MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Moser

WS 2013/14
Blatt 1
23.10.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. Wir vereinbaren neben

   - N: „Jemand ist Nationalspieler.“

   noch die folgenden Abkürzungen:

   - S: „Jemand hat ein gutes Spielverständnis.“
   - G: „Jemand kann gut spielen.“
   - W: „Jemand ist ein wahrer Fußballer.“
   - B: „Jemand kann die Zuschauer begeistern.“

   Damit lassen sich die gegebenen Aussagen wie folgt formalisieren:

   - $S \implies G$: „Wenn jemand ein gutes Spielverständnis hat, kann er gut spielen.“
   - $\neg B \implies \neg W$: „Wer die Zuschauer nicht begeistern kann, ist kein wahrer Fußballer.“
   - $\neg S \implies \neg B$: “Jemand, der kein gutes Spielverständnis hat, kann die Zuschauer nicht begeistern.“
   - $N \implies W$: „Nur ein wahrer Fußballer kann Nationalspieler sein.“

   Unter Verwendung der zu den zwei Implikationen

   $$\neg B \implies \neg W \quad \text{und} \quad \neg S \implies \neg B$$

   jeweils äquivalenten Aussagen

   $$W \implies B \quad \text{und} \quad B \implies S$$

   erhalten wir die Implikationskette

   $$N \implies W \implies B \implies S \implies G.$$

   Damit gilt neben $N \implies W$ auch $N \implies B$, $N \implies S$, wie auch $N \implies G$. Damit hat ein Fußballnationalspieler notwendigerweise alle vier genannten Eigenschaften.

2. a) Die beiden Aussagen $\neg(P \vee Q)$ und $\neg P \wedge \neg Q$ besitzen gemäß

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

unabhängig davon, ob P und Q wahr oder falsch sind, immer denselben Wahrheitswert, sind also äquivalent; dies kommt auch dadurch zum Ausdruck, daß die Äquivalenzaussage $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$ gemäß

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$
w	w	f	f	w
w	f	f	f	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w

allgemeingültig, also eine Tautologie, ist.

b) Für die drei Aussagen $\neg(P \iff Q)$ und $P \iff \neg Q$ und $\neg P \iff Q$ gilt:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \Leftrightarrow \neg Q$	$\neg P$	$\neg P \Leftrightarrow Q$
w	w	w	f	f	f	f	f
w	f	f	w	w	w	f	w
f	w	f	w	f	w	w	w
f	f	w	f	w	f	w	f

Damit besitzen sie unabhängig davon, ob P und Q wahr oder falsch sind, immer denselben Wahrheitswert, sind also äquivalent.

3. Für die linke Seite der Äquivalenz ergibt sich die Wahrheitstafel

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Rightarrow (Q \vee R)$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w
f	f	f	f	w

Damit ist ihr Wahrheitswert vom Wahrheitswert von Q abhängig, denn in der 2. und 4. Zeile ist beidesmal P wahr und R falsch, die Aussage $P \Rightarrow (Q \vee R)$ besitzt dort jedoch verschiedene Wahrheitswerte, je nachdem, ob Q wahr oder falsch ist. Damit muß auch in der rechten Seite der Äquivalenz Q oder $\neg Q$ auftreten. Wir erstellen die Wahrheitstafel für $(Q \wedge P) \Rightarrow R$ und für $(\neg Q \wedge P) \Rightarrow R$

P	Q	R	$Q \wedge P$	$(Q \wedge P) \Rightarrow R$	$\neg Q \wedge P$	$(\neg Q \wedge P) \Rightarrow R$
w	w	w	w	w	f	w
w	w	f	w	f	f	w
w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	w	f
f	w	w	f	w	f	w
f	w	f	f	w	f	w
f	f	w	f	w	f	w
f	f	f	f	w	f	w

und sehen, daß

$$\big(P \implies (Q \vee R)\big) \iff \big((\neg Q \wedge P) \implies R\big)$$

die Tautologie ist.

4. Für die Aussage $\big((P \implies Q) \wedge Q\big) \implies P$ ergibt sich die Wahrheitstafel

P	Q	$P \implies Q$	$(P \implies Q) \wedge Q$	$\big((P \implies Q) \wedge Q\big) \implies P$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	w

damit ist die Aussage nicht allgemeingültig. Wir machen uns dies an einem Beispiel deutlich: Max nimmt an einer Klausur teil, die mit mindestens 12 von 24 Punkten bestanden ist, für die beiden Aussagen

P: „Max hat 24 Punkte.“ und Q: „Max besteht die Klausur.“

ist also die Implikation $P \implies Q$ wahr; erreicht nun Max genau 18 Punkte, so ist auch Q und damit die Konjunktion $(P \implies Q) \wedge Q$ wahr, allerdings P und damit die Implikation $\big((P \implies Q) \wedge Q\big) \implies P$ falsch.

Für die Aussage $\big((P \implies Q) \wedge \neg Q\big) \implies \neg P$ ergibt sich die Wahrheitstafel

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$\big((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w

damit ist die Aussage allgemeingültig.