Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Äquivalenzklassen). Es sei $M = [-1,1]$ und $R \subset M \times M$ die Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen

$$\{-1,1\}\,, \quad \{0\}\,, \quad \left]-\frac{1}{2},0\right[\;\cup\; \left]0,\frac{1}{2}\right[\,, \quad \left]-1,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2},1\right[\,.$$

Man skizziere R in der Anschauungsebene.

Aufgabe 2 (Ordnungen). Man zeige, daß auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch die Vorschrift

$$(x,y) \preceq (x',y') \;:\Longleftrightarrow\; (x < x') \;\vee\; \big((x = x') \;\wedge\; (y \le y')\big)$$

eine totale Ordnung „$\preceq$“ definiert wird. Wie erklärt sich der übliche Name „lexikographische Ordnung“ für diese Ordnung?

Aufgabe 3+4 (Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}_0$). In dieser Doppelaufgabe konstruieren wir $\mathbb{Z}$, ausgehend von der Menge $\mathbb{N}_0$. (Damit aber unterwegs keine Verwechslungen auftreten, nennen wir die neu konstruierte Menge nicht $\mathbb{Z}$, sondern Z.)

a) Man zeige: Auf der Menge $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird durch

$$(a,b) \sim (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a + d = b + c$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Es sei im folgenden $Z := (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/{\sim}$ die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. der Relation aus a).

b) Man zeige: Die Vorschriften

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(a+c, b+d)] \quad \text{und} \quad [(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac+bd, ad+bc)]$$

liefern wohldefinierte Verknüpfungen „+“ und „·“ auf Z.

c) Man zeige, daß für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $[(x,0)] + [(y,0)] = [(x+y,0)]$.
(ii) $[(x,0)] \cdot [(y,0)] = [(xy,0)]$.
(iii) $[(x,0)] = [(y,0)] \implies x = y$.

d) Man zeige, daß $(Z,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

e) Wir identifizieren nun jedes $x \in \mathbb{N}$ mit dem entsprechenden Element $[(x,0)]$ von Z (wobei Aufgabe c) zeigt, daß das sinnvoll möglich ist); damit können wir $\mathbb{N}$ als *Teilmenge* von Z auffassen.

Man zeige, daß für jedes Element $[(a,b)] \in Z$ genau eine der folgenden Möglichkeiten zutrifft:

(i) $[(a,b)] = 0$.
(ii) Es gibt genau ein $x \in \mathbb{N}$ mit $[(a,b)] = x$.
(iii) Es gibt genau ein $x \in \mathbb{N}$ mit $-[(a,b)] = x$.

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 30. Mai 2014, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!