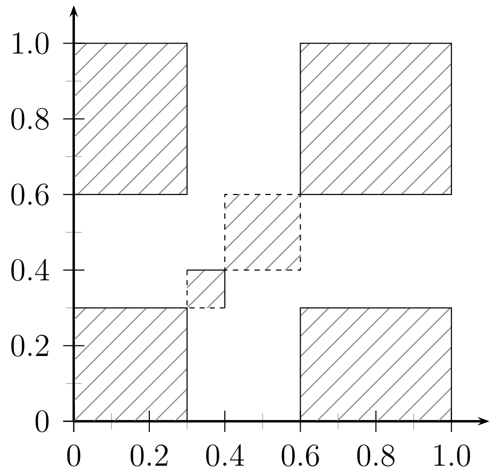
Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 5. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1. Wie im entsprechenden Beispiel der Vorlesung (9.9) erhält man die folgende Gestalt:



Aufgabe 2.

a) *Reflexivität.* Für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ ist $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, also $x \sim x$.

   Symmetrie. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $x \sim y$, also $x - y \in \mathbb{Z}$, gilt $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$ und damit $y \sim x$.

   Transitivität. Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, also $x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - z \in \mathbb{Z}$, gilt $x - z = \underbrace{(x - y)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(y - z)}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$, also $x \sim z$.

b) Für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt genau dann $x \sim 1$, wenn $x - 1 \in \mathbb{Z}$ gilt, und dies ist äquivalent zu $x \in \mathbb{Z}$. Also ist $[1] = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

   Für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt genau dann $x \sim 0{,}25$, wenn $x - 0{,}25 \in \mathbb{Z}$ ist, wenn es also ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x = k + 0{,}25$. Also ist $[0{,}25] = \{0{,}25,\ 1{,}25,\ 2{,}25,\ \dots\}$.

c) Für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $x \in [7{,}2] \iff x - 7{,}2 \in \mathbb{Z} \iff x - 7 - 0{,}2 \in \mathbb{Z} \iff x - 0{,}2 \in \mathbb{Z}$, und dies ist äquivalent dazu, daß es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x = k + 0{,}2$. Damit ist $[7{,}2] = \{0{,}2,\ 1{,}2,\ 2{,}2,\ \dots\}$, und der kleinste Repräsentant dieser Äquivalenzklasse ist $0{,}2$.

Aufgabe 3.

a) *Reflexivität.* Für jedes $x \in M$ ist $x \sim x$ wegen $f(x) = f(x)$.

   Symmetrie. Für alle $x, y \in M$ mit $x \sim y$, also $f(x) = f(y)$, gilt natürlich auch $f(y) = f(x)$, also $y \sim x$.

   Transitivität. Für alle $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, also $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$, gilt auch $f(x) = f(y) = f(z)$, also $x \sim z$.

b) Es ist genau dann jede Äquivalenzklasse einelementig, wenn für alle $x, y \in M$ aus $x \sim y$ bereits $x = y$ folgt, wenn also aus $f(x) = f(y)$ bereits $x = y$ folgt. Dies ist nach Definition des Begriffes genau dann der Fall, wenn f *injektiv* ist.

Aufgabe 4. Es ist zu zeigen, daß für alle Elemente $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ (also $a, c, e \in \mathbb{Z}$ und $b, d, f \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) gilt

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}.$$

Dazu ist es am einfachsten, von jeder der beiden behaupteten Beziehungen sowohl die linke als auch die rechte Seite gemäß der Definition auszurechnen und zu überprüfen, daß die Ergebnisse übereinstimmen. Ans Werk denn:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df} = \frac{a(df) + b(cf + de)}{b(df)} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf},$$
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{(ad + bc)f + (bd)e}{(bd)f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$$

Die beiden Ergebnisse stimmen überein, und damit ist die Assoziativität von „+“ bewiesen.
Ebenso für die Multiplikation:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{ce}{df} = \frac{a(ce)}{b(df)} = \frac{ace}{bdf},$$
$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd}\frac{e}{f} = \frac{(ac)e}{(bd)f} = \frac{ace}{bdf}.$$

Beide Ergebnisse stimmen überein, und dies beweist die Assoziativität von „·“.

Man kann noch bemerken, daß die Ergebnisse tatsächlich sogar als „Paare von Zähler und Nenner“ übereinstimmen, also als Elemente von $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, und nicht erst als Klassen in $M/\sim\, = \mathbb{Q}$. Zur Veranschaulichung: Es wäre ja prinzipiell denkbar, daß beim Ausrechnen beider Seiten der Assoziativitätsgleichung nicht zweimal exakt der gleiche Bruch herauskommt, sondern zwei verschiedene Brüche, die erst nach Kürzen erkennen lassen, daß sie den gleichen Wert haben, also beispielsweise

$$\frac{3ace}{3bdf} \quad \text{und} \quad \frac{acef}{bdf^2}.$$

In diesem Fall wären zwar die Elemente $(3ace, 3bdf)$ und $(acef, bdf^2)$ von M verschieden, ihre Klassen $[(3ace, 3bdf)]$ und $[(acef, bdf^2)]$ in $\mathbb{Q} = M/\sim$ jedoch gleich. In unserer Rechnung ist dies nicht passiert. Im Prinzip beweist dies, daß die entsprechend definierten Operationen $+$ und $\cdot$ auch assoziative Verknüpfungen auf der Menge M ergeben. Allerdings ist $(M, +, \cdot)$ kein Körper; warum nicht?