Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Es sei $x = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ und $\operatorname{ggT}(z, n) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\ \iff\quad & a_2\left(\frac{z}{n}\right)^2 + a_1 \cdot \frac{z}{n} + a_0 = 0 \\ \iff\quad & a_2\frac{z^2}{n^2} + a_1\frac{z}{n} + a_0 = 0 \qquad (\text{„mal } n^2\text{“}) \\ \iff\quad & a_2z^2 + a_1zn + a_0n^2 = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt zum einen $a_2z^2 = -a_1zn - a_0n^2 = -n \cdot (a_1z + a_0n)$, also $n \mid a_2z^2$, und zum anderen $a_0n^2 = -a_2z^2 - a_1zn = -z \cdot (a_2z + a_1n)$, also $z \mid a_0n^2$. Da z und n aber keine gemeinsamen Teiler haben, müssen alle Primfaktoren von n (die nun also in a_2z^2 enthalten sind) mitsamt Vielfachheiten in a_2 enthalten sein, d.h. $n \mid a_2$. – Mit dem gleichen Argument folgt aus $z \mid a_0n^2$, daß $z \mid a_0$ gelten muß.

b) Eine allgemeine Aussage lautet:

Es sei $d \in \mathbb{N}$. Sind $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ mit $a_0, a_d \neq 0$, und ist x eine Lösung der Gleichung

$$a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1x + a_0 \stackrel{!}{=} 0$$

mit $x \in \mathbb{Q}$, so läßt sich x schreiben als gekürzter Bruch $x = \frac{z}{n}$ mit $z \mid a_0$ und $n \mid a_d$.

Der Beweis ist der gleiche wie in a): Es sei $x = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ und $\operatorname{ggT}(z, n) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \\ \iff\quad & a_d\left(\frac{z}{n}\right)^d + a_{d-1}\left(\frac{z}{n}\right)^{d-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{z}{n} + a_0 = 0 \\ \iff\quad & a_d\frac{z^d}{n^d} + a_{d-1}\frac{z^{d-1}}{n^{d-1}} + \ldots + a_1\frac{z}{n} + a_0 = 0 \qquad (\text{„mal } n^d\text{“}) \\ \iff\quad & a_dz^d + a_{d-1}z^{d-1}n + \ldots + a_1zn^{d-1} + a_0n^d = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $a_dz^d = -n \cdot (\dots)$ und $a_0n^d = -z \cdot (\dots)$, also $n \mid a_dz^d$ und $z \mid a_0n^d$, und aufgrund der Teilerfremdheit von n und z folgt daraus $n \mid a_d$ bzw. $z \mid a_0$.

Aufgabe 2.

a) Dies ist eine Gleichung vom Typ, wie sie in Aufgabe 2 vom 7. Tutoriumsblatt behandelt wurde (die Koeffizienten sind ganzzahlig, der höchste Koeffizient ist 1). Also ist nach dieser Aufgabe jede rationale Lösung ganzzahlig und ein Teiler von 30. Es kommen also nur die Zahlen

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30$$

in Frage. Indem man diese Werte einsetzt, stellt man fest, daß 2, 5 und -3 Lösungen sind. Da eine Polynomgleichung 3. Grades aber überhaupt nur drei Lösungen besitzen kann, haben wir sogar sämtliche Lösungen der Gleichung gefunden, es ist also $L = \{-3, 2, 5\}$.

Das Ausprobieren all dieser potentiellen Lösungen ist zwar ohne weiteres möglich, aber einigermaßen lästig. Man kann sich die Arbeit erleichtern, indem man nach der ersten gefundenen Lösung, beispielsweise 2, eine Polynomdivision durch $x - 2$ durchführt und die Lösungen des sich ergebenden Restpolynoms, hier $x^2 - 2x - 15$, mit der quadratischen Lösungsformel ermittelt. Dieses Verfahren wird (oder wurde jedenfalls) auch im Gymnasium unterrichtet, in der Variante: „Eine Nullstelle raten und ausdividieren, die übrigen berechnen". Wir müssen nun aber nicht mehr raten, sondern können endlich viele Möglichkeiten durchprobieren.

b) Hier benötigen wir Aufgabe 1: Sie besagt, daß sich sämtliche Lösungen der Gleichung schreiben lassen als $x = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, $\operatorname{ggT}(z, n) = 1$ und $z \mid 10$ sowie $n \mid 15$.

Die möglichen Werte von n sind also $1, 3, 5, 15$; aufgrund der Teilerfremdheit von z und n bleiben dann überhaupt nur die folgenden Brüche als Möglichkeiten übrig:

$$\pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{15}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{2}{15}, \pm 5, \pm\frac{5}{3}, \pm 10, \pm\frac{10}{3}.$$

Das sind 24 mögliche Lösungen; diese alle durchzuprobieren, ist immer noch abschreckend genug. Man sollte es aber so sehen: 24 zu testende Lösungen sind *nichts* im Vergleich zu der im Wortsinne unendlichen Anzahl möglicher Lösungen, die man durchprobieren müßte, wenn Aufgabe 1 nicht zur Verfügung stünde! Außerdem kann man häufig beispielsweise durch eine zuerst durchgeführte Kurvendiskussion genügend viele Informationen über die ungefähre Lage der Nullstellen sammeln, daß das Ausprobieren seinen Schrecken weitgehend verliert.

Mit etwas Geduld zeigt sich, daß $\frac{2}{5}$ und $\frac{5}{3}$ die beiden Lösungen sind. – In diesem Fall hätte man natürlich alternativ die quadratische Lösungsformel verwenden können.

c) Auch hier benötigen wir Aufgabe 1. Sie liefert uns die Existenz einer Darstellung der Lösungen als $x = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, $\operatorname{ggT}(z, n) = 1$ und $z \mid 1$ sowie $n \mid 30$. Das bedeutet, daß $z = \pm 1$ ist, und $n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Man hat nun relativ schnell Erfolg und findet, daß beispielsweise $\frac{1}{3}$ eine Lösung ist. Danach sucht man entweder weiter (und findet die übrigen Lösungen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{5}$), oder man dividiert das Polynom $x - \frac{1}{3}$ aus und erhält das Polynom $30x^2 + 21x + 3$, dessen Nullstellen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{5}$ die quadratische Lösungsformel mühelos verrät.

Aufgabe 3. Eine wesentliche Beobachtung ist, daß die Nullstelle $x = 1$ des Nenners im Bruch

$$\frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1}$$

auch eine Nullstelle des Zählers ist. Also kann man kürzen! In der Tat ergibt eine Polynomdivision, daß

$$\frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1} = x^2 + 2x + 2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

ist. Damit gilt also einfach

$$M = \left\{ x^2 + 2x + 2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}.$$

Die Elemente der Menge M erhalten wir nun durch eine einfache Kurvendiskussion: Der Graph der Funktion $x \mapsto x^2 + 2x + 2$ ist eine nach oben offene Parabel; die x-Koordinate ihres Scheitelpunkts ist die Nullstelle der Ableitung $(x^2 + 2x + 2)' = 2x + 2$, also $x = -1$, und damit ist ihr Scheitelpunkt $(-1, 1)$. Dies zeigt, daß $M = [1, \infty[$ ist[1], also ist M nur nach unten beschränkt mit $\min M = 1$.

[1] Das aufgrund des ausgeschlossenen Wertes $x = 1$ „fehlende" Element 5 von M ist wegen der Achsensymmetrie der Parabel dennoch enthalten, nämlich für $x = -3$.

Aufgabe 4.

a) Ist $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit $n = |A|$ und $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ mit $m = |B|$, so gibt es kombinatorisch überhaupt nur $n \cdot m$ mögliche Summen der Form $a_i + b_j$ mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Dies zeigt $|A + B| \leq n \cdot m = |A| \cdot |B|$; da von diesen $n \cdot m$ möglichen Summen jedoch manche den gleichen Wert haben könnten, gilt im allgemeinen nur die Ungleichung, keine Gleichheit.

Man kann jedoch zeigen, daß stets $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$ gilt, und daß diese Abschätzung nach unten im allgemeinen optimal ist. Wer findet einen Beweis?

b) „$\subset$". Es sei $x \in [a, b] + [c, d]$; das bedeutet: $x = u + v$ mit $a \leq u \leq b$ und $c \leq v \leq d$. Dann ist aber (durch Addition der Ungleichungen) $a + c \leq u + v \leq b + d$, also $x \in [a + c, b + d]$.

„$\supset$". Es sei $x \in [a + c, b + d]$. Entsprechend dem Hinweis unterscheiden wir zwei Fälle: Ist $x \in [a + c, b + c]$, so gilt $t := x - c \in [a, b]$, also $x = t + c \in [a, b] + [c, d]$. Ist dagegen $x \in [b + c, b + d]$, so gilt $t := x - b \in [c, d]$, also $x = b + t \in [a, b] + [c, d]$. Da stets (mindestens) einer der beiden Fälle eintritt, sind wir damit fertig.

c) Für jedes $x \in A$ und jedes $y \in B$ gilt $x \leq \sup A$ und $y \leq \sup B$, also $x + y \leq \sup A + \sup B$, und das zeigt, daß $\sup A + \sup B$ eine obere Schranke für $A + B$ ist.

Ist nun $\varepsilon > 0$, so ist zu zeigen, daß $\sup A + \sup B - \varepsilon$ *keine* obere Schranke für $A + B$ ist. Nach Voraussetzung und dem Hinweis folgend, gibt es ein $x \in A$ mit $x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$, und ebenso gibt es ein $y \in B$ mit $y > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist aber $x + y > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon$, und damit haben wir ein Element $x + y \in A + B$ gefunden, das oberhalb von $\sup A + \sup B - \varepsilon$ liegt, d.h. $\sup A + \sup B - \varepsilon$ ist *keine* obere Schranke für $A + B$.