Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 8. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung). Man entscheide (mit Begründung), welche der folgenden Aussagen für einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ wahr sind:

a) Ein Ereignis ist eine Menge von Ergebnissen.

b) Ein Ereignis ist ein Element von Ω.

c) Der Ereignisraum ist eine Teilmenge von Ω.

d) Ω ist eine Teilmenge des Ereignisraumes.

e) Ω selbst ist ein Ereignis.

f) Ω selbst ist ein Ergebnis.

Aufgabe 2 (Ergebnisse und Ereignisse). Es sei $\Omega := \{1,\ldots,6\}^3 = \{(a,b,c) \,|\, a,b,c \in \{1,\ldots,6\}\}$ der Ergebnisraum für das dreimalige Werfen eines Würfels. Man gebe die folgenden Ereignisse jeweils als Teilmenge von Ω an:

a) A : „Es sind mindestens zwei Einsen gefallen."

b) B : „Die Augensumme ist > 16"

c) C : „Das Produkt der drei Augenzahlen ist 45."

Aufgabe 3 (Formel von Sylvester). Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein (endlicher) Wahrscheinlichkeitsraum. Man beweise die *Formel von Sylvester* für die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung dreier Ereignisse: Für alle $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

(Anleitung: Man verwende die in der Vorlesung bewiesene Formel für die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung zweier Ereignisse. Nützlich wird auch das Distributivgesetz $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ sein.)

Aufgabe 4 (Bernoulliketten). Es sei $p \in [0,1]$ fest.

a) Es sei $\Omega = \{0,1\}^3 = \{(x_1,x_2,x_3) \,|\, x_1,x_2,x_3 \in \{0,1\}\}$ der Ergebnisraum eines dreimaligen Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Wir betrachten auf Ω das in der Vorlesung vorgestellte Wahrscheinlichkeitsmaß P gegeben durch

$$P(\{(x_1,x_2,x_3)\}) = p^{(\text{Anzahl der } i \text{ mit } x_i = 1)} \cdot (1-p)^{(\text{Anzahl der } i \text{ mit } x_i = 0)}.$$

Für jedes $k \in \{0,1,2,3\}$ gebe man das Ereignis

$$A_k : \text{„Genau } k \text{ der Zahlen } x_1, x_2, x_3 \text{ haben den Wert 1"}$$

als Teilmenge von Ω an und berechne seine Wahrscheinlichkeit $P(A_k)$.

b) Die gleiche Aufgabe für eine Bernoullikette beliebiger Länge:

Es sei $n \geq 1$, und es sei $\Omega = \{0,1\}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}\}$. Auf Ω betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß P mit

$$P(\{(x_1, \ldots, x_n)\}) = p^{(\text{Anzahl der } i \text{ mit } x_i = 1)} \cdot (1-p)^{(\text{Anzahl der } i \text{ mit } x_i = 0)}.$$

Für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ bestimme man die Wahrscheinlichkeit $P(A_k)$ des Ereignisses

A_k : „Genau k der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ haben den Wert 1“.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 16.–18. Juni 2014 behandelt.