Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2013/14

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik I – 14. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Euklidischer Algorithmus). Gegeben seien $a = 6706$ und $b = 623 \in \mathbb{Z}$.

a) Man führe den Euklidischen Algorithmus für a und b durch.

b) Man bestimme einen größten gemeinsamen Teiler d von a und b und berechne $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $d = x \cdot a + y \cdot b$.

c) Man bestimme ein kleinstes gemeinsames Vielfaches v von a und b.

Aufgabe 2 (Größte gemeinsame Teiler). Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$, und $0 \neq c \in \mathbb{Z}$ sei ein Teiler von $a \cdot b$. Sei ferner d_1 ein größter gemeinsamer Teiler von a und c sowie d_2 ein größter gemeinsamer Teiler von b und c. Man zeige, daß dann c ein Teiler von $d_1 \cdot d_2$ ist.

Aufgabe 3 (Teilbarkeit). Es sei $k \in \mathbb{Z}$ fest gewählt.

a) Man zeige für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq -k$:

$$(a+k) \mid (a^2+k) \quad \Longleftrightarrow \quad (a+k) \in T(k \cdot (k+1)).$$

(Hinweis: Man vergleiche die Zahlen $a^2 + k$ und $a^2 - k^2$.)

b) Man bestimme alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq -6$ und $(a+6) \mid (a^2+6)$.

c) Man bestimme alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 6$ und $a - 6 \mid a^2 - 6$.

Aufgabe 4 (Gruppen). Für den angeordneten Körper $\mathbb{R}$ betrachte man die Menge $G =]-1, 1[\subset \mathbb{R}$.

a) Man zeige, daß durch

$$x * y := \frac{x+y}{1+xy} \quad \text{für alle } x, y \in G$$

eine Verknüpfung auf G definiert wird.

(Zu zeigen ist also, daß durch $*$ eine Abbildung $G \times G \to G$ gegeben ist. Dazu ist es nützlich, zu zeigen, daß $1 + xy > 0$ für $x, y \in G$ ist.)

b) Man zeige, daß $(G, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 5.–7. Februar 2014 behandelt.