

Grundlagen der Mathematik II – 11. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Für $z := 2 + 3i \in \mathbb{C}$ berechne man $\frac{1}{z}$. (Damit ist gemeint: Man finde $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{z} = a + bi$, d.h. $a = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ und $b = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$.)

b) Man bestimme alle $r \in \mathbb{R}$, für die die komplexe Zahl $w = \frac{1+i}{r-i}$ *reell* bzw. *rein imaginär* ist, und gebe in beiden Fällen w explizit an.

c) Man skizziere die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) = 0\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.

d) Über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen ermittle man alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 + 2z^3 + z^2 - 2z - 2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Aufgabe 2.

a) Man berechne für $z = 1 + 2i$ und $w = 1 - i \in \mathbb{C}$ die komplexen Zahlen $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, $\frac{z}{w}$ und $\frac{w}{z}$.

b) Man gebe über der Grundmenge \mathbb{C} die Definitionsmenge der Gleichung

$$\frac{1 - i + i \cdot z}{2 + 2 \cdot z - 3i} \stackrel{!}{=} \frac{3 + i}{4 - i}$$

an und bestimme ihre Lösungsmenge.

Aufgabe 3. Es sei $z := \frac{1}{\sqrt{5}}(2 + i) \in \mathbb{C}$.

a) Man berechne z^2 , z^3 , z^4 und z^{-1} und zeichne diese Werte in der Gaußschen Zahlenebene ein. Was fällt auf?

b) Für $w := 2 - i$ und $u := 3 + i$ zeichne man w , zw , z^2w sowie u , zu , z^2u in der Gaußschen Zahlenebene ein. Was fällt auf?

Aufgabe 4. Man bestimme mit Hilfe der Darstellung $z = x + iy$ die Elemente der Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2 \right\} \quad \text{sowie} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2 \right\}$$

und skizziere M_1 und M_2 in der Gaußschen Zahlenebene.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 7.–9. Juli 2014 behandelt.