Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 3. Zentralübungsblatt

Man kreuze richtig an:

1) Aus der Beziehung $21 \cdot 109 - 26 \cdot 88 = 1$ kann man ablesen, daß gilt ...

a) 21 und 26 sind teilerfremd.
b) 26 und 88 sind teilerfremd.
c) 21 und 88 sind teilerfremd.
d) 88 ist invertierbar in $\mathbb{Z}_{109}$.
e) 88 ist invertierbar in $\mathbb{Z}_{21}$.
f) 21 ist invertierbar in $\mathbb{Z}_{109}$.
g) Es ist $\overline{21}^{-1} = \overline{109}$ in $\mathbb{Z}_{88}$
h) Es ist $\overline{21}^{-1} = \overline{109}$ in $\mathbb{Z}_{26}$

2) Welche der folgenden Gleichungen sind lösbar? Welche besitzen *genau eine* Lösung?

a) $\overline{3} \cdot x = \overline{5}$ in $\mathbb{Z}_{20}$
b) $\overline{5} \cdot x = \overline{3}$ in $\mathbb{Z}_{20}$
c) $\overline{15} \cdot x = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_{20}$
d) $\overline{15} \cdot x = \overline{10}$ in $\mathbb{Z}_{20}$

Aufgaben:

1) Man bestimme die Inversen von $\overline{10}$, $\overline{5}$ und $\overline{2}$ im Körper $\mathbb{Z}_{37}$.

2) Man löse die Gleichung $\overline{6} \cdot x = \overline{3}$ in $\mathbb{Z}_{33}$.
(Hinweis: Man bestimme zuerst alle $x \in \mathbb{Z}$, die die erste Gleichung lösen, und setze diese in die zweite Gleichung ein.)

Es sei $n \geq 2$ sowie $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$. Wir untersuchen die Gleichung

$$\overline{b} \cdot x = \overline{a} \quad \text{in } \mathbb{Z}_n.$$

aus der Vorlesung. Es sei $d = \mathrm{ggT}(n, b)$.
In der Vorlesung wurde bewiesen, daß die Gleichung genau dann lösbar ist, wenn $d \mid a$ gilt.
Wir schreiben $n' := \frac{n}{d}$ und $b' := \frac{b}{d}$ (dann sind n' und b' teilerfremde ganze Zahlen).

Zunächst behandeln wir die *homogene* Gleichung $\overline{b} \cdot x = \overline{0}$ (also den Fall $a = 0$).

3) Man zeige: Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt genau dann $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{0}$, wenn $n' \mid x$ gilt.

   (Tip: Schreibe $n = d \cdot n'$ und $b = d \cdot b'$.)

4) Man zeige: Die Gleichung $\overline{b} \cdot x = \overline{0}$ hat in $\mathbb{Z}_n$ die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \overline{0},\ \overline{n'},\ \overline{2n'},\ \ldots,\ \overline{(d-1)n'} \right\}.$$

   Insbesondere besitzt sie genau d verschiedene Lösungen.

Nun kümmern wir uns um die allgemeine, *inhomogene* Gleichung $\overline{b} \cdot x = \overline{a}$.
Nehmen wir an, wir hätten bereits *eine* Lösung $\overline{x_p} \in \mathbb{Z}_n$ dieser Gleichung gefunden.

5) Man zeige: Eine Klasse $\overline{x}$ in $\mathbb{Z}_n$ ist genau dann eine (weitere) Lösung der Gleichung, wenn $\overline{x} - \overline{x_p}$ eine Lösung der homogenen Gleichung $\overline{b} \cdot x = \overline{0}$ ist.

6) Man zeige: Die Lösungsmenge der Gleichung $\overline{b} \cdot x = \overline{a}$ ist

$$L = \left\{ \overline{x_p},\ \overline{x_p} + \overline{n'},\ \overline{x_p} + \overline{2n'},\ \ldots,\ \overline{x_p} + \overline{(d-1)n'} \right\}.$$

   Insbesondere hat die Gleichung also genau d verschiedene Lösungen.