages ist dann $|a-b| = -(a-b) = b-a = |b-a|$.

(iii) Ist $a > b$, so ist $a - b > 0$ und $b - a < 0$; nach Definition des Betrages ist dann $|a - b| = a - b = -(b - a) = |b - a|$. (Dieser dritte Fall müßte eigentlich nicht gesondert bewiesen werden, weil er durch Vertauschen von a und b aus dem zweiten folgt.)

b) Wir zeigen beide Äquivalenzen einzeln:

(i) Für $|a| = |b| \iff a = \pm b$ zeigen wir beide Implikationsrichtungen gesondert:

„$\Longrightarrow$". Nach Definition des Betrages ist stets $|a| \in \{a, -a\}$ und $|b| \in \{b, -b\}$. Ist nun $|a| = |b|$, so folgt $|a| \in \{b, -b\}$, also ist $|a| = \pm b$. Da aber stets $|a| = a$ oder $|a| = -a$ gilt, folgt in jedem Fall $a = \pm b$.

„$\Longleftarrow$". Ist $a = b$, so ist trivialerweise $|a| = |b|$. Ist $a = -b$, so gilt $|a| = |a - 0| \overset{\text{a)}}{=} |0 - a| = |-a| = |b|$.

(ii) Für $a = \pm b \iff a^2 = b^2$ bemerken wir:

$$
\begin{aligned}
a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 \qquad \text{(3. binomische Formel)}\\
&\iff (a - b)(a + b) = 0 \qquad \text{(Nullteilerfreiheit von Körpern)}\\
&\iff (a - b = 0) \vee (a + b = 0)\\
&\iff (a = b) \vee (a = -b)\\
&\iff a = \pm b.
\end{aligned}
$$

c) Laut Vorlesung gilt $|a| = \operatorname{sign}(a) \cdot a$ für alle $a \in K$, und sign ist multiplikativ, d.h. $\operatorname{sign}(a \cdot b) = \operatorname{sign}(a) \cdot \operatorname{sign}(b)$ für alle $a, b \in K$. Zusammen kann man damit die behauptete Multiplikativität des Betrages zeigen:

$$
\begin{aligned}
|a \cdot b| &= \operatorname{sign}(a \cdot b) \cdot a \cdot b\\
&= \operatorname{sign}(a) \cdot \operatorname{sign}(b) \cdot a \cdot b\\
&= (\operatorname{sign}(a) \cdot a) \cdot (\operatorname{sign}(b) \cdot b)\\
&= |a| \cdot |b|\,.
\end{aligned}
$$

Ist $b \neq 0$, so folgt aus $a = \frac{a}{b} \cdot b$ nach dem schon Bewiesenen die Beziehung

$$|a| = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b|\,,$$

und da $|b| \neq 0$ für $b \neq 0$ ist, kann man diese Gleichung umstellen zu

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

d) Wir beweisen die Gültigkeit der behaupteten Äquivalenz in den beiden Fällen $a \geq b$ und $a \leq b$ (daß diese Fälle sich nicht ausschließen, sondern sich „überlappen" im Fall $a = b$, richtet keinen Schaden an):

- Ist $a \geq b$, so ist $|a - b| = a - b$, und die Ungleichung $b < a + \varepsilon$ ist automatisch erfüllt; also gilt

$$
\begin{aligned}
|a - b| < \varepsilon &\iff a - b < \varepsilon\\
&\iff b > a - \varepsilon\\
&\iff a + \varepsilon > b > a - \varepsilon.
\end{aligned}
$$

- Ist $a \leq b$, so ist $|a-b| = b-a$, und die Ungleichung $b > a - \varepsilon$ ist automatisch erfüllt. Damit gilt

$$\begin{aligned} |a-b| < \varepsilon &\Longleftrightarrow b - a < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow b < a + \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow a - \varepsilon < b < a + \varepsilon . \end{aligned}$$

Also gilt die Äquivalenz in beiden Fällen, d.h. sie ist stets wahr.

Aufgabe 3.

a) Die Werte $f(x)$ für $x \in M$ geben wir in einer Wertetabelle an:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	1	3	2	5	3	7	4

Damit ist

$$\begin{aligned} f(M) &= \{f(x) \mid x \in M\} \\ &= \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8)\} \\ &= \{1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} . \end{aligned}$$

b) Nach Definition ist $f^{-1}(M)$ die Menge aller $x \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $f(x) \in M$, also $f(x) \leq 8$. Welche x sind das? Dafür unterscheiden wir zwei Fälle für ein beliebig vorgegebenes $x \in \mathbb{N}$:

(i) Ist x ungerade, so ist $f(x) = x$, und die Bedingung $f(x) \leq 8$ lautet genau $x \leq 8$.

(ii) Ist x gerade, so ist $f(x) = \frac{x}{2}$, und die Bedingung $f(x) \leq 8$ lautet genau $\frac{x}{2} \leq 8$, also $x \leq 16$.

Damit besteht $f^{-1}(M)$ genau aus den *ungeraden* Zahlen zwischen 1 und 8 sowie den *geraden* Zahlen zwischen 1 und 16, also

$$\begin{aligned} f^{-1}(M) &= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16\} . \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Wir versuchen zunächst, y in Abhängigkeit von x explizit zu berechnen, also die Gleichung

$$\frac{y + r \cdot x}{y + s \cdot x} = 2$$

nach y aufzulösen. Dies geht folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \frac{y + r \cdot x}{y + s \cdot x} = 2 \\ \Longrightarrow \quad & y + r \cdot x = 2(y + s \cdot x) \\ \Longleftrightarrow \quad & y + r \cdot x = 2y + 2s \cdot x \\ \Longleftrightarrow \quad & r \cdot x - 2s \cdot x = y \\ \Longleftrightarrow \quad & (r - 2s) \cdot x = y . \end{aligned}$$

Wir erhalten also $y = (r - 2s) \cdot x$ als einzige mögliche Lösung; da die Umformungskette einen Implikationspfeil enthält, der keine Äquivalenz ist (der umgekehrten Schlußrichtung steht die Möglichkeit einer Division durch 0 entgegen!), müssen wir die Probe machen, also den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\frac{(r-2s) \cdot x + r \cdot x}{(r-2s) \cdot x + s \cdot x} = \frac{(2r-2s) \cdot x}{(r-s) \cdot x}$$

Dieser Bruch hat tatsächlich stets den Wert 2, *außer* im Fall, daß sein Nenner versehentlich null wird. Wegen $x \neq 0$ (es gilt $0 \notin \mathbb{N}$!) tritt dieser Fall genau dann ein, wenn $r = s$ ist; und in der Tat ist für $r = s$ die Gleichung

$$\frac{y + r \cdot x}{y + r \cdot x} = 2$$

niemals erfüllt, denn dieser Bruch ist entweder nicht definiert (wenn nämlich sein Nenner zufällig verschwindet), oder er hat den Wert 1.
Unsere Abbildung sollte also x auf die Zahl $(r - 2s) \cdot x =: f(x)$ schicken. Nun gibt es aber ein neues Problem: Diese Zahl könnte ≤ 0 sein und damit außerhalb der angegebenen Zielmenge $\mathbb{N}$ liegen. Dies passiert genau dann, wenn $r - 2s \leq 0$, also $r \leq 2s$ ist; für alle anderen Werte ist alles in Ordnung.
Insgesamt liefert die angegebene Vorschrift also genau dann eine Abbildung, wenn $r > 2s$ ist (denn dann ist insbesondere auch $r \neq s$), und dann ist $f(x) = (r - 2s) \cdot x$.