Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 6. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Man erhält

$$\begin{aligned} z &= 720 = 2 \cdot 360 = 2 \cdot 10 \cdot 6^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ \text{und} \quad n &= 1250 = 10 \cdot 125 = 10 \cdot 5^3 = 2 \cdot 5^4. \end{aligned}$$

b) Aus a) folgt $q = \frac{z}{n} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5^4)^{-1} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{-3}$.

c) Wir müssen die Fälle $p = 2, 3, 5$ versorgen. Es ergibt sich jeweils:

$$\begin{aligned} &\text{Für } p = 2: \quad q = 2^3 \cdot \frac{3^2}{5^3} = 2^3 \cdot \frac{9}{125} \\ &\text{Für } p = 3: \quad q = 3^2 \cdot \frac{2^3}{5^3} = 3^2 \cdot \frac{8}{125} \\ &\text{Für } p = 5: \quad q = 5^{-3} \cdot \frac{2^3 \cdot 3^2}{1} = 5^{-3} \cdot \frac{72}{1} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a) *Reflexivität.* Für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ liegt $\frac{x}{x} = 1$ in $\mathbb{Q}$, also gilt $x \sim x$.

Symmetrie. Sind $x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $x \sim y$, d.h. $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, so ist auch $\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} \in \mathbb{Q}$ und damit $y \sim x$.

Transitivität. Sind $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h. $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ und $\frac{y}{z}$, so folgt $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \in \mathbb{Q}$, also $x \sim z$.

Man beachte die Ähnlichkeit dieses Beweises zu demjenigen von Aufgabe 2 a) vom 5. Tutoriumsblatt! Insbesondere ist der Umformungstrick beim Beweis der Transitivität in beiden Fällen genau der gleiche.

b) Zu untersuchen ist die folgende Situation: Sind $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^+$ mit $a \sim a'$ und $b \sim b'$, gilt dann auch $ab \sim a'b'$ (Wohldefiniertheit von „·“) bzw. $a + b \sim a' + b'$ (Wohldefiniertheit von „+“)?

Die Voraussetzung $a \sim a'$ bedeutet $\frac{a}{a'} \in \mathbb{Q}$, und ebenso bedeutet $b \sim b'$, daß $\frac{b}{b'} \in \mathbb{Q}$ ist. Dann ist aber

$$\frac{ab}{a'b'} = \underbrace{\frac{a}{a'}}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\frac{b}{b'}}_{\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q},$$

und das bedeutet genau $ab \sim a'b'$. Also liefert „·“ tatsächlich eine wohldefinierte Verknüpfung auf $\mathbb{R}^+/\sim$.

Für den Fall der Verknüpfung „+“ ist der Bruch $\frac{a+b}{a'+b'}$ zu untersuchen. Hier ist nicht zu erkennen, was sein Wert mit den Werten der Brüche $\frac{a}{a'}$ und $\frac{b}{b'}$ zu tun haben sollte (zumindest fällt mir keine geeignete Umformung ein), und wieso er in $\mathbb{Q}$ liegen sollte. Es liegt also nahe, zu vermuten, daß „+“ *keine* wohldefinierte Verknüpfung auf $\mathbb{R}^+/\sim$ liefert.

Ein Scheitern bei der Suche nach einem Beweis besagt jedoch natürlich noch nicht, daß eine Aussage falsch ist! Wir müssen also ein Gegenbeispiel suchen, also Werte für a, a', b, b' angeben, so daß zwar tatsächlich $a \sim a'$ und $b \sim b'$, jedoch $a + b \not\sim a' + b'$ gilt. Klar ist, daß wir irgendwie mit irrationalen Zahlen hantieren müssen, denn solange a, a', b, b' alle in $\mathbb{Q}$ sind, werden ihre Summen und deren Quotienten immer wieder im Körper $\mathbb{Q}$ liegen. Wir verwenden im folgenden die bekanntlich irrationale Zahl $\sqrt{2}$.

Ich wähle beispielsweise $a = a' = 1$ (dann gilt selbstverständlich $a \sim a'$) und $b = 2\sqrt{2}$ sowie $b' = \sqrt{2}$. Dann gilt $\frac{b}{b'} = 2 \in \mathbb{Q}$, also $b \sim b'$. Es ist jedoch

$$\frac{a+b}{a'+b'} = \frac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-4+\sqrt{2}}{1-2} = 3-\sqrt{2},$$

und diese Zahl liegt nicht in $\mathbb{Q}$, da sonst auch $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$ läge.

Zur Wahl der Werte: Man kommt mit fast jeder beliebigen Wahl von Werten für a, a', b, b' zum Ziel, solange man irgendwo irrationale Zahlen verwendet; nur der jeweilige Beweis der Irrationalität des sich ergebenden Wertes von $\frac{a+b}{a'+b'}$ fällt jedesmal unterschiedlich mühsam aus.

Aufgabe 3. Um auf Ideen zu kommen und eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen, lohnt es sich in jedem Fall, die Elemente der Menge M explizit aufzuschreiben.

a) Hier ist $M = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$. Die Werte scheinen alle im Intervall $]0, 1]$ zu liegen, wobei 1 der größte der Werte ist und nach unten die Werte immer näher an 0 heranzukommen scheinen. Es sieht also so aus, als sei $\sup M = 1$ (und als sei dies tatsächlich ein Maximum) und $\inf M = 0$ (und als sei dies *kein* Minimum).

   Ein formaler Beweis könnte so aussehen:

   - Supremum: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n \geq 1$ und damit $n^2 \geq 1 \cdot 1 = 1$, d.h. $\frac{1}{n^2} \leq 1$. Dies zeigt, daß 1 eine obere Schranke von M ist. Wegen $1 \in M$ ist keine kleinere Zahl als 1 obere Schranke von M, also ist $1 = \sup M$ und sogar $1 = \max M$.

     (Dies gilt allgemein: Ist eine bestimmte obere Schranke in der betrachteten Menge vorhanden, so ist diese Schranke bereits Supremum und *de facto* Maximum.)

   - Infimum: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist sicher $\frac{1}{n^2} > 0$, also ist 0 eine untere Schranke von M. Ich behaupte, daß keine größere Zahl als 0 noch eine untere Schranke für M ist: Denn ist $\varepsilon > 0$ (vorzustellen als „sehr kleine Zahl") vorgegeben, so behaupte ich die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$. Dies ist äquivalent zu $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, und diese Ungleichung können wir tatsächlich erfüllen: Nach dem archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$; dann ist aber auch $n^2 \geq n > \frac{1}{\varepsilon}$, und das bedeutet (wie schon gezeigt) $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$.
     Also ist $0 = \inf M$; wegen $0 \notin M$ ist dieses Infimum *kein* Minimum.

b) Hier ist $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$. Die Werte liegen offenbar alle im Intervall $[0, 1[$, wobei $\frac{1}{2}$ der kleinste der Werte ist und die Werte immer näher an 1 heranzukommen scheinen. Es ist also zu vermuten, daß $\inf M = \frac{1}{2}$ (und dies tatsächlich ein Minimum) ist, und daß $\sup M = 1$ (und kein Maximum) ist.

   Formaler Beweis:

   - Infimum: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2n \geq n+1 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 1,$$

und da die letzte Aussage (also auch die erste) stets erfüllt ist, ist $\frac{1}{2}$ tatsächlich eine untere Schranke für M. Da $\frac{1}{2} \in M$ ist, kann es keine größere untere Schranke geben, also folgt $\inf M = \frac{1}{2}$, und dies ist tatsächlich ein Minimum.

- Supremum: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n}{n+1} < 1$ wegen $n < n+1$, also ist 1 eine obere Schranke von M. Es ist zu beweisen, daß es keine kleinere obere Schranke für M gibt. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig (vorzustellen als „sehr kleine Zahl"); wir müssen zeigen, daß es in M größere Zahlen als $1-\varepsilon$ gibt. Aber für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad (\ldots\text{umformen}\ldots) \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

  und nach dem archimedischen Axiom gibt es tatsächlich, zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$, stets eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, die größer ist als $\frac{1}{\varepsilon} - 1$. Für dieses n gilt dann $\frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon$, und das zeigt, daß $1-\varepsilon$ *keine* obere Schranke von M ist.

  Also ist $1 = \sup M$; da aber $1 \notin M$ gilt (sonst wäre $\frac{n}{n+1} = 1$ für ein n, also $n = n+1$, d.h. $0 = 1$), ist dies kein Maximum.

c) Hier ist $M = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$; der einzige Unterschied zur in b) betrachteten Menge besteht darin, daß nun M zusätzlich die Zahl 0 enthält. Dies sorgt dafür, daß $\inf M = 0$ ist (und dies ist ein Minimum); an der Tatsache, daß $\sup M = 1$ ist (und dies kein Maximum ist), ändert sich nichts.

Aufgabe 4. Zum Beweis der Äquivalenz von mehr als zwei Aussagen gibt es prinzipiell mehrere Wege: Beispielsweise kann man direkt die Äquivalenzen „a) $\Longleftrightarrow$ b)" und „b) $\Longleftrightarrow$ c)" nachweisen. Der effizienteste Weg mit den wenigsten anfallenden Beweisrichtungen ist oft der „Schluß im Kreis" der Form „a) $\Longrightarrow$ b)", „b) $\Longrightarrow$ c)" und „c) $\Longrightarrow$ a)". Ihn verwenden wir im folgenden.

„a) $\Longrightarrow$ b)". Angenommen, a) ist erfüllt. Ist $x \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, so gibt es laut a) ein $n \in N$ mit $n \cdot 1 > x$, also $n > x$, und dies beweist b).

„b) $\Longrightarrow$ c)". Angenommen, b) ist erfüllt. Ist $y \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, so gibt es laut b) ein $n \in N$ mit $n > \frac{1}{y}$. Aber dann ist $\frac{1}{n} < y$, und dies beweist c).

„c) $\Longrightarrow$ a)". Angenommen, c) ist erfüllt. Sind $x, y \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, so gibt es laut c) ein $n \in N$ mit $\frac{1}{n} < \frac{y}{x}$. Dann ist aber $x < ny$, und dies beweist a).