Mathematisches Institut der Universität München — Daniel Rost
Sommersemester 2014 — Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Jeder der beiden Spieler findet, unabhängig vom anderen, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ das von ihm zu suchende Objekt, so daß sie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$ sowohl das Auto als auch die Autoschlüssel finden.

Wenn man präzise arbeiten möchte, könnte man die Situation folgendermaßen modellieren: Die Verteilung der Objekte auf die Türen ist zwar bereits festgelegt (und damit für einen „allwissenden Beobachter" nicht mehr zufällig), aus der Sicht der beiden Spieler jedoch völlig zufällig, wobei für jede der $3! = 6$ möglichen Verteilungen die gleiche Wahrscheinlichkeit anzunehmen ist. Man kann also die Verteilung der Objekte auf die Türen als erste Stufe (oder, um eine suggestive Zählweise vorzuschlagen: als „nullte Stufe") eines dreistufigen Zufallsexperimentes ansehen: die zweite Stufe wäre dann die Wahl der beiden Türen von Spieler A, die dritte die der beiden Türen von Spieler B. – Das Resultat bei dieser Modellierung ist aber natürlich identisch zu unserem etwas pauschal berechneten.

b) Hier ist das Verhalten der Spieler nicht mehr an sich zufällig, sondern deterministisch von der (für die Spieler als zufällig empfundenen) Verteilung der Objekte auf die Türen abhängig. Zur Modellierung legen wir also die Möglichkeiten dieser Verteilung zugrunde: Es gibt $3! = 6$ Anordnungen der drei Objekte (Auto, Schlüssel, Niete) hinter den drei Türen, und alle drei sind sicherlich gleich wahrscheinlich. Wir notieren eine solche Verteilung als z.B. (A, S, N) für „Auto hinter Tür 1, Schlüssel hinter Tür 2, Niete hinter Tür 3".

Spieler A findet nur in zwei Konstellationen *nicht* das Auto, nämlich im Fall (S, N, A) (denn dann öffnet er Tür 1 und Tür 2) und im Fall (N, A, S) (denn dann öffnet er Tür 1 und Tür 3).

Spieler B findet nur in zwei Konstellationen *nicht* die Schlüssel, nämlich im Fall (S, N, A) (denn dann öffnet er Tür 2 und Tür 3) und im Fall (N, A, S) (denn dann öffnet er Tür 1 und Tür 3).

Man sieht: Die „schlechten" Konstellationen sind bei dieser Strategie für beide Spieler die gleichen zwei Anordnungen der Objekte! Das bedeutet, daß bei den anderen vier möglichen Anordnungen beide Spieler ihre gesuchten Objekte finden; das bedeutet eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$.

Diese Strategie beider Spieler ist sogar optimal: Denn schon allein Spieler A kann keinesfalls mit einer höheren Wahrscheinlichkeit als $\frac{2}{3}$ das Auto finden!

Aufgabe 2.

a) Es ist $P(B \cap T) = P_B(T) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}03$ und $P(\overline{B} \cap \overline{T}) = P_{\overline{B}}(\overline{T}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}05) = 0{,}855$. Damit können wir in einer Vierfeldertafel die folgenden Zellen ausfüllen:

	B	$\overline{B}$	
T	0,03		
$\overline{T}$		0,855	
	0,05		1

Diese Tafel läßt sich ohne weiteres vervollständigen (zuerst die linke Spalte und die unterste Zeile, danach die mittlere Spalte und zuletzt die beiden oberen Zeilen):

	B	$\overline{B}$	
T	0,03	0,095	0,125
$\overline{T}$	0,02	0,855	0,875
	0,05	0,95	1

b) Schon die sprachliche Formulierung (die unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten für eine Tonstörung in Abhängigkeit vom Vorliegen einer Bildstörung oder nicht vorgibt) suggeriert, daß die Ereignisse B und T eher nicht unabhängig sein werden. Überprüfen kann man das beispielsweise mit dem Kriterium aus Aufgabe 3 a), das besonders gut bei einer fertig ausgefüllten Vierfeldertafel anwendbar ist: Es ist

$$\begin{aligned} P(B \cap T) \cdot P(\overline{B} \cap \overline{T}) &= 0{,}03 \cdot 0{,}855 = 0{,}02565, \\ P(\overline{B} \cap T) \cdot P(B \cap \overline{T}) &= 0{,}095 \cdot 0{,}02 = 0{,}0019. \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse stimmen nicht überein, also sind die beiden Ereignisse abhängig. (Ebensogut hätte man natürlich $P(B \cap T) = 0{,}03$ mit $P(B) \cdot P(T) = 0{,}05 \cdot 0{,}125 = 0{,}00625$ vergleichen können.)

c) Diese Wahrscheinlichkeit ist $P_T(\overline{B}) = P(T \cap \overline{B})/P(T) = \frac{0{,}095}{0{,}125} = 0{,}76$.

d) Für einen fest gewählten Zuschauer sei A das Ereignis „Der Zuschauer schaltet im Laufe der Übertragung aus“. Die gegebene Information läßt sich so interpretieren, daß $P_{\overline{B}}(A) \leq 0{,}2$ ist. Was kann man dann über $P(A)$ sagen? Wenn A disjunkt zerlegt als $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, so erhält man

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \\ &= P_B(A) \cdot \underbrace{P(B)}_{=0{,}05} + \underbrace{P_{\overline{B}}(A)}_{\leq 0{,}2} \cdot \underbrace{P(\overline{B})}_{=0{,}95} \\ &\leq 1 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}95 \\ &= 0{,}24. \end{aligned}$$

(Dabei haben wir die unbekannte Größe $P_B(A)$ auf die einzige mögliche Art abgeschätzt: Wie jede Wahrscheinlichkeit ist sie ≤ 1.) Die Wahrscheinlichkeit, daß der Zuschauer während der Übertragung abschaltet, ist also höchstens 24%.

Aufgabe 3.

a) Es empfiehlt sich, beide Richtungen der Äquivalenz getrennt zu beweisen:

„$\Longrightarrow$“. Dies ist die „leichte“ Richtung: Aufgrund der Unabhängigkeit von A und B können wir die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ direkt durch $P(A)$ und $P(B)$ ausdrücken. Da laut Vorlesung mit A, B auch $A, \overline{B}$ sowie $\overline{A}, B$ und $\overline{A}, \overline{B}$ unabhängig sind, gilt das gleiche auch für die anderen drei Wahrscheinlichkeiten, und wir können folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}), \\ P(A \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{A} \cap B) &= P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(B). \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse stimmen (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) überein, also gilt $P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{A} \cap B)$.

„$\Longleftarrow$" Es ist zu zeigen, daß $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$ ist. Um die Voraussetzung

$$P(A\cap B)\cdot P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(A\cap\overline{B})\cdot P(\overline{A}\cap B)$$

anwendbar zu machen, müssen wir irgendwie die Wahrscheinlichkeiten von $A\cap\overline{B}$ und $\overline{A}\cap B$ ins Spiel bringen. Das gelingt durch die (disjunkten!) Zerlegungen

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\quad\text{und}\quad B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B),$$

und zwar folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
P(A)\cdot P(B)&=\big[P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\big]\cdot\big[P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\big]\\
&=P(A\cap B)^2+P(A\cap B)\cdot P(\overline{A}\cap B)\\
&\qquad+P(A\cap\overline{B})\cdot P(A\cap B)+\underbrace{P(A\cap\overline{B})\cdot P(\overline{A}\cap B)}_{=P(A\cap B)\cdot P(\overline{A}\cap\overline{B})}\\
&=P(A\cap B)^2+P(A\cap B)\cdot P(\overline{A}\cap B)\\
&\qquad+P(A\cap\overline{B})\cdot P(A\cap B)+P(A\cap B)\cdot P(\overline{A}\cap\overline{B})\\
&=P(A\cap B)\cdot\underbrace{\big[P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})\big]}_{=1}\\
&=P(A\cap B),
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, daß

$$\Omega=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$$

eine disjunkte Zerlegung des gesamten Ergebnisraumes ist.

b) Hier eignet sich das Modell des unabhängigen Wurfes dreier (unterscheidbarer) Münzen mit $\Omega=\{Z,K\}^3=\{(a_1,a_2,a_3)\,|\,a_i\in\{Z,K\}\}$ und $P=$ Laplace-Verteilung. Wir betrachten nun die folgende drei Ereignisse:

A : „Im ersten Wurf fällt Zahl" $=\{(Z,K,K),(Z,Z,K),(Z,K,Z),(Z,Z,Z)\}$
B : „Im zweiten Wurf fällt Zahl" $=\{(K,Z,K),(Z,Z,K),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$
C : „Nach Zahl fällt nie wieder Kopf" $=\{(Z,Z,Z),(K,Z,Z),(K,K,Z),(K,K,K)\}$.

Wegen $|A|=|B|=|C|=4$ gilt dann $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$, und wegen $A\cap B\cap C=\{Z,Z,Z\}$ ist außerdem

$$P(A\cap B\cap C)=P(\{Z,Z,Z\})=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

Jedoch sind die Ereignisse A,B,C nicht unabhängig: Denn es ist $A\cap C=\{Z,Z,Z\}$, also

$$P(A\cap C)=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(C).$$

Dagegen sind die Ereignisse A,B und – erstaunlicherweise! – auch B,C unabhängig. Findet man auch ein Beispiel, in dem zwar $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ gilt, die Ereignisse A,B,C jedoch *paarweise* abhängig sind?

c) Hier eignet sich der unabhängige Wurf von *zwei* (unterscheidbaren) Münzen, also $\Omega=\{Z,K\}^2$ und $P=$ Laplace-Verteilung. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A : „Im ersten Wurf fällt Zahl" $=\{(Z,K),(Z,Z)\}$
B : „Im zweiten Wurf fällt Zahl" $=\{(K,Z),(Z,Z)\}$
C : „Beide Münzen fallen auf die gleiche Seite" $=\{(Z,Z),(K,K))\}$.

Offenbar gilt $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Nun sind A, B, C *paarweise* unabhängig, denn es gilt

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{(Z, Z)\}$$

und damit

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) &= \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(C) = P(B) \cdot P(C). \end{aligned}$$

Jedoch sind A, B, C nicht unabhängig, denn es ist $A \cap B \cap C = \{(Z, Z)\}$, also

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Aufgabe 4.

a) Es handelt sich um eine Folge von identischen, unabhängigen Bernoulliexperimenten (also eine sogenannte Bernoullikette), wobei ein einzelnes Experiment ein Übermittlungsvorgang der Nachricht ist, und ein „Erfolg“ oder „Treffer“ (der mit Wahrscheinlichkeit p eintritt) die Verfälschung der Botschaft ist – sprachlich ist diese Konvention merkwürdig, aber unvermeidlich, wenn wir die gegebene Zahl p wie gewohnt als „Erfolgswahrscheinlichkeit“ sehen wollen.[1] Die Anzahl der unterwegs auftretenden Verfälschungen ist damit Binomialverteilt zu den Parametern n und p.

Die Nachricht kommt genau dann korrekt an, wenn sie unterwegs *geradzahlig oft* verfälscht wird (denn zweimaliges Verkehren ins Gegenteil stellt die ursprüngliche Nachricht wieder her.) Bei einer Kette von $n = 6$ Übertragungen kommt die Nachricht also dann korrekt an, wenn sie 0-, 2-, 4- oder 6-mal verfälscht wurde. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für korrekte Übermittlung

$$\begin{aligned} B(6, p)(\{0, 2, 4, 6\}) &= \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 + \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 + \binom{6}{4} p^4 (1-p)^2 + \binom{6}{6} p^6 (1-p)^0 \\ &= (1-p)^6 + 15p^2(1-p)^4 + 15p^4(1-p)^2 + p^6 \\ &= (1-p)^6 + p^6 + 15p^2(1-p)^2 \left[(1-p)^2 + p^2\right] \end{aligned}$$

Für $p = 0{,}2$ ergibt sich ein Wert von ca. $0{,}52$, und für $p = 0{,}8$ exakt der gleiche Wert!

Die Gleichheit beider Werte läßt sich folgendermaßen begründen: Bei $n = 6$ Versuchen ist das Ereignis „Gerade Zahl von Erfolgen“ identisch zum Ereignis „Gerade Zahl von Mißerfolgen“, und der Wechsel von $p = 0{,}2$ zu $p = 0{,}8$ vertauscht genau die Rollen von Erfolg und Mißerfolg.)

Bei einer Kette von $n = 7$ Übertragungen kommt die Nachricht ebenfalls bei $0, 2, 4$ oder 6 Verfälschungen korrekt an; dies ergibt die Wahrscheinlichkeit für korrekte Übermittlung

$$\begin{aligned} B(7, p)(\{0, 2, 4, 6\}) &= \binom{7}{0} p^0 (1-p)^7 + \binom{7}{2} p^2 (1-p)^5 + \binom{7}{4} p^4 (1-p)^3 + \binom{7}{6} p^6 (1-p)^1 \\ &= (1-p)^7 + 21p^2(1-p)^5 + 35p^4(1-p)^3 + 7p^6(1-p). \end{aligned}$$

Für $p = 0{,}2$ ergibt sich ein Wert von ca. $0{,}51$, für $p = 0{,}8$ ein Wert von ca. $0{,}49$.

Obwohl die Werte für die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Erfolges so unterschiedlich sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine insgesamt korrekte Übermittlung also in allen vier untersuchten Situationen ungefähr 50%.

[1] Wer damit ein Problem hat, möge versuchen, die Situation aus der Sicht eines „gegenerischen Agenten“ zu beurteilen: Er wird jede Verfälschung der Botschaft als Erfolg für sich verbuchen.

b) Dies ergibt sich unmittelbar aus den Überlegungen in a): Die Nachricht kommt genau dann korrekt an, wenn es unterwegs $0, 2, 4, 6, \dots, 2k$ Verfälschungen (also „Erfolge") gab. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für korrekte Übermittlung

$$\overline{p} = B(n,p)(\{0,2,4,\dots,2k\}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i}.$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} (q+p)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ \text{sowie} \quad (q-p)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so heben sich wegen des Faktors $(-1)^k$ die Summanden für *ungerades* k genau auf; damit ergibt sich

$$(q+p)^n + (q-p)^n = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ gerade}}}^{n} 2 \cdot \binom{n}{\ell} p^\ell q^{n-\ell} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i}.$$

Andererseits ist $q + p = 1$ und damit $q - p = (1-p) - p = 1 - 2p$, so daß wir gezeigt haben:

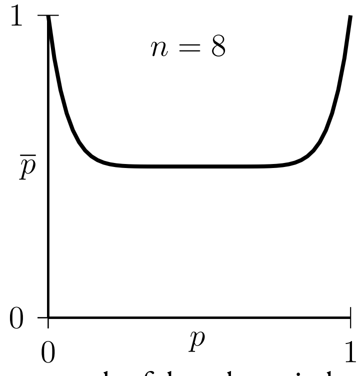
$$1 + (1-2p)^n = 2\overline{p},$$

was offenbar identisch zur Behauptung ist.

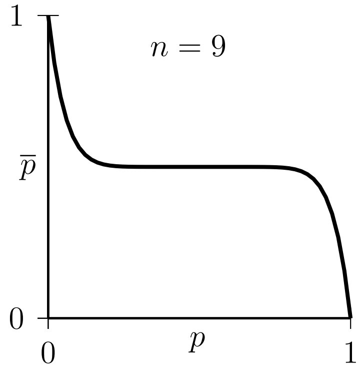
d) Ist n *gerade*, so ist $(1-2p)^n$ stets ≥ 0. Damit ist $\overline{p} \geq \frac{1}{2}$; dieser Minimalwert von $\overline{p}$ wird für $1 - 2p = 0$, also $p = \frac{1}{2}$ erreicht. Sowohl für kleineres als auch für größeres p wächst $\overline{p}$ an; für $p = 0$ und $p = 1$ gilt jeweils $\overline{p} = 1$. Dies ist auch verständlich: Wenn *nie* eine Verfälschung auftritt, dann kommt die Nachricht sicher korrekt an; tritt jedoch *in jedem Schritt* eine Verfälschung auf, dann auch – denn insgesamt wird über *geradzahlig* viele Stationen übermittelt!

Ist n *ungerade*, so *fällt* der Summand $(1-2p)^n$ für *wachsendes* p ab, und zwar von 1 (für $p = 0$) auf -1 (für $p = 1$). Damit ist $\overline{p}$ am größten für $p = 0$ (denn dann ist $\overline{p} = 1$: Tritt nie eine Verfälschung auf, so kommt die Nachricht korrekt an) und am kleinsten für $p = 1$ (denn dann ist $\overline{p} = 0$: Tritt in jedem Schritt eine Verfälschung auf, so kommt die Nachricht *nicht* korrekt an, denn sie wird über *ungeradzahlig* viele Stationen übermittelt).

Der Zusammenhang zwischen p und $\overline{p}$ läßt sich auch graphisch darstellen. Für gerades n sieht der typische Zusammenhang folgendermaßen aus:



Für ungerades n auf ergibt sich dagegen das folgende typische Bild:



Dabei sieht man, daß, je größer n ist, auf einem immer breiteren Bereich von möglichen Erfolgswahrscheinlichkeiten die gesamte Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Übermittlung ungefähr $\frac{1}{2}$ bleibt, wie wir es auch in a) beobachten konnten.