

Grundlagen der Mathematik I

Lösungsvorschlag zum 4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Für die Summen:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6},$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}_{=\frac{7}{6}} = \frac{23}{12},$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}}_{=\frac{23}{12}} = \frac{163}{60},$$

$$\sum_{k=1}^5 \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}}_{=\frac{163}{60}} = \frac{71}{20}.$$

Für die Produkte:

$$\prod_{k=1}^1 \frac{2k}{k+1} = \frac{22}{=} 1,$$

$$\prod_{k=1}^2 \frac{2k}{k+1} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\prod_{k=1}^3 \frac{2k}{k+1} = 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4} = 2,$$

$$\prod_{k=1}^4 \frac{2k}{k+1} = 1 \cdot \underbrace{\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{5}}_{=2} = \frac{16}{5},$$

$$\prod_{k=1}^5 \frac{2k}{k+1} = 1 \cdot \underbrace{\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{10}{6}}_{=\frac{16}{5}} = \frac{16}{3}.$$

- b) Bei der Summe kann man erkennen, daß die Nenner alle geraden Zahlen zwischen 2 und 100 durchlaufen und die Zähler jeweils um 1 kleiner sind als die Nenner. Jeder Summand hat also die Form $\frac{2k-1}{2k}$ für $k = 1, \dots, 50$, so daß die Summe darstellbar ist als

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{2k-1}{2k}.$$

Beim Produkt ist erkennbar, daß die Zähler die natürlichen Zahlen durchlaufen, die Nenner aber in jedem Glied um 3 anwachsen, und zwar ist der Nenner stets um 1 kleiner als das 3-fache des Zählers. Das bedeutet, daß jeder Faktor die Form $\frac{k}{3k-1}$ für $k = 1, \dots, 50$ hat, und das gesamte Produkt ist damit darstellbar als

$$\prod_{k=1}^{50} \frac{k}{3k-1}.$$

- c) Ausgeschrieben hat dieses Produkt die Form

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{100}.$$

Bemerkung. Produkte, in denen Vergleichbares passiert, nennt man auch *Teleskopprodukte*; warum? Wie sehen entsprechende Summen, sogenannte *Teleskopsummen*, aus?

Aufgabe 2.

- a) (ii) \implies (i) ist klar.

(i) \implies (ii). Die Aussage $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$ ist für alle $x \in K$ wahr, also insbesondere für $x = 0$, und das bedeutet $b = d$. Dann können wir aber diesen gemeinsamen Wert von beiden Seiten der Gleichung abziehen und erhalten $x^2 + ax = x^2 + cx$ für alle $x \in K$; insbesondere für $x = 1$ bedeutet das $1 + a = 1 + c$, also $a = c$.

- b) Für alle $x \in K$ ist stets $(x+s)(x+t) = x^2 + (s+t)x + s \cdot t$. Nach a) liefert dieser Ausdruck genau dann für alle $x \in K$ den gleichen Wert wie $x^2 + ax + b$, wenn $a = s+t$ und $b = s \cdot t$ ist. (Es ist auch ein Beweis ohne Rückgriff auf a) möglich; dann wird man wahrscheinlich beide Richtungen einzeln bearbeiten und ein Argument wie im Beweis von a) verwenden müssen.)

- c) Wir versuchen, $s, t \in \mathbb{Q}$ zu finden, so daß $x^2 + 5x - 24 = (x+s)(x+t)$ ist: nach b) muß dafür genau $s+t = 5$ und $s \cdot t = -24$ sein. Mit etwas Probieren sieht man, daß $s = 8, t = -3$ eine mögliche Lösung ist. (*De facto* gibt es nur eine einzige andere, nämlich $s = -3, t = 8$.)

Damit ist also $x^2 + 5x - 24 = (x+8)(x-3)$ für alle $x \in K$. Da ein Produkt in einem Körper nur dann verschwindet (d.h. den Wert null hat), wenn einer der Faktoren null ist, ist $x^2 + 5x - 24 = 0$ genau wahr, wenn $x+8 = 0$ oder $x-3 = 0$ ist, wenn also $x = -8$ oder $x = 3$ ist. Die Lösungsmenge ist also $\{-8, 3\}$.

Aufgabe 3. Nach Definition ist $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

- a) Es ist

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = (a \cdot d) \cdot (b \cdot d)^{-1} = a \cdot \underbrace{d \cdot d^{-1}}_{=1} \cdot b^{-1} = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$$

unter Verwendung der Assoziativität der Multiplikation sowie der Beziehung $(b \cdot d)^{-1} = d^{-1} \cdot b^{-1}$, die aus $d^{-1} \cdot b^{-1} \cdot (b \cdot d) = d^{-1} \cdot b^{-1} \cdot b \cdot d = d^{-1} \cdot d = 1$ sowie der Eindeutigkeit des Inversen folgt.

b) Nach a) ist

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = (ad) \cdot (bd)^{-1} \pm (cb) \cdot (bd)^{-1} = (ad \pm cb) \cdot (bd)^{-1} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

unter Verwendung des Distributivgesetzes.

Aufgabe 4. Um beide Seiten dieser Gleichung sinnvoll miteinander vergleichen zu können, bringen wir sie auf den gemeinsamen Nenner $x^2 \cdot (x+1)^2$. Wegen

$$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 \cdot (x+1)}{x^2 \cdot (x+1)^2} - \frac{(x+1)^2}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x^2 - (x^2 + 2x + 1)}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 \cdot (x+1)^2}$$

und

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{2x \cdot (x+1)^2}{x^2 \cdot (x+1)^2} - \frac{3x^2}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 + 2x + 1) - 3x^2}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x^3 + x^2 + 2x}{x^2 \cdot (x+1)^2}$$

gilt also für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} &= \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2} \\ \iff \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 \cdot (x+1)^2} &= \frac{2x^3 + x^2 + 2x}{x^2 \cdot (x+1)^2} \\ \iff 2x^3 + x^2 - 2x - 1 &= 2x^3 + x^2 + 2x \\ \iff -2x - 1 &= 2x \\ \iff -1 &= 4x \\ \iff -\frac{1}{4} &= x. \end{aligned}$$

Also ist $L = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$.