Mathematisches Institut der Universität München
Sommersemester 2014

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Grundlagen der Mathematik II
Lösungsvorschlag zum 11. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Die Standardmethode ist das Erweitern des Bruchs $\frac{1}{z}$ mit der komplex Konjugierten $\overline{z}$: Dies ergibt (unter Verwendung von $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$)

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

b) Es ist

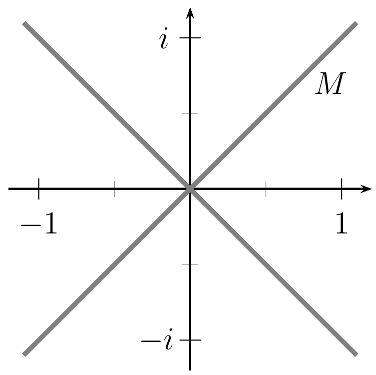
$$\begin{aligned} w = \frac{1+i}{r-i} &= \frac{(1+i)\cdot(r+i)}{(r-i)\cdot(r+i)} = \frac{r-1+(1+r)i}{r^2+1} \\ &= \frac{r-1}{r^2+1} + \frac{r+1}{r^2+1}i. \end{aligned}$$

Diese Zahl ist genau dann reell, wenn $r+1=0$, also $r=-1$ ist, und dann ist $w = \frac{-1-1}{1^2+1} = -1$. Sie ist genau dann rein imaginär, wenn $r-1=0$, also $r=1$ ist, und dann ist $w = \frac{2}{1^2+1}i = i$.

c) Für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ist $z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi$, also $\operatorname{Re}(z^2) = x^2-y^2$. Damit gilt

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(z^2) = 0 \\ \iff\ & x^2 - y^2 = 0 \\ \iff\ & x^2 = y^2 \\ \iff\ & y = \pm x. \end{aligned}$$

Damit besteht M aus allen Vielfachen der Zahlen $1+i$ und $1-i$:



d) Wir haben keine Lösungsformel für eine Polynomgleichung 4. Grades (obwohl eine solche existiert, die allerdings ziemlich kompliziert ist). Wir kommen jedoch auch ohne Lösungsformel zum Ziel: Entweder man rät Nullstellen (man hat hier gute Chancen, immerhin zwei der Nullstellen zu erraten), oder man formt geschickt mit Hilfe der Binomischen Formel um:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} z^4 + 2z^3 + z^2 - 2z - 2 \\ &= z^2 \cdot (z^2 + 2z + 1) - 2(z+1) \\ &= z^2 \cdot (z+1)^2 - 2(z+1) \\ &= (z+1) \cdot \left(z^2 \cdot (z+1) - 2\right). \end{aligned}$$

Damit erkennt man, daß $z_1 = -1$ schon einmal eine Lösung der Gleichung ist. Für eine weitere Lösung hilft die Beobachtung, daß der zweite Faktor $z^2 \cdot (z+1) - 2$ für $z_2 = 1$ verschwindet! Eine Polynomdivision ergibt nun

$$\frac{z^2 \cdot (z+1) - 2}{z-1} = \frac{z^3 + z^2 - 2}{z-1} = \ldots = z^2 + 2z + 2,$$

und die Nullstellen dieses quadratischen Faktors erhalten wir mit der quadratischen Lösungsformel:

$$z_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Also sind $z_3 := -1 + i$ und $z_4 := -1 - i$ die beiden letzten Lösungen der Gleichung.

(Allgemein besagt ja der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra*, daß eine Polynomgleichung 4. Grades tatsächlich stets genau 4 Lösungen in $\mathbb{C}$ haben muß, die allerdings nicht alle voneinander verschieden sein müssen: Beispielsweise hat ja das Polynom z^4 nur eine einzige Nullstelle, nämlich 0, die vierfach zählt.)

Aufgabe 2.

a) Es ist

$$\begin{aligned}
z + w &= (1+2i) + (1-i) = 2 + i, \\
z - w &= (1+2i) - (1-i) = 3i, \\
z \cdot w &= (1+2i) \cdot (1-i) = 1 + 2i - i - 2i^2 = 3 + i, \\
\frac{z}{w} &= \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i+2i^2}{1^2+1^2} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \\
\frac{w}{z} &= \frac{1-i}{1+2i} = \frac{(1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-i-2i+2i^2}{1^2+2^2} = \frac{-1-3i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.
\end{aligned}$$

b) Die Gleichung ist sinnvoll, wenn der Nenner beider Brüche nicht verschwindet. Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite ist die komplexe Zahl $4 - i \neq 0$ und macht also keine Probleme. Für den Nenner auf der linken Seite gilt

$$\begin{aligned}
& 2 + 2 \cdot z - 3i = 0 \\
\iff \quad & 2 \cdot z = -2 + 3i \\
\iff \quad & z = -1 + \frac{3}{2}i.
\end{aligned}$$

Die Definitionsmenge der Gleichung ist also $M := \mathbb{C} \setminus \left\{-1 + \frac{3}{2}i\right\}$. Für jedes $z \in M$ gilt nun

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - i + i \cdot z}{2 + 2 \cdot z - 3i} = \frac{3+i}{4-i} \\
\iff \quad & \frac{1 - i + i \cdot z}{(2-3i) + 2 \cdot z} = \frac{3+i}{4-i} \\
\iff \quad & (1 - i + i \cdot z) \cdot (4 - i) = (3 + i) \cdot ((2 - 3i) + 2 \cdot z) \\
\iff \quad & \vdots \\
\iff \quad & 3 - 5i + (1 + 4i) \cdot z = 9 - 7i + (6 + 2i) \cdot z \\
\iff \quad & -6 + 2i = (5 - 2i) \cdot z \\
\iff \quad & z = \frac{-6+2i}{5-2i} = \frac{(-6+2i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \ldots = -\frac{34}{29} - \frac{2}{29}i.
\end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge $L = \left\{-\frac{34}{29} - \frac{2}{29}i\right\}$.

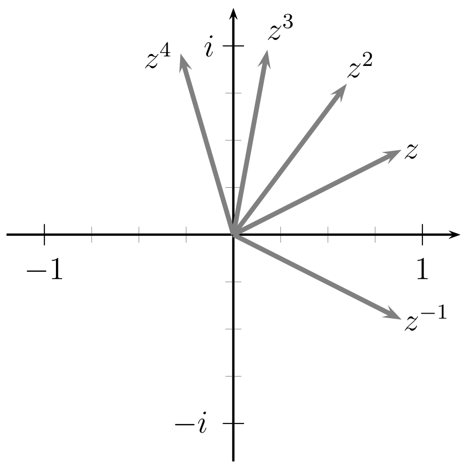
Entschuldigende Bemerkung: Selbstverständlich ist dieses Resultat vollkommen gleichgültig. Die Aufgabe ist eine reine Übung im Rechnen mit komplexen Zahlen; anders gesagt: Der Weg ist das Ziel!

Aufgabe 3.

a) Es ist

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2+i) \approx 0{,}89 + 0{,}45i, \\ z^2 &= \frac{(2+i)^2}{5} = \frac{4-1+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = 0{,}6 + 0{,}8i, \\ z^3 &= z \cdot z^2 = \frac{2+i}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3+4i}{5} = \frac{2+11i}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} + \frac{11}{5\sqrt{5}}i \approx 0{,}18 + 0{,}98i, \\ z^4 &= (z^2)^2 = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^2 = \frac{-7+24i}{25} = -\frac{7}{25} + \frac{24}{25}i = -0{,}28 + 0{,}96i, \\ z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{5}}{2+i} = \frac{\sqrt{5}\cdot(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{\sqrt{5}\cdot(2-i)}{5} = \frac{2-i}{5} = \overline{z} \approx 0{,}89 - 0{,}45i. \end{aligned}$$

In der Gaußschen Zahlenebene zeichne ich diese Zahlen als Vektoren; genausogut könnte man aber nur Punkte (an den Spitzen der Vektorpfeile) markieren:



Hier kann man erkennen:

- Die Vektorpfeile sind alle gleich lang. Dies liegt daran, daß $|z| = 1$ ist, wie man leicht nachrechnen kann, und dann ist $|z^n| = |z|^n = 1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ nach einer Rechenregel für den Absolutbetrag einer komplexen Zahl.
- Die jeweils nächsthöhere Potenz von z ergibt sich aus der vorangehenden, indem man den Vektorpfeil um einen bestimmten Winkel „weiterdreht". Später wird sich herausstellen, daß die Multiplikation komplexer Zahlen stets als (Multiplikation der Vektorlängen und) Addition von Winkeln aufgefaßt werden kann.
- Für unsere Zahl z gilt $z^{-1} = \overline{z}$ ist. Dies gilt für eine komplexe Zahl genau dann, wenn $|z| = 1$ ist (wie man an der Beziehung $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ erkennen kann).

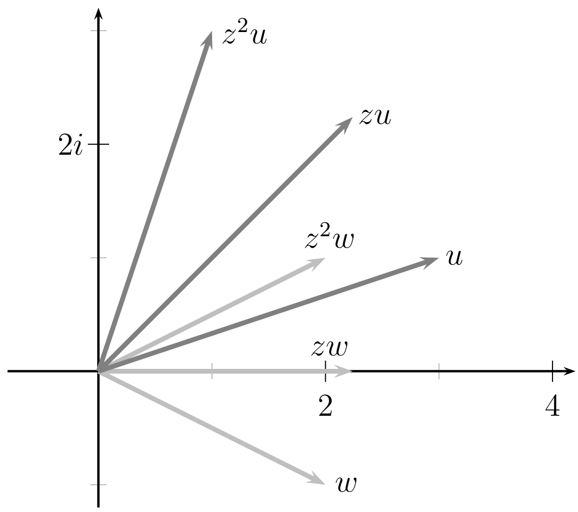
b) Ähnlich wie in a) erhalten wir

$$\begin{aligned} w &= 2 - i, \\ z \cdot w &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2+i)(2-i) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (4+1) = \sqrt{5} \approx 2{,}24, \\ z^2 \cdot w &= z \cdot (z \cdot w) = z \cdot \sqrt{5} = 2 + i, \end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
u &= 3+i,\\
z\cdot u &= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(2+i)(3+i) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(5+5i) = \sqrt{5}\cdot(1+i) \approx 2{,}24+2{,}24i,\\
z^2\cdot u &= z\cdot(z\cdot u) = z\cdot\sqrt{5}\cdot(1+i) = (2+i)\cdot(1+i) = 1+3i,
\end{aligned}
$$

wodurch sich folgendes Bild in der Gaußschen Zahlenebene ergibt:



Man sieht also, daß die Vektoren (komplexen Zahlen) zw, z^2w genauso lang sind wie der Vektor w, nur um einen gewissen Winkel gegen den Uhrzeigersinn gedreht. (Und dieser Winkel ist genau derjenige zwischen dem Vektor z und der reellen, d.h. der „x-Achse", vgl. das Bild zu a).) Das gleiche gilt für die Vektoren zu, z^2u im Vergleich zu u.

Aufgabe 4. Für jedes $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{1}{|z-1|^2}\cdot(z+1)\cdot\overline{z-1}\\
&= \frac{1}{|x-1+iy|^2}\cdot(x+1+iy)\cdot(x-1-iy)\\
&= \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\cdot(x^2-(1+iy)^2)\\
&= \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\cdot(x^2-1-2iy+y^2)\\
&= \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\cdot(x^2+y^2-1-2iy).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) &= \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2},\\
\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) &= \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

Also können wir rechnen:

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} \geq 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2+y^2-1 \geq 2\left((x-1)^2+y^2\right) \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2+y^2-1 \geq 2x^2-4x+2+2y^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \geq x^2-4x+3+y^2 \qquad \textit{(Quadratische Ergänzung \dots)} \\
\Longleftrightarrow \quad & 1 \geq x^2-4x+4+y^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & 1 \geq (x-2)^2+y^2.
\end{aligned}
$$

Damit ist M_1 in der Gaußschen Zahlenebene die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(2,0)=2$ und Radius 1, allerdings ohne den Randpunkt 1.
Ebenso rechnen wir

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} \geq 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & -2y \geq 2\left((x-1)^2+y^2\right) \\
\Longleftrightarrow \quad & -y \geq (x-1)^2+y^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \geq (x-1)^2+y^2+y \qquad \textit{(Quadratische Ergänzung \dots)} \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Damit ist M_2 in der Gaußschen Zahlenebene die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(1,-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}i$ und Radius $\frac{1}{2}$, allerdings ohne den Randpunkt 1.
In der Gaußschen Zahlenebene ergibt sich damit das folgende Bild: