Mathematisches Institut der Universität München | Daniel Rost
Sommersemester 2014 | Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Gegeben seien $a = 487.872$, $b = 164.052$ und $c = 7.128 \in \mathbb{Z}$.

a) Man bestimme für a, b und c jeweils die Primfaktorzerlegung sowie die Anzahl ihrer Teiler.

b) Man bestimme die größten gemeinsamen Teiler sowie die kleinsten gemeinsamen Vielfachen von je zwei bzw. allen drei Zahlen a, b und c.

Aufgabe 2. Man zeige:

a) Ist $p \geq 5$ eine Primzahl, so gilt $p = 6k \pm 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
(Tip: Welcher Rest kann sich bei Division von p durch 6 ergeben?)

b) Ist $p \geq 5$ eine Primzahl, so gilt $24 \mid (p^2 - 1)$.

c) Ist p eine Primzahl, und ist $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n < p$, so gilt $p \mid \binom{p}{n}$.

Aufgabe 3. Man bestimme alle $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß die Zahl $p := \sum_{k=1}^{n} k$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 4 (Fermatsche Zahlen). Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist die k-te *Fermat-Zahl* definiert als $F_k := 2^{2^k} + 1$.

a) Man zeige: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $F_k - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{k-1}$.
(Hinweis: Vollständige Induktion!)

b) Man folgere aus a): Für $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k \neq \ell$ sind die Zahlen F_k und F_ℓ teilerfremd.

c) Man benutze b) für einen neuen Beweis der Tatsache, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

(Aufgabe 4 vom 1. Tutoriumsblatt besagte, daß jede Primzahl der Form $2^n + 1$ sogar eine Fermat-Zahl ist; diese Tatsache spielt in dieser Aufgabe jedoch keine Rolle.)

Die Lösungen sind spätestens am **Montag, 28. April 2014, 14 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte die Angabe des eigenen Namens nicht vergessen!