Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 3. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1. Zum Beweis der Gleichheit zweier Mengen, $X = Y$, beweist man oft die beiden Inklusionen $X \subset Y$ und $X \supset Y$; hier also

$$\begin{aligned} &(M \cup N) \setminus (M \cap N) \subset (M \setminus N) \cup (N \setminus M) \\ \text{und} \quad &(M \cup N) \setminus (M \cap N) \supset (M \setminus N) \cup (N \setminus M). \end{aligned}$$

- „$\subset$". Sei $x \in (M \cup N) \setminus (M \cap N)$. Dann liegt x in M oder in N, aber nicht in beiden Mengen – anders gesagt, x liegt *entweder* in M *oder* in N. Im ersten Fall liegt x in $M \setminus N$, im zweiten Fall in $N \setminus M$; also liegt x in jedem Fall in $(M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.
- „$\supset$". Sei $x \in (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$, also liegt x in $M \setminus N$ oder in $N \setminus M$. In beiden Fällen liegt x in $M \cup N$; im ersten Fall aber liegt x nicht in N, im zweiten nicht in M – also liegt x in keinem Fall in $M \cap N$, und das zeigt $x \in (M \cup N) \setminus (M \cap N)$.

Aufgabe 2.

a) Diese Aussage ist wahr. Beweis: Sind a und b gerade, so gibt es nach Definition des Begriffes „gerade" Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k$ und $b = 2\ell$. Dann ist aber $a + b = 2k + 2\ell = 2 \cdot (k + \ell)$ wieder eine gerade Zahl, und $a \cdot b = 2k \cdot 2\ell = 2 \cdot (2k\ell)$ ist ebenfalls gerade.

b) Diese Aussage ist falsch; beispielsweise ist $a = b = 1$ ein Gegenbeispiel ($a + b = 2$ ist gerade, aber $a \cdot b = 1$ ist ungerade).

Aufgabe 3.

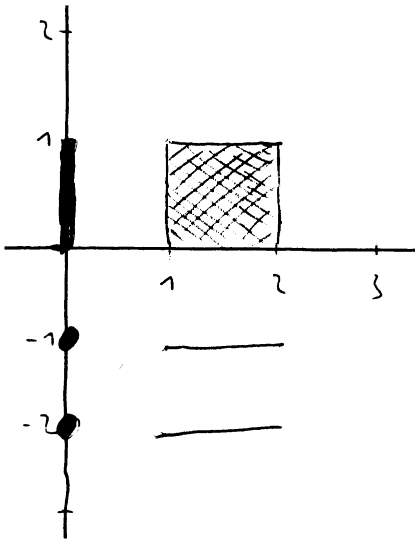
a) Es ist $N = \{(-2)^2 - 1, 0^2 - 1, 1^2 - 1, 3^2 - 1, 4^2 - 1\} = \{3, -1, 0, 8, 15\} = \{-1, 0, 3, 8, 15\}$. Ein Paar $(x, y) \in M \times N$ kann nur dann die Eigenschaft $x = y$ haben, wenn x (und y) in $M \cap N = \{-1, 0, 3\}$ liegt. Also ergibt sich

$$\{(x, y) \in M \times N \mid x = y\} = \{(0, 0), (3, 3)\}.$$

Für die dritte Menge müssen wir für jedes Element $x \in M$ alle Elemente $y \in N$ mit $x < y$ „abklappern". Das ergibt

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in M \times N \mid x < y\} = \{&(-2, -1), (-2, 0), (-2, 3), (-2, 8), (-2, 15), \\ &(0, 3), (0, 8), (0, 15), (1, 3), (1, 8), (1, 15), (3, 8), (3, 15), (4, 8), (4, 15)\}. \end{aligned}$$

b) Es könnte sich ein Bild ähnlich der folgenden Skizze ergeben:



Aufgabe 4.

a) Es ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}\,, \\
\mathcal{P}(\{1\}) &= \{\emptyset, \{1\}\}\,, \\
\mathcal{P}(\{1,2\}) &= \{\emptyset, \{1\}\,, \{2\}\,, \{1,2\}\}\,, \\
\mathcal{P}(\{1,2,3\}) &= \{\emptyset, \{1\}\,, \{2\}\,, \{3\}\,, \{1,2\}\,, \{1,3\}\,, \{2,3\}\,, \{1,2,3\}\}\,.
\end{aligned}
$$

b) In Teilaufgabe a) erhielten wir der Reihe nach 1, 2, 4 und 8 Elemente. Dies sind alles Zweierpotenzen, und man könnte nun vermuten, daß $\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})$ immer 2^n Elemente hat. Dies trifft zu, und später werden wir es auch beweisen können.

c) Die Menge N_1 besitzt genau zwei Elemente, nämlich $\emptyset$ und $\{1\}$. Ihre Potenzmenge berechnet sich also genauso wie diejenige von M_2, nämlich ist $\mathcal{P}(N_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\,, \{\{1\}\}\,, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.

Die Menge N_2 besitzt genau ein Element, nämlich $\{1,2\}$, so daß ihre Potenzmenge sich berechnet wie die von M_1. Es ist also $\mathcal{P}(N_2) = \{\emptyset, \{\{1,2\}\}\}$.

Die Menge $N_1 \cup N_2 = \{\emptyset, \{1\}\,, \{1,2\}\}$ schließlich enthält drei Elemente, so daß ihre Potenzmenge sich wie die von M_3 berechnet zu

$$
\mathcal{P}(N_1 \cup N_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\,, \{\{1\}\}\,, \{\{1,2\}\}\,, \{\emptyset, \{1\}\}\,, \{\emptyset, \{1,2\}\}\,, \{\{1\}\,, \{1,2\}\}\,, \{\emptyset, \{1\}\,, \{1,2\}\}\}\,.
$$