Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Gezinkter Würfel). Über den Wurf eines (gezinkten, also nicht fairen) Würfels sei bekannt,

- daß er die Zahlen $2, 3, 4, 5$ alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit liefert,
- daß er doppelt so oft eine 6 wie eine 1 liefert,
- und daß die Ereignisse $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$ und $\{3, 4\}$ gleich wahrscheinlich sind.

Man modelliere dieses Zufallsexperiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und berechne die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Zahl zu würfeln.

Aufgabe 2 (Zählen mit Sylvester). Ein Zufallsgenerator präsentiert eine Zahl aus $\{1, \dots, 900\}$, alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

a) Man modelliere dieses Zufallsexperiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Für jedes $d \in \mathbb{N}$ mit $d \mid 900$ berechne man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

A_d : „Die vom Zufallsgenerator gelieferte Zahl ist durch d teilbar.“

c) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß der Zufallsgenerator eine Zahl liefert, die durch 2 *oder* durch 3 *oder* durch 5 teilbar ist. *(Tip: Formel von Sylvester!)*

d) Wieviele Zahlen im Bereich $\{1, \dots, 900\}$ sind *weder* durch 2 *noch* durch 3 *noch* durch 5 teilbar?

Aufgabe 3 (Fußball-Weltmeisterschaft I). Jogi *(Name geändert)* ist ein leidenschaftlicher Sammler von Panini-WM-Sammelbildern. Sein Album ist durch beharrliches Kaufen und Tauschen momentan so weit gefüllt, daß er von jeder Mannschaft genau 10 Spieler besitzt. Heute kauft er sich eine neue Packung von Stickern.
Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß die neu erworbene Packung fünf Spieler enthält, die Jogi noch nicht in seinem Album hat (inkl. Modellierung durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum).
(Hinweis: Man überlege zunächst, welches kombinatorische Urnenmodell – mit oder ohne Zurücklegen, mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge? – das Zusammenstellen einer Packung von Stickern beschreibt.)

Die Fakten: Es gibt insgesamt 640 verschiedene Stickermotive, darunter jeweils 17 Spieler von jeder der 32 Mannschaften, die in Brasilien um die Weltmeisterschaft spielen; die übrigen Motive zeigen WM-Stadien, Maskottchen, Verbandswappen usw. Jede Packung zu 60 Cent enthält fünf Sticker. Panini garantiert, daß alle Motive gleich oft (und in praktisch unendlich großer Zahl) gedruckt und völlig zufällig in Packungen sortiert werden; dabei sei aber sichergestellt, daß niemals eine Packung das gleiche Motiv mehrfach enthalte.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (Allgemeine Formel von Sylvester). Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein (endlicher) Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Man beweise die *Formel von Sylvester* für die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung von vier Ereignissen: Für alle $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \Omega$ gilt

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\
& - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) \\
& \qquad - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) \\
& + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \\
& \qquad + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
& - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)
\end{aligned}
$$

b) *Zusatzaufgabe (6 Zusatzpunkte):* Man formuliere (!) und beweise eine Verallgemeinerung der Formel von Sylvester für Wahrscheinlichkeiten der Form $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$.

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 27. Juni 2014, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!