Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Es fällt schwer, im Kopf Primfaktoren des Zählers und des Nenners ausfindig zu machen, die man herauskürzen könnte. Also greifen wir zur „Maschine“ und ermitteln den größten gemeinsamen (= herauskürzbaren) Teiler von Zähler und Nenner mit dem euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 4891 &= 2 \cdot 1679 + 1533 \\ 1679 &= 1 \cdot 1533 + 146 \\ 1533 &= 10 \cdot 146 + 73 \\ 146 &= 2 \cdot 73 + 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathrm{ggT}(4891, 1679) = 73$, und Ausdividieren des gemeinsamen Faktors 73 ergibt $4891 = 73 \cdot 67$ und $1679 = 73 \cdot 23$, also

$$\frac{1679}{4891} = \frac{23}{67}.$$

Dieser Bruch kann nicht weiter kürzbar sein, weil wir ja den *größten* gemeinsamen Faktor ermittelt haben; *de facto* sind 23 und 67 sogar Primzahlen.

b) Daß die einzige negative Zahl q_3 die kleinste der vier ist, ist offensichtlich. Außerdem sieht man, daß $0 < q_1 < 1$ ist, während $q_2, q_4 > 1$ sind. Wir müssen also nur noch diese beiden Zahlen miteinander vergleichen: Es gilt

$$\begin{aligned} q_2 > q_4 \quad &\iff \quad \frac{71}{60} > \frac{84}{71} \\ &\iff \quad 71 \cdot 71 > 60 \cdot 84 \\ &\iff \quad 5041 > 5040. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist wahr, also gilt $q_2 > q_4$, und wir erhalten insgesamt die Reihenfolge $q_3 < q_1 < q_4 < q_2$.

c) Es ergibt sich die folgende Tabelle:

n	Vielfachheit von 3 in n
r_1	-2
r_2	-2
$r_1 + r_2$	-2
$r_1 - r_2$	-1
$r_1 \cdot r_2$	-4
r_1/r_2	0

Die zugehörigen Rechnungen lauten:

- $\mathbf{r_1}$ **und** $\mathbf{r_2}$: Es ist $r_1 = \frac{11}{18} = \frac{11}{3^2 \cdot 2} = 3^{-2} \cdot \frac{11}{2}$ und $r_2 = \frac{17}{45} = \frac{17}{3^2 \cdot 5} = 3^{-2} \cdot \frac{17}{5}$. Also ist in beiden Zahlen die Vielfachheit -2.
- $\mathbf{r_1 + r_2}$: Es ist $r_1 + r_2 = 3^{-2} \cdot (\frac{11}{2} + \frac{17}{5}) = 3^{-2} \cdot \frac{89}{10}$, und da weder 89 noch 10 durch 3 teilbar sind, ist die Vielfachheit wieder -2.
- $\mathbf{r_1 - r_2}$: Hier passiert nun etwas: Es ist $r_1 - r_2 = 3^{-2} \cdot (\frac{11}{2} - \frac{17}{5}) = 3^{-2} \cdot \frac{21}{10}$, und es ist $21 = 3 \cdot 7$! Also ist insgesamt $r_1 - r_2 = 3^{-2} \cdot 3^1 \cdot \frac{7}{10} = 3^{-1} \cdot \frac{7}{10}$, so daß die Vielfachheit nun -1 ist.
- $\mathbf{r_1 \cdot r_2}$: Es ist $r_1 \cdot r_2 = 3^{-2} \cdot \frac{11}{2} \cdot 3^{-2} \cdot \frac{17}{5} = 3^{-4} \cdot \frac{11 \cdot 17}{2 \cdot 5}$, also ist die Vielfachheit -4.
- $\mathbf{r_1 / r_2}$: Es ist $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3^{-2} \cdot \frac{11}{2}}{3^{-2} \cdot \frac{17}{5}} = \frac{11 \cdot 5}{17 \cdot 2}$, die Vielfachheit der Primzahl 3 in diesem Bruch beträgt 0, denn weder Zähler noch Nenner sind durch 3 teilbar.

(Es gibt allgemeine Rechenregeln für das Verhalten der Vielfachheit einer Primzahl unter Addition, Multiplikation usw. von Zahlen, die wir aber bislang nicht behandelt haben.)

Aufgabe 2.

a) Es seien $r, s \in R$, also $r = \frac{a}{b}$ und $s = \frac{c}{d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$ und $p \nmid b$ sowie $p \nmid d$. Dann gilt

$$r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{sowie} \quad r \cdot s = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Da b und d beide nicht null sind, ist auch $bd \neq 0$, und da beide nicht durch p teilbar sind, ist (aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung) auch bd nicht durch p teilbar. Dies beweist, daß sowohl $r + s$ als auch $r \cdot s$ in R liegen.

b) Nach a) sind $+$ und $\cdot$ tatsächlich Verknüpfungen auf R. Nachzuweisen ist, daß sie assoziativ und kommutativ mit einem neutralen Element sind; ferner, daß zwischen ihnen das Distributivgesetz gilt, und daß bezüglich $+$ inverse Elemente existieren.

Die Assoziativität, Kommutativität und Distributivität gelten einfach, weil sie in $\mathbb{Q}$ gelten und die Verknüpfungen in R ja die gleichen sind wie in $\mathbb{Q}$. Es bleibt also nur zu zeigen, daß die beiden neutralen Elemente in R existieren (also daß die neutralen Elemente $0, 1 \in \mathbb{Q}$ auch in R liegen), und daß für jedes $r \in R$ auch $-r \in R$ gilt. Letzteres ist klar, denn mit $r = \frac{a}{b}$ erfüllt auch $-r = \frac{-a}{b}$ die Bedingungen, die die Menge R definieren (es werden ja nur an den Nenner Bedingungen gestellt). Außerdem sind $0 = \frac{0}{1}$ und $1 = \frac{1}{1}$ in R enthalten; allgemeiner gilt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$ wegen $a = \frac{a}{1} \in R$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

c) Der Ring R ist *kein* Körper, denn alle Elemente $r = \frac{a}{b}$, deren Zähler a durch p teilbar ist, sind *nicht* invertierbar in R, denn das Inverse $\frac{b}{a}$ ist wegen $p \mid a$ nicht in R enthalten.

Ein etwas präziseres Argument, daß $r = \frac{a}{b}$ mit $p \mid a$ kein Inverses in R besitzt, könnte so lauten: Angenommen, es gäbe $s = \frac{c}{d} \in R$ mit $rs = 1$, also insbesondere $p \nmid d$. Dann gilt $1 = rs = \frac{ac}{bd}$, also $ac = bd$. In dieser Gleichung ganzer Zahlen ist die linke Seite durch p teilbar, die Faktoren auf der rechten Seiten jedoch beide nicht – im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 3. Wie immer ist nachzuweisen:

a) Die Zahl $-(\sup M)$ ist eine untere Schranke für $-M$.

b) Ist $a > -(\sup M)$, so ist a *keine* untere Schranke für $-M$.

Zu a): Für jedes $y \in -M$ gibt es nach Definition von $-M$ ein $x \in M$ mit $y = -x$. Dann ist $x \leq \sup M$, also $y = -x \geq -(\sup M)$, was zu beweisen war.
Zu b): Ist $a > -(\sup M)$, so ist $-a < \sup M$. Dann gibt es nach Definition von $\sup M$ ein $x \in M$ mit $x > -a$, also folgt $-x < a$, und wegen $-x \in -M$ beweist dies, daß a keine untere Schranke für $-M$ ist.

Aufgabe 4. Man kann ähnlich argumentieren wie in Aufgabe 1 vom 7. Tutoriumsblatt: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{-a} + 3^{-b} + 5^{-c} \leq 2^{-1} + 3^{-1} + 5^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}.$$

Damit ist $\frac{31}{30}$ eine obere Schranke für M, und da diese Zahl in M enthalten ist (nämlich für $a = b = c = 1$), folgt $\max M = \frac{31}{30}$.
Nun zeigen wir, daß $\inf M = 0$ ist. Selbstverständlich sind alle Elemente von M positiv, d.h. 0 ist eine untere Schranke. Ich behaupte nun, daß jedes $\varepsilon > 0$ ***keine*** untere Schranke für M ist. Dazu verwenden wir Aufgabe 1 a) vom 7. Tutoriumsblatt: Wir haben sicher dann gewonnen, wenn wir $a, b, c \in \mathbb{N}$ solcherart finden, daß $2^{-a}, 3^{-b}, 5^{-c} < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt, denn dann ist

$$\underbrace{2^{-a} + 3^{-b} + 5^{-c}}_{\in M} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Äquivalent zu unserem gesteckten Ziel sind die Ungleichungen $2^a > \frac{3}{\varepsilon}$, $3^b > \frac{3}{\varepsilon}$ und $5^c > \frac{5}{\varepsilon}$. Aber Aufgabe 1 a) vom 7. Tutoriumsblatt liefert nun genau das, was wir benötigen, denn $2, 3, 5$ sind alle > 1, also gibt es Exponenten $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit den gewünschten Eigenschaften.
Dieses Infimum ist ***kein*** Minimum, denn wie bemerkt, ist jedes Element von M positiv, d.h. $\inf M = 0 \notin M$.

Man kann auch anhand von Aufgabe 4 vom 7. Übungsblatt (das allerdings in der Zukunft liegt!) argumentieren und die gegebene Menge als Summe dreier Mengen von der Form darstellen, wie sie in Aufgabe 1 vom 7. Tutoriumsblatt behandelt wurden.