Mathematisches Institut der Universität München Daniel Rost
Sommersemester 2014 Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Rechnen in $\mathbb{Z}_9$). Man betrachte den Ring $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ mit $\mathbb{Z}_9 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$.

a) Man bestimme die Verknüpfungstafeln für $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{Z}_9$.

b) Man bestimme die Menge $(\mathbb{Z}_9)^*$ sowie, für jedes $\overline{a} \in (\mathbb{Z}_9)^*$, das Inverse $\overline{a}^{-1}$.

c) Man löse die Gleichungen $\overline{5} \cdot x = \overline{3}$ und $\overline{4} \cdot x = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_9$.

d) Man bestimme in Abhängigkeit von $\overline{a} \in \mathbb{Z}_9$ die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $x^2 = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_9$.

Aufgabe 2 (Gruppentafeln). Über eine abelsche Gruppe $(G, +)$ mit der 5-elementigen Menge $G = \{a, b, c, d, e\}$ sei der folgende Ausschnitt ihrer Gruppentafel bekannt:

$+$	a	b	c	d	e
a		e			
b				a	b
c	b				
d					
e	a		c		e

Man vervollständige die Gruppentafel und weise dabei nach, daß es keine andere Möglichkeit der Vervollständigung gibt.
(Hinweis: Sudoku unter Ausnutzung der Kommutativität von G!)

Aufgabe 3 (Multiplikationstafeln). Es sei $(R, +, \cdot)$ ein endlicher Ring. Wie üblich, wird sein neutrales Element der Addition mit 0 bezeichnet, sein neutrales Element der Multiplikation mit 1. Im folgenden betrachten wir die Multiplikationstafel von R.

a) Man begründe: Wenn in einer Zeile der Multiplikationstafel keine 1 vorkommt, so muß in dieser Zeile mindestens ein Element mindestens doppelt vorkommen.

b) Man zeige: Wenn in einer Zeile der Multiplikationstafel keine 1 vorkommt, so steht in der gleichen Zeile mindestens zweimal eine 0.

(Hinweis: Distributivgesetz!)

Diese Aufgabe liefert, im kommutativen Fall, den Beweis für die Aussage von Satz 8.5 aus der Vorlesung, der besagt: Ein Element eines endlichen kommutativen Ringes ist entweder invertierbar oder ein Nullteiler.

Aufgabe 4 (Satz von Wilson). Es sei $n \geq 3$ eine feste natürliche Zahl.

a) Man zeige: Die Klasse $\overline{(n-1)!}$ im Ring $\mathbb{Z}_n$ ist invertierbar $\iff$ n ist eine Primzahl.

(Hinweis: Man zeige, daß jede der beiden Aussagen äquivalent dazu ist, daß jedes Element außer $\overline{0}$ in $\mathbb{Z}_n$ invertierbar ist.)

Die folgenden Teilaufgaben führen in d) zu einer wesentlichen Präzisierung der Aussage aus a).
Sei zunächst $(K, +, \cdot)$ ein beliebiger Körper und 1 sein neutrales Element der Multiplikation.

b) Man zeige: Die Gleichung $x^2 = 1$ hat in K nur die Lösung $x = \pm 1$.
(Tip: Man faktorisiere den Ausdruck $x^2 - 1$.)

c) Man ermittele alle invertierbaren Elemente $x \in K$ mit der Eigenschaft $x^{-1} = x$.
(Tip: Man verwende b).)

d) Man beweise den *Satz von Wilson*, der besagt:

$$\text{Es ist } \overline{(n-1)!} = \overline{-1} \text{ in } \mathbb{Z}_n \iff n \text{ ist eine Primzahl.}$$

(Hinweise: „$\Longrightarrow$“ folgt direkt aus a). Für „$\Longleftarrow$“ verwende man, daß $\mathbb{Z}_n$ ein Körper ist, und fasse mit Hilfe von c) die Faktoren im Produkt $(n-1)!$ auf geeignete Weise zu Paaren zusammen.)

Die Lösungen sind spätestens am **Mittwoch, 7. Mai 2014, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!