Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Brüche und Primfaktorzerlegungen I).

a) Man stelle $q = \frac{1679}{4891} \in \mathbb{Q}$ als vollständig gekürzten Bruch dar.

b) Man ordne $q_1 = \frac{117}{144}$, $q_2 = \frac{71}{60}$, $q_3 = -\frac{27}{35}$ und $q_4 = \frac{84}{71} \in \mathbb{Q}$ bezüglich $<$.
(Hinweis: Ausrechnen der Werte mit dem Taschenrechner gilt nicht!)

c) Man bestimme die Vielfachheit der Primzahl $p = 3$ in den rationalen Zahlen $r_1 = \frac{11}{18}$ und $r_2 = \frac{17}{45}$ sowie $r_1 + r_2$, $r_1 - r_2$, $r_1 \cdot r_2$ und $\frac{r_1}{r_2}$.

Aufgabe 2 (Brüche und Primfaktorzerlegungen II). Es sei p eine (ein für allemal fest gewählte) Primzahl. Man betrachte die Teilmenge

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } p \nmid b \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

a) Man zeige, daß für alle $r, s \in R$ auch $r + s \in R$ und $r \cdot s \in R$ gilt.

b) Man zeige, daß $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

c) Man entscheide, ob $(R, +, \cdot)$ ein Körper ist, und begründe die Entscheidung.

Aufgabe 3 (Infimum und Supremum I). Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Man zeige, daß $\inf(-M) = -(\sup M)$ ist. (Dabei ist $-M := \{-x \mid x \in M\}$.)

Aufgabe 4 (Infimum und Supremum II). Man bestimme (mit Beweis!) das Infimum und das Supremum der Menge

$$M := \left\{ 2^{-a} + 3^{-b} + 5^{-c} \mid a, b, c \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ist das Infimum sogar ein Minimum, ist das Supremum sogar ein Maximum?
(Hinweis: Ein nützliches Werkzeug für den formalen Nachweis des Infimums wird auf dem 7. Tutoriumsblatt, Aufgabe 1, erscheinen.)

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 6. Juni 2014, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!