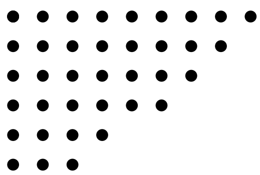
Der Eulersche Pentagonalzahlensatz

Ruth Jeckle & Lukas-Fabian Moser, SS 2013

Partitionen und der Pentagonalzahlensatz

Für eine natürliche Zahl $n \geqslant 1$ bezeichnen wir mit $\overline{p}(n)$ die Anzahl der Partitionen von n in *verschiedene* Summanden. Jede solche Partition läßt sich durch ihr *Ferrers-Diagramm* darstellen:



Dabei drückt sich die Verschiedenheit der Summanden in der Partition dadurch aus, daß die Länge der Zeilen des Diagramms von oben nach unten nicht nur *monoton*, sondern sogar *strikt monoton* abnimmt; wir wollen diese Eigenschaft als *Zulässigkeit* eines Ferrers-Diagramms bezeichnen. Zu jeder Partition $n = a_1 + \cdots + a_k$ von n mit dem Ferrers-Diagramm F bezeichnen wir mit $k = k(F)$ die Anzahl der Summanden der Partition, also die Anzahl der Zeilen von F.

Fixieren wir nun die Zahl n, und bezeichnen wir mit $\mathscr{F}_n$ die Menge aller Ferrers-Diagramme von Partitionen von n in lauter verschiedene Summanden. Dann ist $|\mathscr{F}| = \overline{p}(n)$. Definieren wir die Teilmengen

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_n^g &:= \{F \in \mathscr{F}_n \mid k(F) \text{ gerade}\} \\ \text{und} \quad \mathscr{F}_n^u &:= \{F \in \mathscr{F}_n \mid k(F) \text{ ungerade}\}\,, \end{aligned}$$

die den Partitionen von n in geradzahlig bzw. ungeradzahlig viele verschiedene Summanden entsprechen, und setzen wir $\overline{p}_g(n) := |\mathscr{F}_n^g|$ sowie $\overline{p}_u(n) := |\mathscr{F}_n^u|$. Dann ist also $\overline{p}_g(n) + \overline{p}_u(n) = \overline{p}(n)$.

Satz (Eulerscher Pentagonalzahlensatz)**.** *Für jedes $n \geqslant 1$ ist*

$$\overline{p}_g(n) - \overline{p}_u(n) = \begin{cases} (-1)^k & \textit{falls } n = \frac{k\cdot(3k\pm 1)}{2}, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Der Name des Satzes erklärt sich daraus, daß die Zahlen der Form $\frac{1}{2}k\cdot(3k\pm1)$ als *Pentagonalzahlen* bekannt sind; mit ihnen läßt sich u.a. berechnen, wieviele Karten zum Bau eines Kartenhauses benötigt werden…

Eine Anwendung: Die Rekursionsformel für Partitionszahlen

Zur Motivation skizzieren wir eine Anwendung des Pentagonalzahlensatzes: Zur Partitionsfunktion $p(n)$ (die die Anzahl der Partitionen von n in *nicht notwendig verschiedene* Summanden angibt) betrachten wir ihre sogenannte *erzeugende Funktion*, also die Potenzreihe

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$$

(die man sich, zur Umgehung von hier eigentlich irrelevanten Konvergenzfragen, als *formale* Potenzreihe denken kann[1]). Es ist nicht schwer einzusehen, daß

$$F = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{kn}\right) = \prod_{n\geqslant 1}\frac{1}{1-x^n}$$

gilt.[2] Daraus folgt aber für die Funktion $\mathscr{E} := \frac{1}{F}$ die Beziehung

$$\mathscr{E} = \frac{1}{F} = \prod_{n\geqslant 1}(1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\overline{p}^g(n) - \overline{p}^u(n))\cdot x^n,$$

denn beim Ausmultiplizieren des Produkts in der letzten Gleichung erhalten wir einen Summanden vom Grad n für jedes Produkt der Form

$$(-x^{n_1})\cdot\ldots\cdot(-x^{n_k}) = (-1)^k\cdot x^n$$

mit $n_1 < \ldots < n_k$ und $n_1 + \cdots + n_k = n$. Unser Satz besagt also

$$\mathscr{E} = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \ldots,$$

woraus sich (durch Koeffizientenvergleich in der Beziehung $\mathscr{E}\cdot F = 1$) die berühmte *Rekursionsformel für die Partitionszahlen* ergibt:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \ldots,$$

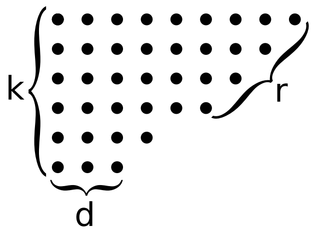
wobei $p(0) = 1$ und $p(n) := 0$ für $n < 0$ gilt.

[1] Eine formale Potenzreihe verhält sich zu einer Potenzreihe, wie sie in Analysis-1-Büchern auftaucht, wie ein Polynom zu einer Polynomfunktion.

[2] Auch die evtl. etwas unklare Bedeutung der hier auftretenden unendlichen Produkte läßt sich durch das Rechnen mit formalen Potenzreihen klären.

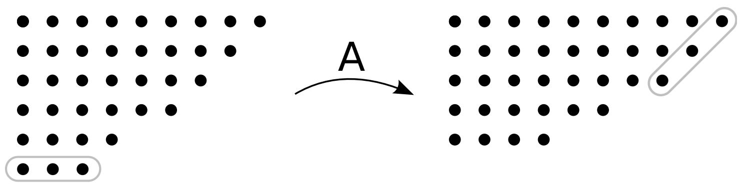
Beweis des Pentagonalzahlensatzes

Zum Beweis ordnen wir jedem Ferrers-Diagramm F neben $k = k(F)$ zwei weitere Kennzahlen $d = d(F)$ und $r = r(F)$ zu:



Es ist also d die Länge der letzten Zeile und r (mit $1 \leqslant r \leqslant k$) die Anzahl von Zeilen, deren Länge ab der ersten Zeile ununterbrochen in Einerschritten abnimmt; ist $n = a_1 + \cdots + a_k$ die zu F gehörende Partition mit $a_1 > a_2 > \cdots > a_k$, so ist also $d = a_k$ und r diejenige Zahl mit $a_1 - a_2 = \ldots = a_{r-1} - a_r = 1$ und (falls $r < k$) $a_r - a_{r+1} \geqslant 2$.

Betrachte nun die folgende Operation A auf den Ferrers-Diagrammen:



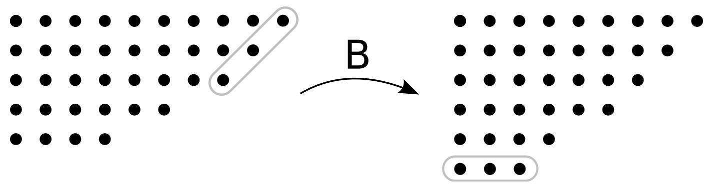
Sie ist offensichtlich nur für ein Diagramm F sinnvoll ausführbar, das die Ungleichung $d(F) \leqslant r(F)$ erfüllt. Etwas subtiler ist die zweite Bedingung, daß auch $d(F) \leqslant k(F) - 1$ sein muß. Setzen wir

$$\mathscr{F}_n^1 := \{F \in \mathscr{F}_n \mid d(F) \leqslant r(F) \text{ und } d(F) \leqslant k(F) - 1\}\,,$$

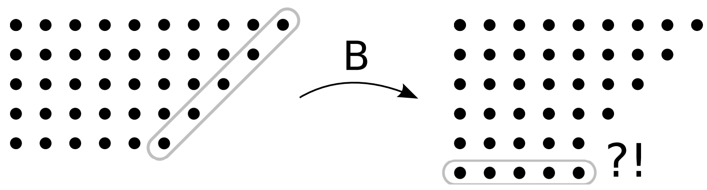
so ist A also eine wohldefinierte Abbildung $\mathscr{F}_n^1 \to \mathscr{F}_n$, und für $F \in \mathscr{F}_n^1$ hat das zulässige Ferrers-Diagramm $AF := A(F)$ die Kennzahlen

$$\begin{aligned} k(AF) &= k(F) - 1, \\ d(AF) &> d(F), \\ r(AF) &= d(F). \end{aligned}$$

Ebenso definieren wir eine zweite Operation B auf den Ferrers-Diagrammen, die wir uns als invers zu A vorstellen sollten:



Sie ist für ein Diagramm F ausführbar, für das $d(F) > r(F)$ ist. Auch hier gibt es aber eine subtilere Bedingung: Ist nämlich $r(F) = k(F)$, so muß sogar $d(F) > r(F) + 1$ sein, weil sonst eine Situation wie im folgenden Bild auftritt:



(Es sind auch noch krassere Abweichungen von der Zulässigkeit im Bilddiagramm als in unserer Abbildung möglich.) Definieren wir also

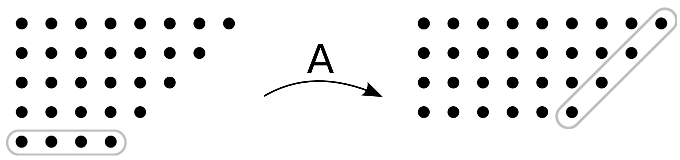
$$\mathscr{F}_n^2 := \{F \in \mathscr{F}_n \,|\, d(F) > r(F) \text{ und, falls } r(F) = k(F), \text{ sogar } d(F) > r(F) + 1\}\,.$$

Dann ist B eine wohldefinierte Abbildung $\mathscr{F}_n^2 \to \mathscr{F}_n$, und für $F \in \mathscr{F}_n^2$ hat das zulässige Ferrers-Diagramm $BF := B(F)$ die Kennzahlen

$$\begin{aligned} k(BF) &= k(F) + 1, \\ d(BF) &= r(F), \\ r(BF) &\geqslant r(F). \end{aligned}$$

Lemma. *Das Bild der Abbildung $A : \mathscr{F}_n^1 \to \mathscr{F}_n$ liegt in $\mathscr{F}_n^2$, und das Bild der Abbildung $B : \mathscr{F}_n^2 \to \mathscr{F}_n$ liegt in $\mathscr{F}_n^1$.*

Beweis des Lemmas. Es sei $F \in \mathscr{F}_n^1$ und $G := AF$. Wir müssen zeigen, daß $d(G) > r(G)$ und, falls $r(G) = k(G)$, dann sogar $d(G) > r(G) + 1$. Die erste Ungleichung ergibt sich unmittelbar aus $d(G) > d(F)$ und $r(G) = d(F)$. Ist nun sogar $r(G) = k(G)$, also $d(F) = k(F) - 1$, so erkennt man an der Konstruktion von A, daß sogar $d(G) > r(G) + 1$ gilt wie in der folgenden Abbildung:



Es sei nun umgekehrt $F \in \mathscr{F}_n^2$ und $G := BF$. Wir müssen zeigen, daß $d(G) \leqslant r(G)$ und $d(G) \leqslant k(G) - 1$ gilt. Aber die erste Ungleichung ergibt unmittelbar aus $d(G) = r(F)$ und $r(G) \geqslant r(F)$, die zweite aus $k(G) = k(F) + 1$, $d(G) = r(F)$ und $r(F) \leqslant k(F)$. $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus dem Lemma ergibt sich, daß A und B inverse Bijektionen zwischen $\mathscr{F}_n^1$ und $\mathscr{F}_n^2$ definieren. Da aber beide Abbildungen ein Diagramm geradzahlig vielen Zeilen in eines mit ungeradzahlig vielen Zeilen verwandeln (und umgekehrt), folgt, daß in $\mathscr{F}_n^1$ ebensoviele Diagramme mit gerader Zeilenzahl existieren wie Diagramme in $\mathscr{F}_n^2$ mit ungerader Zeilenzahl und umgekehrt. Für die Menge $\overline{\mathscr{F}}_n := \mathscr{F}_n^1 \cup \mathscr{F}_n^2$ gilt also

$$\left|\overline{\mathscr{F}}_n \cap \mathscr{F}_n^u\right| = \left|\overline{\mathscr{F}}_n \cap \mathscr{F}_n^g\right|.$$

Wir müssen uns also zum Beweis des Satzes nur noch um die Menge $\mathscr{F}_n \setminus \overline{\mathscr{F}}_n$ kümmern. Ein Diagramm F liegt aber genau dann in dieser Menge, wenn einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

i) Es ist $d \leqslant r$, aber $d \geqslant k$. Dann ist $r \geqslant d \geqslant k \geqslant r$, also $r = d = k$, so daß die zu F gehörende Partition, von unten nach oben addiert, die Form hat:

$$n = k + (k+1) + \ldots + (k + k - 1) = k \cdot \frac{2k - 1 + k}{2} = \frac{k \cdot (3k-1)}{2}.$$

ii) Es ist $d > r$ und gleichzeitig $r = k$, jedoch $d \leqslant r + 1$. Dann haben wir also $r < d \leqslant r + 1$, d.h. $d = r + 1 = k + 1$. Dann hat die zu F gehörende Partition die Form

$$n = (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+k) = k \cdot \frac{2k + k + 1}{2} = \frac{k \cdot (3k+1)}{2}.$$

Diese Fälle treten also nur für ganz bestimmte Werte von n auf, und für jeden gibt es nur ein einziges Diagramm dieser Art. Da außerdem in beiden Fällen das Diagramm genau k Zeilen hat, ist der Satz damit bewiesen.