Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II – 6. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Brüche und Primfaktorzerlegungen). Man betrachte die rationale Zahl $q = \frac{720}{1250} \in \mathbb{Q}$.

a) Man bestimme die Primfaktorzerlegung von $z = 720$ sowie von $n = 1250$.

b) Man bestimme mittels a) die Darstellung von q mittels Primzahlen und ganzzahligen Exponenten.

c) Für jede in b) aufgetretene Primzahl p ermittele man die Darstellung von q in der Form

$$q = p^e \cdot \frac{z_0}{n_0} \quad \text{mit } e \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\, z_0 \in \mathbb{Z},\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ und } p \nmid z_0 \text{ sowie } p \nmid n_0.$$

Aufgabe 2 (Äquivalenzklassen). Auf der Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen betrachte man die Relation R mit

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^+.$$

a) Man zeige, daß R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^+$ ist.

b) Man entscheide, welche der der Verknüpfungen

$$„[a] + [b] := [a+b]“ \quad \text{und} \quad „[a] \cdot [b] := [ab]“$$

auf $\mathbb{R}^+/\!\sim$ wohldefiniert ist, und begründe die Entscheidung.

Aufgabe 3 (Infimum und Supremum). Man bestimme $\inf M$ und $\sup M$ für

a) $M = \left\{ \frac{1}{n^2} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ b) $M = \left\{ \frac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ c) $M = \left\{ \frac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$

und entscheide jeweils, ob es sich um ein Minimum bzw. Maximum handelt.

Aufgabe 4 (zum Archimedischen Axiom). Man zeige, daß für eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $n \in N$ mit $n \cdot y > x$.

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $n \in N$ mit $n > x$.

c) Für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $n \in N$ mit $\frac{1}{n} < y$.

Daß diese äquivalenten Aussagen im Fall $N = \mathbb{N}$ *wahr* sind, ist genau das „Archimedische Axiom“ für den Körper $\mathbb{R}$.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 26.–28. Mai 2014 behandelt.