MATHEMATISCHES INSTITUT
DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Diplomarbeit

Elliptische Regularitätstheorie partieller Differentialgleichungen

vorgelegt von

Markus Zmora

Betreuer: Prof.László Erdös Ph.D

Eingereicht am:

22.Juni 2009

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst, und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfmittel benutzt habe. Diese Arbeit wurde noch nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

München, 22.Juni 2009.

Einleitung

Auf der Suche nach klassischen Lösungen partieller Differentialgleichungen stößt man auf direktem Weg schnell an seine Grenzen, wenn man die Differenzierbarkeit durchgehend fordert.
Führt man jedoch den Begriff der „schwachen Ableitung“ ein, so bringt das mehrere Vorteile mit sich. Zum einen lässt sich jede lokal integrierbare Funktion beliebig oft schwach differenzieren und es gelten dabei analoge Vorschriften zu den klassischen Ableitungsregeln. Außerdem können schwache Lösungen leichter gefunden werden, wobei dieser Begriff einerseits intuitiv verständlich zu seien scheint, andererseits noch genau definiert werden muss.
Die Regularitätstheorie erlaubt es nun, diese zu analysieren und sie unter bestimmten Umständen schließlich als klassische Lösungen partieller Differentialgleichungen zu identifizieren. Sei beispielsweise u eine schwache Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$, wobei f eine glatte Funktion ist und u zusammen mit seinen ersten schwachen partiellen Ableitungen quadratintegrierbar ist. Mithilfe der Regularitätstheorie zeigt man, dass auch u eine glatte Funktion sein muss.

Diese Arbeit gibt zunächst eine Einführung in das Gebiet der Sobolevräume. Mit diesen Räumen werden jeweils bestimmte Klassen schwach differenzierbarer Funktionen zusammengefasst. Nach der Ausarbeitung einiger Eigenschaften beschäftigen wir uns mit dem so genannten Einbettungssatz von Sobolev, der das Fundament der Regularitätstheorie darstellt. Damit gelingt es uns nämlich, einen Zusammenhang zwischen den abstrakten Sobolevräumen und den Räumen stetig differenzierbarer Funktionen herzustellen. Die Poisson-Gleichung dient uns anschließend als Prototyp der elliptischen partiellen Differentialgleichung um die innere L^2-Regularitätstheorie zu präsentieren. Die gewonnenen Erkenntnisse übertragen wir auf allgemeine elliptische lineare Gleichungen und geben zum Schluss noch einen Einblick in die innere L^p-Regularitätstheorie.

Inhaltsverzeichnis

1 Sobolevräume

1.1 Grundlegende Definitionen

Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ein Multi-Index, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ und für $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ definiere man

$$D_\alpha \varphi := \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)^{\alpha_d} \varphi \; .$$

Dabei ist $C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ für $k = |\alpha|$ die Menge aller $\varphi \in C^k(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω.

Unter der *α-ten schwachen Ableitung* einer integrierbaren Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ versteht man eine integrierbare Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$, falls für alle $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ die Gleichung

$$\int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D_\alpha \varphi dx \tag{1.1}$$

erfüllt ist. In diesem Fall schreibt man $v = D_\alpha u$.

Ist nun $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$, so bezeichnet man mit $W^{k,p}(\Omega)$ den Raum aller $u \in L^p(\Omega)$, für die $D_\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq k$ existiert und in $L^p(\Omega)$ enthalten ist,
und nennt ihn *Sobolevraum*. Außerdem sei

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D_\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

die zu $W^{k,p}(\Omega)$ zugehörige Norm.

Den Abschluss von $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ bezüglich dieser Norm bezeichnet man mit $H^{k,p}(\Omega)$, den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ mit $H_0^{k,p}(\Omega)$.

Dass es sich bei $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ tatsächlich um eine Norm handelt, ist im nächsten Abschnitt zu sehen. Um den Beweis durchzuführen, brauchen wir dann zunächst das sogenannte Fundamentallemma der Variationsrechnung. Mit dessen Hilfe folgt fast überall die Eindeutigkeit der schwachen Ableitung, die für den Beweis nötig wird. Bevor wir die Normeigenschaften für $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ zeigen, wollen wir noch einige Dinge zur Notation und zum Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen und schwachen Ableitung anmerken.

Bemerkungen Für die ersten schwachen Ableitungen von
$u \in W^{1,p}(\Omega)$ schreiben wir $v_i = D_i u$, $i = 1, \dots, d$, und meinen damit, dass

$$\int_\Omega v_i \varphi dx = - \int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi dx \tag{1.2}$$

für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Den Vektor $(D_1 u, \ldots, D_d u)$ kürzen wir mit Du ab. Analog schreiben wir $D^2 u$ für die Matrix der zweiten schwachen Ableitungen $D_{i,j}u$ $(i, j = 1, \ldots, d)$ von $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Die $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$-Norm kürzen wir in Zukunft mit $\|\cdot\|_p$ ab.

Es ist offensichtlich, dass jede in Ω stetig differenzierbare Funktion u auch schwach differenzierbar ist. Die schwache Ableitung entspricht dabei einfach der gewöhnlichen und (1.2) ist für dieses u die Formel für die partielle Integration. Hinter dem Konzept der schwachen Ableitung steckt also die Idee, die Formel für die partielle Integration als abstraktes Axiom zu verwenden.

In der Literatur bezeichnet man $W^{1,2}(\Omega)$ auch mit $H^1(\Omega)$. Eigentlich ist $H^1(\Omega)$ als der Abschluss von $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert, wobei mit ∇f der *distributionelle Gradient* von $f \in L^2(\Omega)$ gemeint ist, doch nach dem Theorem von Meyers und Serrin sind die Bezeichnungen $W^{1,2}(\Omega)$ und $H^1(\Omega)$ äquivalent. Wir bleiben bei unserer Notation und zeigen später die Äquivalenz von $W^{k,p}(\Omega)$ und $H^{k,p}(\Omega)$.

1.2 Eigenschaften von $W^{k,p}(\Omega)$

1.2.1 Vollständigkeit von $W^{k,p}(\Omega)$

Wir müssen erst einige Vorbereitungen treffen, um die Vollständigkeit von $W^{k,p}(\Omega)$ zeigen zu können. Als erstes beschäftigen wir uns mit der Approximation von Elementen aus $L^p(\Omega)$ durch glatte Funktionen.

Definition Sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine nicht-negative Funktion, die außerhalb der Einheitskugel $B_1(0)$ verschwindet und für die gilt, dass

$$\int \rho \, dx = 1 \quad .$$

Ein typisches Beispiel ist

$$\rho(x) := \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1, \end{cases} \tag{1.3}$$

wobei c so gewählt wird, dass $\int \rho \, dx = 1$. Man nennt so ein ρ einen *(d-dimensionalen) Glättungskern*. Nun definieren wir für $u \in L^p(\Omega)$ und $h > 0$

$$u_h(x) := \frac{1}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho\left(\frac{x - y}{h}\right) u(y) dy \quad \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

wobei wir für $y \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega \quad u(y) = 0$ setzen.
Die oben genannte Approximation erfolgt dann durch diese u_h bezüglich der L^p-Norm:

Lemma 1 Sei $u \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$. Dann konvergiert u_h in $L^p(\Omega)$ gegen u für $h \to 0$, d.h.

$$\|u - u_h\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Beweis. Wir schreiben $\rho(z)\, u(x - hz)$ geschickt um als $\rho(z)^{\frac{1}{p}}\, \rho(z)^{\frac{1}{q}}\, u(x - hz)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, um die Hölder-Ungleichung anwenden zu können.

$$\begin{aligned}
|u_h(x)| &= \left| \frac{1}{h^d} \int_{|x-y| \leq h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \right| \\
&= \left| \int_{|z| \leq 1} \rho(z) u(x - hz) dz \right| \quad (\text{mit}\, z = \frac{x-y}{h}) \\
&= \left| \int_{|z| \leq 1} \rho(z)^{\frac{1}{q}}\, \rho(z)^{\frac{1}{p}}\, u(x - hz) dz \right| \\
&\leq \underbrace{\left(\int_{|z| \leq 1} \rho(z) dz \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1} \left(\int_{|z| \leq 1} \rho(z)\, |u(x - hz)|^p\, dz \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$|u_h(x)|^p \leq \int_{|z| \leq 1} \rho(z)\, |u(x - hz)|^p\, dz.$$

Für ein $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $h < \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} |u_h(x)|^p\, dx &\leq \int_{\Omega'} \int_{|z| \leq 1} \rho(z)\, |u(x - hz)|^p\, dz\, dx \\
&\leq \int_{|z| \leq 1} \rho(z) \int_{B_h(\Omega')} |u(x)|^p\, dx\, dz \\
&= \int_{B_h(\Omega')} |u(x)|^p\, dx,
\end{aligned}$$

wobei $B_h(\Omega') := \{x | \text{dist}(x, \Omega') < h\}$. Durch diese Wahl ist bei der Translation in der zweiten Zeile kein Teil des ursprünglichen Integrals bzgl. dx verloren gegangen. Es gilt also mit $\Omega'' = B_h(\Omega')$

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')}\,. \tag{1.4}$$

Um den Beweis zu vollenden, benötigen wir zunächst ein

Lemma 2 Sei $u \in C^0(\Omega)$. Dann konvergiert u_h auf jeder Menge $\Omega' \subset\subset \Omega$ gleichmäßig gegen u.

Beweis. Wie oben schreiben wir

$$u_h(x) = \int_{|z|\leq 1} \rho(z) u(x - hz) dz.$$

Sei wieder $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $h < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Es gilt

$$u(x) = u(x) \int_{|z|\leq 1} \rho(z)\, dz = \int_{|z|\leq 1} \rho(z) u(x)\, dz$$

Es ist zu zeigen, dass $\sup_{x\in\Omega'} |u - u_h| \to 0$ für $h \to 0$. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\Omega'} |u - u_h| &= \sup_{x\in\Omega'} \left| \int_{|z|\leq 1} \rho(z) \left(u(x) - u(x - hz) \right) dz \right| \\
&\leq \sup_{x\in\Omega'} \int_{|z|\leq 1} \rho(z) \left| u(x) - u(x - hz) \right| dz \\
&\leq \sup_{x\in\Omega'} \sup_{|z|\leq 1} \left| u(x) - u(x - hz) \right|.
\end{aligned}$$

Weil die Menge $\overline{B} := \{x | \mathrm{dist}(x, \Omega') \leq h\}$ kompakt ist und $u \in C^0(\Omega)$, ist u gleichmäßig stetig auf $\overline{B}$. Also ist die rechte Seite kleiner oder gleich

$$\sup_{|z|\leq 1} \sup_{x\in\overline{B}} |u(x) - u(x - hz)|$$

und konvergiert somit gegen 0. □

Sei $\epsilon > 0$, $\Omega'' := B_{h'}(\Omega')$ und $h' < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ähnlich wie oben. Wir können nun ein $w \in C_0^0(\Omega'')$ so wählen, dass

$$\|u - w\|_{L^p(\Omega'')} \leq \frac{1}{3}\epsilon$$

weil $C_0^\infty(\Omega'') \subset C_0^0(\Omega'')$ dicht in $L^p(\Omega'')$ liegt. Wegen Lemma 2 wissen wir, dass

$$\|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \frac{1}{3}\epsilon$$

für ein genügend kleines h. Nun lässt sich (1.4) auf die Differenz $u - w$ anwenden:

$$\|u_h - w_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u - w\|_{L^p(\Omega'')}$$

Insgesamt ergibt sich mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{L^p(\Omega')} &\leq \|u - w\|_{L^p(\Omega')} + \|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} + \|u_h - w_h\|_{L^p(\Omega')} \\
&\leq 3 \cdot \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon
\end{aligned}$$

für genügend kleines $h \le h'$. u_h konvergiert also in $L^p_{loc}(\Omega)$ gegen u. Um die Konvergenz in $L^p(\Omega)$ zu erhalten, setzt man $u = 0$ außerhalb von Ω und wendet das eben erhaltene Resultat für $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ an. □

Lemma 3 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\int_\Omega u\phi dx = 0 \quad$ für alle $\quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann ist $u = 0$ fast überall in Ω.

Beweis. Zunächst betrachten wir die Voraussetzungen für ein stetiges u. Angenommen, es existiert ein x_0 mit $u(x_0) < 0$ (analog für > 0). Weil u stetig ist, gibt es ein $h > 0$, sodass $u(x) < 0$ für alle $x \in B_h(x_0)$ ist. Mit Hilfe des Glättungskerns ρ aus (1.3) lässt sich ein nicht-triviales $\phi \in C_0^\infty(B_h(x_0))$ mit $\phi \ge 0$ konstruieren. Daraus folgt

$$\int_{B_h(x_0)} u\phi dx < 0.$$

Das ist ein Widerspruch.
Für $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ gehen wir folgendermaßen vor: Für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\text{supp}\phi \subset\subset \Omega'$ und genügend kleines $h > 0$ gilt

$$\int_{|x-y|\le h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)\phi(y)dy \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mit der Voraussetzung und dem Satz von Fubini bekommen wir

$$0 = \int_\Omega u(x)\left(\int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)\phi(y)dy\right)dx = \int_\Omega \phi(y)\underbrace{\left(\int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(x)dx\right)}_{=u_h \text{ stetig}} dy.$$

Nach dem ersten Teil des Beweises ist damit $u_h = 0$. Desweiteren gilt

$$\|u - u_h\|_{L^1(\Omega')} \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

Wegen dem Satz von Riesz-Fischer gibt es nun eine beschränkte Teilfolge von (u_h), die fast überall gegen u konvergiert. Also ist bereits $u = 0$ fast überall in Ω', und da $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig war, gilt $u = 0$ fast überall in Ω. □

Damit sind die Vorbereitungen für den Beweis der Normeigenschaften von $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ abgeschlossen und wir kommen zu

Lemma 4 $W^{k,p}(\Omega)$ bildet zusammen mit $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ einen normierten Raum.

Beweis.

(i) Wir wollen als erstes die Dreiecksungleichung zeigen, und betrachten dazu zunächst

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega D_\alpha(u+w)\varphi dx &\overset{Def.}{=} (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (u+w)D_\alpha\varphi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD_\alpha\varphi dx + (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega wD_\alpha\varphi dx \\
&\overset{Def.}{=} \int_\Omega (D_\alpha u + D_\alpha w)\varphi dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).
\end{aligned}
$$

Wir möchten zeigen, dass die beiden schwachen Ableitungen fast überall übereinstimmen. Aus der eben geführten Rechnung folgt

$$
\int_\Omega \underbrace{[D_\alpha(u+w) - (D_\alpha u + D_\alpha w)]}_{=:v}\varphi dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega),
$$

also insbesondere für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt, dass $v = 0$ fast überall in Ω und damit ist $D_\alpha(u+w) = D_\alpha u + D_\alpha w$ fast überall in Ω.
Schließlich bekommen wir

$$
\begin{aligned}
\|u+w\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha(u+w)\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha u + D_\alpha w\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D_\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D_\alpha w\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha w\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|w\|_{W^{k,p}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

mithilfe der Minkowski-Ungleichung.

(ii) Als nächstes zeigen wir, dass $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda|\, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Dazu betrachte man wieder

$$
\int_\Omega D_\alpha(\lambda u)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \lambda u D_\alpha\varphi dx = \lambda \int_\Omega D_\alpha u\varphi dx
$$

Aus dieser Beziehung bekommen wir ähnlich wie oben die fast sichere Übereinstimmung von $D_\alpha(\lambda u)$ und $\lambda D_\alpha u$.

$$\Rightarrow \|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha(\lambda u)\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

(iii) Es bleibt zu zeigen, dass $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad \text{f.ü.}$.
Ist die Norm gleich Null, so ist insbesondere $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ und damit $u = 0$ f.ü. . Ist umgekehrt $u = 0$ f.ü., so folgt aus der Definition der schwachen Ableitung: Für alle $|\alpha| \le k$ gilt

$$\int_\Omega D_\alpha u \varphi dx = 0.$$

Man zeigt wieder wie oben, dass $D_\alpha u$ fast sicher gleich Null ist. Also ist für alle $|\alpha| \le k$ die L^p-Norm von $D_\alpha u$ gleich Null und somit folgt die Behauptung. □

Die zentrale Aussage dieses Unterabschnitts enthält das folgende

Theorem 1 Der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ vollständig, also ein Banachraum.

Beweis. Seien zunächst $k = 1$ und $p = 2$. Geben wir uns mit (u_n) eine Cauchyfolge in $W^{1,2}(\Omega)$ vor, so bedeutet das:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so dass} \quad \forall l, m \ge n_0 : \quad \|u_l - u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} < \epsilon.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon > \|u_l - u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} &= \left(\|u_l - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^d \|D_j(u_l - u_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ge \left(\sum_{j=1}^d \|D_j(u_l - u_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ge \|D_i u_l - D_i u_m\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für ein beliebiges} \quad i \in \{1, \ldots, d\}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (D_i u_n)$ bildet eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega)$. Ähnlich sieht man, dass

$$\epsilon > \|u_l - u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \ge \|u_l - u_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

Also bildet auch (u_n) eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega)$.

Weil $L^2(\Omega)$ vollständig ist, existieren u und v^i in $L^2(\Omega)$ mit $u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$ und $D_i u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v^i$

für $i = 1, \dots, d$.
Sei nun $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Dann gilt nach Definition der schwachen Ableitung

$$\int_\Omega D_i u_n \varphi dx = -\int_\Omega u_n D_i \varphi dx. \tag{1.5}$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung schätzt man nun ab:

$$\left| \int_\Omega \left(D_i u_n \varphi - v^i \varphi \right) dx \right| \leq \underbrace{\left(\int_\Omega \left| D_i u_n - v^i \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\to 0} \underbrace{\left(\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} \longrightarrow 0$$

Also konvergiert die linke Seite von (1.5) gegen $\int_\Omega v^i \varphi dx$. Genauso sieht man, dass die rechte Seite von (1.5) gegen $\int_\Omega u D_i \varphi dx$ konvergiert, denn

$$\left| \int_\Omega \left(u D_i \varphi - u_n D_i \varphi \right) dx \right| \leq \underbrace{\left(\int_\Omega |u_n - u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\to 0} \underbrace{\left(\int_\Omega |D_i \varphi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} \longrightarrow 0.$$

Insgesamt erhält man

$$\int_\Omega v^i \varphi dx = -\int_\Omega u D_i \varphi dx.$$

$\Rightarrow v^i = D_i u$ nach Definition (und Fundamentallemma der Variationsrechnung fast überall).
Da $u, v^i \in L^2(\Omega)$ für alle $i = 1, \dots, d$, folgt $u \in W^{1,2}(\Omega)$.
Der eben geführte Beweis funktioniert für $1 \leq p < \infty$ analog, weil auch $L^p(\Omega)$ bezüglich $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ vollständig ist.

Die Vollständigkeit von $W^{k,p}(\Omega)$ für $k > 1$ sieht man ähnlich wie oben:
Sei (u_n) eine Cauchyfolge in $W^{k,p}(\Omega)$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so dass} \quad \forall l, m \geq n_0 : \quad \|u_l - u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \epsilon.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \epsilon > \|u_l - u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\geq \left(\sum_{j_1=1}^{d} \dots \sum_{j_k=1}^{d} \|D_{j_1} \dots D_{j_k}(u_l - u_m)\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \|D_{i_1} \dots D_{i_k}(u_l - u_m)\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

für beliebige $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}$. Also bildet auch $(D_{i_1} \dots D_{i_k} u_n)$ eine Cauchyfolge im vollständigen Raum $L^p(\Omega)$. Also existiert ein $v_k^i \in L^p(\Omega)$ mit

$$D_{i_1} \dots D_{i_k}(u_n) \overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} v_k^i.$$

Sei $\varphi \in C_0^k(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega (D_{i_1} \dots D_{i_k} u_n)\varphi dx = (-1)^k \int_\Omega u_n(D_{i_1} \dots D_{i_k}\varphi)dx$$

nach der Definition der schwachen Ableitung. Im Limes $n \to \infty$ erhält man daraus analog wie für $k = 1$

$$\int_\Omega (v_k^i)\varphi dx = (-1)^k \int_\Omega u(D_{i_1} \dots D_{i_k}\varphi)dx.$$

Also ist $D_{i_1} \dots D_{i_k} u = v_k^i$ fast überall.
Schließlich bekommen wir $u \in W^{k,p}(\Omega)$, weil die v_k^i für $i = 1, \dots, d$ sowie u in $L^p(\Omega)$ enthalten sind und das eben geführte Argument auch für $1 \leq \widetilde{k} \leq k$ funktioniert. □

1.2.2 Zusammenhang zwischen $W^{k,p}(\Omega)$ und $H^{k,p}(\Omega)$

Zu Beginn dieses Abschnitts erarbeiten wir ein Kriterium, das für ein $u \in L^2(\Omega)$ ein weiteres Element v aus $L^2(\Omega)$ als seine i-te schwache Ableitung identifiziert.
Anschließend zeigen wir unter anderem damit die Äquivalenz der Definitionen von $W^{k,p}(\Omega)$ und $H^{k,p}(\Omega)$.

Lemma 5 Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > h$. Unter der Annahme, dass $v = D_i u$ existiert, gilt

$$D_i(u_h(x)) = (D_i u)_h(x).$$

Beweis. Zunächst überzeugt man sich davon, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}\rho(\frac{x-y}{h}) = -\frac{\partial}{\partial y^i}\rho(\frac{x-y}{h})$ für das anfangs definierte Beispiel eines Glättungskerns gilt. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} D_i(u_h(x)) &= \frac{1}{h^d}\int \frac{\partial}{\partial x^i}\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)dy \\ &= -\frac{1}{h^d}\int \frac{\partial}{\partial y^i}\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)dy \\ &= \frac{1}{h^d}\int \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)D_i u(y)dy = (D_i u)_h(x) \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Zeile die Definition der schwachen Ableitung benutzt haben. □

Lemma 6 Seien $u, v \in L^2(\Omega)$. Dann ist $v = D_i u$ genau dann, wenn es eine Folge $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ gibt, sodass $u_n \overset{L^2(\Omega')}{\longrightarrow} u$ und $\frac{\partial}{\partial x^i}u_n \overset{L^2(\Omega')}{\longrightarrow} v$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Beweis. "⇒". Seien $u, v \in L^2(\Omega)$ und $v = D_i u$. Aus Lemma 1 folgt

$$\|u_h - u\|_{L^2(\Omega')} \to 0 \quad \text{für}\, h \to 0.$$

Das gilt auch für v:

$$\|v_h - v\|_{L^2(\Omega')} \to 0 \quad \text{für}\, h \to 0.$$

Nun ist $v_h = (D_i u)_h = D_i(u_h)$ nach Lemma 5 für genügend kleines $h > 0$. Also haben wir eine Folge glatter Funktionen (u_h) gefunden mit

$$\frac{\partial}{\partial x^i} u_h \overset{L^2(\Omega')}{\longrightarrow} v \quad \text{für} \quad h \to 0 \quad \text{und} \quad u_h \overset{L^2(\Omega')}{\longrightarrow} u \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

"$\Leftarrow$". Sei $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ gegeben mit $\|D_i(u_n) - v\|_{L^2(\Omega')} \to 0$ und $\|u_n - u\|_{L^2(\Omega')} \to 0$. Nach der Definition der schwachen Ableitung gilt für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega')$

$$\int_{\Omega'} D_i u \varphi dx = -\int_{\Omega'} u D_i \varphi dx$$

Dass der Ausdruck $-\int_{\Omega'} u_n D_i \varphi dx$ gegen die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert, sieht man wie in einem Beweis des vorigen Abschnitts mit der Hölder-Ungleichung. Wieder gilt nach Definition

$$-\int_{\Omega'} u_n D_i \varphi dx = \int_{\Omega'} D_i(u_n) \varphi dx$$

und die rechte Seite konvergiert gegen $\int_{\Omega'} v \varphi dx$. Insgesamt folgt für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega')$

$$\int_{\Omega'} D_i u \varphi dx = \int_{\Omega'} v \varphi dx$$

und damit $v = D_i u$ für jedes beliebige $\Omega' \subset\subset \Omega$. $\square$

Für den Beweis des nächsten Theorems benötigen wir noch den Begriff der „Partition der Eins".

Definition Eine Überdeckung $(\Omega_i)_{i \in N}$ von Ω mit $N \subseteq \mathbb{N}$ heißt *lokal finit*, wenn es für alle $x \in \bigcup_{i \in N} \Omega_i$ eine Kugel $B_\epsilon(x)$ gibt, so dass $\Omega_i \cap \overline{B_\epsilon(x)}$ nur für endlich viele i nicht leer ist.
$(\eta_i)_{i \in N}$ heißt eine *Partition der Eins* auf Ω zu einer lokal finiten offenen Überdeckung $(\Omega_i)_{i \in N}$ von Ω, falls

$$\eta_i \in C_0^\infty(\Omega_i), \quad \eta_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i \in N} \eta_i(x) = 1 \quad \text{für alle}\, x \in \Omega.$$

In der Summe sind dabei lokal nur endlich viele Summanden von Null verschieden. Mit der Existenz einer Partition der Eins beschäftigt sich die folgende Aussage:

Lemma 7 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $K_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega_i} \subset \Omega$ für $i \in \mathbb{N}$ mit K_i und $\overline{\Omega_i}$ kompakt, so dass $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine lokal finite offene Überdeckung von Ω ist. Die K_i sollen außerdem paarweise disjunkt sein und können auch leer gewählt werden.
Dann existiert eine Partition der Eins und es gilt

$$\eta_i(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in K_i.$$

Um der Übersichtlichkeit nicht zu schaden, sei für den Beweis des Lemmas auf das Buch „Lineare Funktionalanalysis“ (Kapitel 2.19: „Partition der Eins“) von H.W.Alt [6] verwiesen.

Theorem 2 Die Definitionen von $W^{k,p}(\Omega)$ und $H^{k,p}(\Omega)$ sind äquivalent.

Beweis. Sei $k = 1$ und $p = 2$. Wir müssen zeigen, dass $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ dicht in $W^{1,2}(\Omega)$ liegt.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und man definiere

$$\Omega_n := \left\{ x \in \Omega |\, \|x\| < n,\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}, \quad \Omega_0 := \Omega_{-1} := \emptyset.$$

Dann ist $\Omega_n \subset\subset \Omega_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$.
Wir erhalten daraus eine lokal finite Überdeckung $(\Omega_{n+1} \backslash \overline{\Omega}_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ von Ω. Der Abschluss der Menge $\Omega_{n+1} \backslash \overline{\Omega}_{n-1}$ ist kompakt, also erhalten wir mit Lemma 7 die Existenz einer Partition der Eins $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu dieser Überdeckung.

Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Wegen Lemma 6 gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $h_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sodass $h_n \leq \mathrm{dist}(\Omega_n, \partial\Omega_{n+1})$ und

$$\|(\eta_n u)_{h_n} - \eta_n u\|_{W^{1,2}(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Auf jeder Menge $\Omega' \subset\subset \Omega$ sind höchstens endlich viele der $(\eta_n u)_{h_n}$ von Null verschieden.

$$\Rightarrow \widetilde{u} := \sum_{n\in\mathbb{N}} (\eta_n u)_{h_n} \quad \in C^\infty(\Omega).$$

Wir benutzen nun, dass $u = u \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta_n u$.

$$\begin{aligned} \|u - \widetilde{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)} &= \left\| u - \sum_{n\in\mathbb{N}} (\eta_n u)_{h_n} \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} (\eta_n u - (\eta_n u)_{h_n}) \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\eta_n u - (\eta_n u)_{h_n}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &< \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für $k = 1$ und $p = 2$ gezeigt. Der allgemeine Beweis funktioniert fast identisch. □

1.2.3 Regeln für die schwache Ableitung

Die Produkt- und Kettenregel der klassischen Ableitung lassen sich auf die schwache Ableitung übertragen. Diese Tatsache beweisen wir für $W^{1,2}(\Omega)$ und beschäftigen uns mit dem konkreten Beispiel der Betragsfunktion.

Lemma 8 (Produktregel) Seien $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ und $uv, uDv + vDu \in L^1(\Omega)$. Dann ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ und es gilt

$$D(uv) = uDv + vDu.$$

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Wir betrachten zunächst $v_h \in C^\infty(\Omega)$ statt v und arbeiten anschließend wieder mit einem Approximationsargument. Es gilt für $i = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (uD_iv_h + v_hD_iu)\varphi dx &= \int_\Omega uD_iv_h\varphi dx + \int_\Omega v_hD_iu\varphi dx \\
&= \int_\Omega uD_iv_h\varphi dx - \int_\Omega uD_i(v_h\varphi)dx \\
&= \int_\Omega uD_iv_h\varphi dx - \int_\Omega u\varphi D_iv_h dx - \int_\Omega uv_hD_i\varphi dx \\
&= -\int_\Omega uv_hD_i\varphi dx,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei wir die Linearität des Integrals, die Definition der schwachen Ableitung, $v_h\varphi \in C_0^1(\Omega)$ als „Testfunktion" und die klassische Produktregel für $v_h\varphi$ verwendet haben. Die letzte Zeile von (1.6) ist wiederum nach Definition gleich $\int_\Omega D_i(uv_h)\varphi\, dx$.
Also stimmen $D_i(uv_h)$ und $uD_iv_h + v_hD_iu$ fast überall überein.
Nun nutzt man die Tatsache, dass

$$\|v_h - v\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

um die Gleichung (1.6) durch Approximation auch für v zu zeigen, wie wir schon in früheren Beweisen gesehen haben und deswegen nicht noch einmal explizit ausführen. Zusätzlich braucht man dafür, dass

$$D_iv_h \xrightarrow{L^2(\Omega)} D_iv.$$

Diese Tatsache folgt, weil $D_iv \in L^2(\Omega)$ und $D_iv_h = (D_iv)_h$ nach Lemma 5 für $h < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Dass $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ sieht man leicht, da $u, v \in L^2(\Omega)$ und damit $uv \in L^1(\Omega)$ wegen der Hölderungleichung. Außerdem ist $D(uv) = uDv + vDu \in L^1(\Omega)$. □

Lemma 9 (Kettenregel) Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit beschränkter Ableitung, d.h.

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \left|f'(y)\right| < \infty.$$

Dann ist $f \circ u \in W^{1,2}(\Omega)$ und es gilt

$$D(f\circ u) = f'(u)Du.$$

Beweis. Man betrachte $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ (dicht in $W^{1,2}(\Omega)$, siehe Beweis von Theorem 2) mit $u_n \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^2\,dx &\le \sup\left|f'\right|^2 \int_\Omega |u_n - u|^2\,dx \\ &= \sup\left|f'\right|^2 \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

weil u_n in $W^{1,2}(\Omega)$ gegen u konvergiert. Wegen der Dreiecksungleichung und der binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned}&\left\|f'(u_n)D_iu_n - f'(u)D_iu\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \\ \le\ &\left\|f'(u_n)D_iu_n - f'(u_n)D_iu\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+2\left\|f'(u_n)D_iu_n - f'(u_n)D_iu\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|f'(u_n)D_iu - f'(u)D_iu\right\|_{L^2(\Omega)} + \\ &+\left\|f'(u_n)D_iu - f'(u)D_iu\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \le\ &2\left\|f'(u_n)D_iu_n - f'(u_n)D_iu\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+2\left\|f'(u_n)D_iu - f'(u)D_iu\right\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (\text{weil } 2ab \le a^2 + b^2) \\ \le\ &2\sup\left|f'\right|^2 \|D_iu_n - D_iu\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega \left|f'(u_n) - f'(u)\right|^2 |D_iu|^2\,dx.\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert eine Teilfolge von (u_n), die punktweise fast überall gegen u konvergiert, und weil f' stetig ist, gilt das auch für die Komposition von f' mit besagter Teilfolge, also für $f'(u_{n_k})$. Weil f' außerdem beschränkt und $D_iu \in L^2(\Omega)$ ist, konvergiert das zweite Integral

$$2\int_\Omega \left|f'(u_{n_k}) - f'(u)\right|^2 |D_iu|^2\,dx \quad \text{gegen} \quad 0$$

nach dem Satz der dominierten Konvergenz. Das erste Integral konvergiert gegen 0, da $u_n \overset{W^{1,2}(\Omega)}{\longrightarrow} u$.
Insgesamt bekommen wir also

$$f(u_n) \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} f(u) \quad \text{und}$$

$$D_i(f(u_{n_k})) = f'(u_{n_k})D_i u \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} f'(u)D_i u \qquad \text{für} \quad i = 1, \dots, d.$$

$\Rightarrow f \circ u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $D(f \circ u) = f'(u)Du$. □

Beispiel Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ist auch $|u| \in W^{1,2}(\Omega)$ und es gilt

$$D|u| = \operatorname{sign} u \, Du.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Man zeigt, dass für $f_\epsilon(x) := (x^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \epsilon \in C^1(\mathbb{R})$ die Ableitung f' beschränkt ist:

$$\left|f'_\epsilon(x)\right| = \left|\frac{x}{(x^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\right| < 1.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir dann $f_\epsilon \circ u \in W^{1,2}(\Omega)$ und es gilt für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega f_\epsilon(u) D_i \varphi dx = -\int_\Omega \varphi \frac{u D_i u}{(u^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}} dx.$$

Die linke Seite ist beschränkt durch

$$\int_\Omega |u D_i \varphi| \, dx \leq \text{const} \, \|u\|_{L^2(\Omega)} < \infty,$$

da $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und $u \in L^2(\Omega)$, und die rechte Seite durch

$$\int_\Omega |\varphi u D_i u| \, dx \leq \text{const} \, \|u\|_{L^2(\Omega)} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)} < \infty,$$

da auch $D_i u \in L^2(\Omega)$ für $i = 1, \dots, d$. Damit können wir den Satz der dominierten Konvergenz anwenden und für $\epsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

1.3 Der Einbettungssatz von Sobolev

1.3.1 Riesz-Potential

Definition Sei $\mu \in (0, 1]$. Wir definieren den Operator V_μ auf $L^1(\Omega)$ durch das Riesz-Potential

$$(V_\mu f)(x) := \int_\Omega |x - y|^{d(\mu - 1)} f(y) dy.$$

Die folgende wichtige Eigenschaft von V_μ werden wir uns im Beweis des Einbettungssatzes von Sobolev zunutze machen.

Lemma 10 Sei $\mu \in (0,1]$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und $0 \leq \delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu$. Dann bildet V_μ $L^p(\Omega)$ stetig auf $L^q(\Omega)$ ab und es gilt für $f \in L^p(\Omega)$

$$\|V_\mu f\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_d^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_{L^p(\Omega)} .$$

Dabei ist ω_d das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$.

Beweis. Man definiere $\frac{1}{r} := 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1 - \delta$. Wir werden sehen, dass für festes $x \in \Omega$

$$l(y) := |x-y|^{d(\mu-1)} \in L^r(\Omega).$$

Man wähle sich $R > 0$, sodass $|\Omega| = |B_R(x)| = \omega_d R^d$. Dann ist

$$|\Omega \backslash (\Omega \cap B_R(x))| = |B_R(x) \backslash (\Omega \cap B_R(x))|$$

und es gilt

$$|x-y|^{d(\mu-1)} \leq R^{d(\mu-1)} \qquad \text{für } |x-y| \geq R\,, \text{ da } \quad d(\mu-1) \leq 0.$$

Weil $\frac{1}{1-\delta} > 0$, erhalten wir auch

$$\begin{aligned} |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}} &\leq R^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}} =: R' \quad \text{für } |x-y| \geq R \qquad \text{bzw.} \\ |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}} &\geq R' \qquad\qquad\quad \text{für } |x-y| \leq R. \end{aligned}$$

Damit können wir folgendermaßen abschätzen.

$$\begin{aligned} \|l\|_{L^r(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}}\, dy\right)^{1-\delta} \\ &= \left(\int_{\Omega\backslash(\Omega\cap B_R(x))} |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}}\, dy + \int_{\Omega\cap B_R(x)} |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}}\, dy\right)^{1-\delta} \\ &\leq \left(R' \cdot \underbrace{|\Omega\backslash(\Omega\cap B_R(x))|}_{=|B_R(x)\backslash(\Omega\cap B_R(x))|} + \int_{\Omega\cap B_R(x)} |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}}\, dy\right)^{1-\delta} \\ &\leq \left(\int_{B_R(x)\backslash(\Omega\cap B_R(x))} |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}}\, dy + \int_{\Omega\cap B_R(x)} |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}}\, dy\right)^{1-\delta} \\ &= \left(\int_{B_R(x)} |x-y|^{\frac{d(\mu-1)}{1-\delta}}\, dy\right)^{1-\delta} \\ &= \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_d^{1-\delta} R^{d(\mu-\delta)} \\ &= \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_d^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \qquad \text{mit } \omega_d^{1-\delta} = \omega_d^{1-\mu}\omega_d^{\mu-\delta} \quad \text{und } |\Omega| = \omega_d R^d. \end{aligned}$$

Wir schreiben nun $l\,|f|$ geschickt um:

$$l\,|f| = l^{r(1-\frac{1}{p})}\,(l^r\,|f|^p)^{\frac{1}{q}}\,|f|^{p\delta}\,.$$

(Überprüft man zum Beispiel die Summe der Exponenten von l, so erhält man

$$r(1-\frac{1}{p}) + r\frac{1}{q} = r(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}) = r\frac{1}{r} = 1\,.)$$

Mit Hilfe der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung ($\frac{1}{(\frac{p}{p-1})} + \frac{1}{q} + \frac{1}{(\frac{1}{\delta})} = 1$) bekommen wir

$$\begin{aligned}
|V_\mu f(x)| &\leq \int_\Omega |x-y|^{d(\mu-1)}\,|f(y)|\,dy \\
&= \int_\Omega l(y)^{r(1-\frac{1}{p})}\,(l(y)^r\,|f(y)|^p)^{\frac{1}{q}}\,|f(y)|^{p\delta}\,dy \\
&\leq \left(\int_\Omega l(y)^r dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(y)|^p\,dy\right)^{\delta} \left(\int_\Omega l(y)^r\,|f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\|V_\mu f\|_{L^q(\Omega)} &\leq \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega l(y)^r dy\right)^{(1-\frac{1}{p})q} \|f\|^{\delta pq}_{L^p(\Omega)} \left(\int_\Omega l(y)^r\,|f(y)|^p\,dy\right) dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{x\in\Omega}\left(\int_\Omega l(y)^r dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|^{\delta p}_{L^p(\Omega)} \left(\int_\Omega\int_\Omega l(y)^r\,|f(y)|^p\,dy\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{x\in\Omega}\left(\int_\Omega l(y)^r dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|^{\delta p}_{L^p(\Omega)} \sup_{y\in\Omega}\left(\int_\Omega l(y)^r dx\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|^{\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)} \\
&= \sup_{x\in\Omega}\left(\int_\Omega l(y)^r dy\right)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|f\|^{\delta p+\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)} \\
&= \sup_{x\in\Omega}\left(\int_\Omega l(y)^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{(weil } \delta p + \frac{p}{q} = \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)p + \frac{p}{q} = 1\text{).}
\end{aligned}$$

Mit der obigen Abschätzung für die $L^r(\Omega)$-Norm von l ergibt sich also insgesamt

$$\|V_\mu f\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^{\mu-\delta}\,\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Insbesondere ist $V_\mu : L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ stetig. $\square$

1.3.2 Der Einbettungssatz von Sobolev

In seinen verschiedenen Versionen liefert der Einbettungssatz von Sobolev unter anderem eine Verbindung zwischen den abstrakten Sobolevräumen und den Räumen der stetigen, (mehrfach) stetig differenzierbaren und sogar glatten Funktionen. Mit seiner Hilfe zeigen wir später, dass schwache Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen unter bestimmten Voraussetzungen letztendlich glatte Funktionen sind.

Theorem 3 Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Es gilt

$$H_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & \text{für } p < d \\ \\ C^0(\overline{\Omega}) & \text{für } p > d \end{cases}$$

Desweiteren gilt für $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq c(p,d)\, \|Du\|_p \qquad \text{für}\, p < d, \tag{1.7}$$

$$\sup_{\Omega} |u| \leq c(p,d)\, |\Omega|^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}}\, \|Du\|_p \qquad \text{für}\, p > d. \tag{1.8}$$

Beweis.
Der Beweis ist in drei Teile gegliedert. In den ersten beiden Schritten zeigen wir (1.7) und (1.8) für $u \in C_0^1(\Omega)$, im letzten Schritt übertragen wir die ersten beiden durch ein Approximationsargument auf $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

1. Man setzt $u = 0$ in $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$ und benutzt als erstes den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x^i} D_i u(x^1, \ldots, x^{i-1}, \xi, x^{i+1}, \ldots, x^d) d\xi \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{x^i} \left| D_i u(x^1, \ldots, x^{i-1}, \xi, x^{i+1}, \ldots, x^d) \right| d\xi \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u|\, dx^i \end{aligned}$$

Damit ist

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \left(\prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u|\, dx^i \right)^{\frac{1}{d-1}}. \tag{1.9}$$

Die verallgemeinterte Hölder-Ungleichung besagt, das für $f_i \in L^{p_i}$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1$ gilt:

$$\int_\Omega f_1 \ldots f_m \leq \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_m\|_{p_m}.$$

Wir benutzen sie in der folgenden Ungleichungskette an der Stelle $(*)$ für $m = d-1$, $p_1 = \ldots = p_{d-1} = d-1$ und

$$f_{i-1} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_i u|\, dx^i \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,dx^1 \quad &\overset{(1.9)}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u|\,dx^i \right)^{\frac{1}{d-1}} dx^1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u|\,dx^1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{d} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_i u|\,dx^i \right)^{\frac{1}{d-1}} dx^1 \\
&\overset{(*)}{\leq} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u|\,dx^1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \prod_{i=2}^{d} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u|\,dx^i dx^1 \right)^{\frac{1}{d-1}} .
\end{aligned}$$

Wir teilen das Produkt $\prod_{i=2}^{d}$ der rechten Seite nun in den Faktor für $i = 2$ und das restliche Produkt $\prod_{i=3}^{d}$ auf. Integrieren wir anschließend auf beiden Seiten bzgl. x^2, so ist der eben erwähnte Faktor für $i = 2$ bezüglich dieser Operation eine Konstante.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,dx^1 dx^2 \leq \\
&\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_2 u|\,dx^2 dx^1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=3}^{d} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u|\,dx^i dx^1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u|\,dx^1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \right] dx^2
\end{aligned}$$

Wendet man nun wieder die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,dx^1 dx^2 \leq \\
&\prod_{j=1}^{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u|\,dx^2 dx^1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \prod_{i=3}^{d} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u|\,dx^i dx^1 dx^2 \right)^{\frac{1}{d-1}}
\end{aligned}$$

Als nächstes können wir wieder das Produkt $\prod_{i=3}^{d}$ in den Faktor für $i = 3$ und das restliche Produkt aufspalten, anschließend bzgl. x^3 integrieren und die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung anwenden. Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man schließlich

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,dx \leq \left(\prod_{j=1}^{d} \int_{\Omega} |D_j u|\,dx \right)^{\frac{1}{d-1}} ,$$

wobei wir $u = 0$ außerhalb von Ω gesetzt haben. Da $\frac{d-1}{d} > 0$, gilt somit

$$\|u\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \left(\prod_{j=1}^{d} \int_{\Omega} |D_j u|\,dx \right)^{\frac{1}{d}} \overset{(**)}{\leq} \frac{1}{d} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{d} |D_i u|\,dx \overset{(***)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{d}} \|Du\|_1 .$$

Dabei haben wir in $(**)$ verwendet, dass das arithmetische Mittel größer als das geometrische ist. In $(***)$ haben wir die folgende Ungleichung benutzt:

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} |D_i u| \leq \frac{\sqrt{d}}{d} \left(\sum_{i=1}^{d} |D_i u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{d}} |Du| .$$

Die Ungleichung (1.7) ist also für $p = 1$ bewiesen.

Sei nun $\gamma > 1$ und wir setzen $|u|^\gamma$ in (1.7) ($p = 1$) ein. ($|u|^\gamma$ ist stetig, aber unter Umständen nur abschnittsweise stetig differenzierbar, also muss man ggf. das Integral über Ω aufteilen und hinterher wieder zusammensetzen.) Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \| |u|^\gamma \|_{\frac{d}{d-1}} &\le \frac{\gamma}{\sqrt{d}} \int_\Omega |u|^{\gamma-1} \, |Du| \, dx \\ &\overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\le} \frac{\gamma}{\sqrt{d}} \left\| |u|^{\gamma-1} \right\|_q \|Du\|_p \end{aligned} \tag{1.10}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Falls $p < d$, dann setzt man

$$\gamma := \frac{(d-1)p}{d-p}$$

und daraus folgt durch Umformung

$$\frac{\gamma d}{d-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}.$$

Das benutzen wir in (1.10) und erhalten

$$\| |u|^\gamma \|_{\frac{d}{d-1}} = \left(\int_\Omega |u|^{\frac{\gamma d}{d-1}} \, dx \right)^{\frac{d-1}{d}} \le \frac{\gamma}{\sqrt{d}} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|Du\|_p \, .$$

In einer anderen Notation bedeutet das

$$\begin{aligned} \|u\|^\gamma_{\frac{\gamma d}{d-1}} &\le \frac{\gamma}{\sqrt{d}} \|u\|^{\gamma-1}_{\frac{\gamma d}{d-1}} \|Du\|_p \\ \Rightarrow \|u\|_{\frac{\gamma d}{d-1}} &\le \frac{\gamma}{\sqrt{d}} \|Du\|_p \\ \Rightarrow \|u\|_{\frac{pd}{d-p}} &\le \frac{(d-1)p}{(d-p)\sqrt{d}} \|Du\|_p \end{aligned}$$

nach der Definition von γ und damit folgt (1.7) für $p < d$ und $u \in C^1_0(\Omega)$.

2. Wieder nehmen wir an, dass $u \in C^1_0(\Omega)$ und setzen $u(x) = 0$ in $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$. Sei $\omega \in \mathbb{R}^d$ mit $|\omega| = 1$. Dann ist

$$u(x) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left(u(x + r\omega) \right) dr.$$

Integrieren wir beide Seiten über die Sphäre $\{|\omega| = 1\}$, so entsteht links der zusätzliche Faktor $d\omega_d$, weil $u(x)$ unabhängig von ω ist. Teilen wir anschließend durch diesen Faktor, so erhalten wir

$$u(x) = -\frac{1}{d\omega_d} \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} \frac{\partial}{\partial r} \left(u(x + r\omega) \right) d\omega dr.$$

Durch eine Variablentransformation folgt daraus

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{d\omega_d}\int_0^\infty \int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial u}{\partial \nu}(z)d\sigma(z)dr \\ &= -\frac{1}{d\omega_d}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d-1}}\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial y^i}u(y)\frac{y^i-x^i}{|x-y|}dy. \end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Summen liefert dann

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{d\omega_d}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d-1}}\left(\sum_{i=1}^d\left(\frac{\partial}{\partial y^i}u(y)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^d \frac{(x^i-y^i)^2}{|x-y|^2}\right)^{\frac{1}{2}}}_{=1}dy \\ &= \frac{1}{d\omega_d}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d-1}}\left|Du(y)\right|dy. \\ &= \frac{1}{d\omega_d}V_{\frac{1}{d}}\left(|Du|\right)(x) \qquad \text{(Riesz-Potential).} \end{aligned}$$

Wir betrachten die $L^q(\Omega)$-Normen:

$$\begin{aligned} \|u\|_q &\leq \frac{1}{d\omega_d}\left\|V_{\frac{1}{d}}\left(|Du|\right)\right\|_q \\ &\overset{\text{Lemma 10}}{\leq} \frac{1}{d\omega_d}\left(\frac{1-\delta}{\frac{1}{d}-\delta}\right)^{1-\delta}\omega_d^{1-\frac{1}{d}}\left|\Omega\right|^{\frac{1}{d}-\delta}\|Du\|_p. \end{aligned}$$

Für $q=\infty$ (damit ist das q aus Lemma 10 gemeint) ist $\delta=\frac{1}{p}$ und

$$\sup_\Omega |u| \leq \frac{1}{d\omega_d}\left(\frac{1-\frac{1}{p}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\omega_d^{1-\frac{1}{d}}\left|\Omega\right|^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}}\|Du\|_p.$$

Die Ungleichung (1.8) ist also für $u\in C_0^1(\Omega)$ gezeigt.

3. $u\in H_0^{1,p}(\Omega)$ lässt sich durch eine Folge $(u_n)\subset C_0^\infty(\Omega)\subset C_0^1(\Omega)$ in der $W^{1,p}(\Omega)$-Norm approximieren. Das bedeutet

$$\forall\widetilde{\epsilon}>0 \quad \exists n_0, \text{ so dass } \quad \forall n>n_0: \|u-u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \frac{\widetilde{\epsilon}}{2}.$$

Ähnlich wie im Beweis der Vollständigkeit von $W^{k,p}(\Omega)$ sieht man, dass

$$\frac{\widetilde{\epsilon}}{2} > \|u-u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq \|D_ju-D_ju_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

$$\Rightarrow \|D_ju_m-D_ju_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \|D_ju_m-D_ju\|_{L^p(\Omega)} + \|D_ju-D_ju_n\|_{L^p(\Omega)} < \widetilde{\epsilon}$$

für $m, n > n_0$, also ist $(D_j u_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Durch einige Umformungen sieht man das auch für (Du_n). Mit Ungleichung (1.7) folgt für $p < d$:

$$(u_n) \quad \text{ist eine Cauchy-Folge in} \quad L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega),$$

und wegen der Vollständigkeit dieses Raumes ist auch $u \in L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$. Für $p > d$ bekommt man mit (1.8):

$$\sup_{\Omega} |u_m - u_n| \to 0$$

Wegen dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz konvergiert damit u_n gleichmäßig gegen u, das wegen einem Satz aus der Analysis stetig ist. □

1.3.3 Folgerungen des Einbettungssatzes von Sobolev

Wir erweitern in diesem Unterabschnitt die Aussage des Satzes für $u \in H_0^{k,p}(\Omega)$ mit $k \geq 1$. Ist $u \in H_0^{k,p}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ein beliebiges $p \geq 1$, so werden wir mit dieser Erweiterung folgern, dass $u \in C^\infty(\Omega)$. Anschließend stellen wir noch eine alternative Version des Einbettungssatzes für $W^{k,p}(\Omega)$ vor.

Korollar 1 Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Es gilt

$$H_0^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & \text{für } kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & \text{für } 0 \leq m < k - \frac{d}{p} \end{cases}$$

Beweis. Zunächst für $k = 2$. Wir müssen für $2p < d$ zeigen, dass

$$u \in H_0^{2,p}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in L^{\frac{dp}{d-2p}}(\Omega).$$

Weil $u \in H_0^{2,p}(\Omega)$, gibt es eine Folge $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u_n - u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \longrightarrow 0$. Das bedeutet

$$\begin{aligned} 0 \quad \longleftarrow \quad & \|u_n - u\|_{W^{2,p}(\Omega)} = \\ = \quad & \left(\|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \|D_i u_n - D_i u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \|D_j D_i u_n - D_j D_i u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ \geq \quad & \left(\|D_i u_n - D_i u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|D_j D_i u_n - D_j D_i u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ = \quad & \|D_i u_n - D_i u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Es gibt also eine Folge $(D_i u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $D_i u_n \overset{W^{1,p}(\Omega)}{\longrightarrow} D_i u$ und wegen der Vollständigkeit von $W^{1,p}(\Omega)$ folgt

$$D_i u \in H_0^{1,p}(\Omega).$$

Weil aus $2p < d$ folgt, dass $p < d$, können wir Theorem 3 anwenden und erhalten

$$D_i u \in L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega).$$

Die obige Abschätzung können wir auch anders durchführen:

$$\begin{aligned}
0 \quad \longleftarrow \quad & \|u_n - u\|_{W^{2,p}(\Omega)} = \\
= \quad & \left(\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^d \|D_i u_n - D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \|D_j D_i u_n - D_j D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
\geq \quad & \left(\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^d \|D_i u_n - D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
= \quad & \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

also ist auch $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ und mit Theorem 3 in $L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$. Insgesamt sehen wir, dass

$$u \in W^{1,\frac{dp}{d-p}}(\Omega).$$

Wir müssen noch zeigen, dass $u \in H_0^{1,\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$, also benötigen wir eine Folge von glatten Funktionen (u_n) mit kompaktem Träger, sodass $\|u_n - u\|_{W^{1,\frac{dp}{d-p}}(\Omega)} \to 0$. Es handelt sich dabei um die selbe Folge wie oben, denn

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)} \quad & \overset{\text{Theorem 3 (1.7)}}{\leq} \quad c \|Du_n - Du\|_{L^p(\Omega)} \\
& \leq \quad c' \left(\sum_{i=1}^d \|D_i u_n - D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

weil $\|u_n - u\|_{W^{2,p}(\Omega)}$. Analog sieht man mit Theorem 3 (1.7), dass

$$\|D_i u_n - D_i u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Also ist $u \in H_0^{1,\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$.
Als letzten Schritt benutzen wir die erste Inklusion von Theorem 3 für $\frac{dp}{d-p}$ statt p. Um das zu dürfen, überzeugen wir uns erst davon, dass $\frac{dp}{d-p} < d$. Wegen unserer Annahme $2p < d$ ist $0 < d^2 - 2dp$ und daraus folgt bereits $\frac{dp}{d-p} < d$. Das Theorem liefert

$$u \in L^\beta(\Omega),$$

wobei

$$\beta := \frac{d(\frac{dp}{d-p})}{d - (\frac{dp}{d-p})} = \frac{d^2 p}{d^2 - 2dp} = \frac{dp}{d-2p}.$$

Den allgemeinen Fall beweist man mit Induktion über k, wobei die selben Ideen wie für $k = 2$ verwendet werden.
Nun zeigen wir die zweite Inklusion des Korollars. Zu Beginn dieses Beweises haben wir gesehen, dass $D_i u \in H^{1,p}(\Omega)$, falls $u \in H^{2,p}(\Omega)$. Ist nun $p > d$, so folgt aus der zweiten Inklusion in Theorem 3, dass

$$D_i u \in C^0(\overline{\Omega}) \qquad \text{für}\, i = 1, \ldots, d.$$

Also ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$.
Wir nehmen jetzt die zweite Inklusion für $k-1$ als Induktionsvoraussetzung an und zeigen die Inklusion für k. Aus $u \in H_0^{k,p}(\Omega)$ folgt $D_i u \in H_0^{k-1,p}(\Omega)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann

$$D_i u \in C^m(\overline{\Omega}) \qquad \text{für} \quad 0 \leq m \leq k - 1 - \frac{d}{p},$$

also ist

$$u \in C^m(\overline{\Omega}) \qquad \text{für} \quad 0 \leq m \leq k - \frac{d}{p}.$$

□

Aus diesem Korollar folgern wir

Korollar 2 Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Ist $u \in H_0^{k,p}(\Omega)$ für ein $p \geq 1$ und alle $k \in \mathbb{N}$, dann folgt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis. Geben wir uns ein $m \geq 0$ vor, so existert dazu ein $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq m < \widetilde{k} - \frac{d}{p}.$$

Für $u \in H_0^{\widetilde{k},p}(\Omega)$ gilt dann wegen Korollar 1, dass $u \in C^m(\overline{\Omega})$. Weil m beliebig war, folgt die Behauptung. □.

Wir stellen abschließend noch eine alternative Version des Einbettungssatzes von Sobolev bzw. von Korollar 1 vor.

Korollar 3 Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt

$$u \in \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega') & \text{für } kp < d \\ \\ C^m(\overline{\Omega'}) & \text{für } 0 \leq m < k - \frac{d}{p} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\eta = 1$ in Ω', $0 \leq \eta(x) \leq 1$ für alle $x \in \Omega$. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass

$$\eta u \in H_0^{k,p}(\Omega),$$

denn mit Korollar 1 folgt

$$\eta u \in \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & \text{für } kp < d \\ \\ C^m(\overline{\Omega}) & \text{für } 0 \leq m < k - \frac{d}{p} \end{cases}$$

Schränkt man diese Aussage auf Ω' ein, so ist $\eta u \equiv u$ und die Behauptung folgt.
Wir müssen also nur noch zeigen, dass ηu durch $\eta u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der $W^{k,p}(\Omega)$-Norm approximiert werden kann, wobei $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ eine Folge ist, durch die u in der $W^{k,p}(\Omega)$-Norm approximiert werden kann.
Dafür brauchen wir die Beschränktheit von $|\eta|$ und seiner stetigen partiellen Ableitungen auf seinem kompakten Träger, die uns in den folgenden Abschätzungen nützlich sein wird.

$$\|\eta(u_n - u)\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p = \underbrace{\|\eta(u_n - u)\|_{L^p(\Omega)}^p}_{\leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p} + \ldots + \sum_{j_1=1}^{d} \sum_{j_k=1}^{d} \underbrace{\|D_{j_1} \ldots D_{j_k} [\eta(u_n - u)]\|_{L^p(\Omega)}^p}_{=:I}$$

$$\begin{aligned} I &\overset{Prod.Regel}{=} \left\| D_{j_1} \ldots D_{j_{k-1}} \underbrace{[(u_n - u) D_{j_k} \eta + \eta D_{j_k}(u_n - u)]}_{=:I_0} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\overset{Prod.Regel}{=} \left\| D_{j_1} \ldots D_{j_{k-2}} I_1 \right\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

wobei

$$I_1 = (u_n - u) D_{j_{k-1}} D_{j_k} \eta + D_{j_k} \eta D_{j_{k-1}}(u_n - u) + D_{j_{k-1}} \eta D_{j_k}(u_n - u) + \eta D_{j_{k-1}} D_{j_k}(u_n - u).$$

Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man schließlich

$$I = \|I_{k-1}\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

wobei I_{k-1} eine Summe aus Produkten verschiedener Ableitungen von η und $(u_n - u)$ sind. Wegen der Beschränktheit der Ableitungen von η können wir I_{k-1} nach oben durch das Produkt aus einer endlichen Konstante und der Summe der verschiedenen Ableitungen von $u_n - u$ abschätzen. Mit dieser Idee (und etwas Arbeit mit der Minkowski-Ungleichung) schätzen wir letztendlich die $W^{k,p}(\Omega)$-Norm von $\eta(u_n - u)$ ab:

$$\|\eta(u_n - u)\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \leq \text{const} \, \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \longrightarrow 0.$$

Dabei war $\eta u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, also kann ηu durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger bzgl. der $W^{k,p}(\Omega)$-Norm approximiert werden. $\square$

2 Innere L^2-Regularitätstheorie

2.1 Vorbereitungen

Definition Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)$. Man nennt $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine *schwache Lösung der Poisson-Gleichung* $\Delta u = f$, falls für alle $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega Du \cdot Dv \, dx + \int_\Omega f v \, dx = 0. \tag{2.1}$$

In den Beweisen der Hauptsätze der Regularitätstheorie kommt eine Idee mehrmals zum Einsatz: Für $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ setzt man in (2.1) spezielle „Testfunktionen" ein. Das sind vor allem Differenzenquotienten $\Delta_i^h v$ bzw. Produkte von Abschneidefunktionen mit Differenzenquotienten $\eta \Delta_i^h v$. Diese müssen wir zunächst definieren.

Definition Für ein $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ heißt

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$$

Differenzenquotient. Dabei ist e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^d$.

Damit uns diese Ausdrücke in späteren Vorgehensweisen tatsächlich nützlich sind, müssen wir sie in Zusammenhang mit der schwachen Ableitung bringen.

Lemma 11 Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Dann ist $\Delta_i^h u \in L^2(\Omega')$ und es gilt

$$\left\| \Delta_i^h u \right\|_{L^2(\Omega')} \leq \| D_i u \|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für } i = 1, \ldots, d. \tag{2.2}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall: $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
\left| \Delta_i^h u(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_0^h D_i u(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + \xi, x^{i+1}, \ldots, x^d) \, d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_0^h \left| D_i u(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + \xi, x^{i+1}, \ldots, x^d) \right| d\xi \\
&\overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} \frac{1}{h} \left(\int_0^h \left| D_i u(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + \xi, x^{i+1}, \ldots, x^d) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h d\xi \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Quadriert man beide Seiten und integriert sie über Ω', so erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \left| \Delta_i^h u(x) \right|^2 dx &\leq \frac{1}{h} \int_{\Omega'} \int_0^h \left| D_i u(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + \xi, x^{i+1}, \ldots, x^d) \right|^2 d\xi dx \\
&\overset{|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)}{\leq} \frac{1}{h} \int_0^h \| D_i u \|_{L^2(\Omega)}^2 \, d\xi = \| D_i u \|_{L^2(\Omega)}^2 .
\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt über ein Approximationsargument, da $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega) \subset C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ dicht in $W^{1,2}(\Omega)$ liegt.
Aus der Ungleichung folgt $\Delta_i^h u \in L^2(\Omega')$, falls $u \in W^{1,2}(\Omega)$. □

Ist umgekehrt $u \in L^2(\Omega)$ und existiert ein $K < \infty$ mit $\Delta_i^h u \in L^2(\Omega')$ und $\left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^2(\Omega')} \leq K$, so lässt sich zeigen, dass $D_i u$ existiert und $\|D_i u\|_{L^2(\Omega)} \leq K$. Den Beweis findet man im Buch „Partial Differential Equations“ (Lemma 8.2.2) von J.Jost [1].

2.2 Regularität schwacher Lösungen der Poisson-Gleichung

In diesem Abschnitt erarbeiten wir uns anhand der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ in Ω als Prototyp der elliptischen linearen partiellen Differentialgleichung das grundlegende Konzept der Regularitätstheorie. Ausgehend von einer schwachen Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$ werden wir sehen, dass

$$u \in W^{2,2}(\Omega') \quad \text{mit } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Ist f sogar in $W^{k,2}(\Omega)$, so zeigen wir, dass

$$u \in W^{k+2,2}(\Omega') \quad \text{mit } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Damit werden wir folgern, dass für $f \in C^\infty(\Omega)$ auch u in $C^\infty(\Omega)$ enthalten ist. Diesen letzten Schritt bewerkstelligen wir mit einem Korollar des Einbettungssatzes von Sobolev.

In den folgenden Beweisen werden wir auf Ungleichungen der Form

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq \text{const}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

bzw.

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq \text{const}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}\right)$$

hinarbeiten. Dafür muss man zunächst die $L^2(\Omega')$-Normen der einzelnen schwachen Ableitungen in eine ähnliche Form bringen, wie beispielsweise in der nächsten Aussage.

Lemma 12 Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\Delta u = f$ mit $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$:

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega')} \leq \frac{17}{\delta^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.3}$$

wobei $\delta := \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Die Ungleichung (2.3) lässt sich in die obige Form bringen, denn die Summe zweier Quadrate ist kleiner oder gleich dem Quadrat der Summe für positive Summanden.

$$\Rightarrow \|Du\|_{L^2(\Omega')} \leq \frac{\sqrt{17}}{\delta} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \delta \|f\|_{L^2(\Omega)} .$$

Beweis von (2.3). Zu Beginn konstruiert man sich durch Faltung einer Funktion η_0 mit dem Glättungskern ρ aus (1.3) ein $\eta = \rho_h * \eta_0 \in C_0^1(\Omega)$, wobei $\rho_h(z) := \frac{1}{h^d}\rho(\frac{z}{h})$, mit den Eigenschaften $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 1$ für $x \in \Omega'$ und $|D\eta| \leq \frac{2}{\delta}$. Dafür geeignet ist

$$\eta_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } \operatorname{dist}(x, \Omega') \leq \frac{\delta}{8} \\ 0 & \text{für } \operatorname{dist}(x, \Omega') \geq \frac{7\delta}{8} \\ \frac{7}{6} - \frac{4}{3\delta}\operatorname{dist}(x, \Omega') & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anschließend setzen wir für v in (2.1) das Produkt $\eta^2 u$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{d} \eta^2 (D_i u)^2 + 2\eta D_i u \; u D_i \eta\right] dx = \int_\Omega \eta^2 |Du|^2 \, dx + 2\int_\Omega \eta Du \cdot u D\eta \, dx = \\ = -\int_\Omega \eta^2 f u \, dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mit Youngs Ungleichung ($0 \leq |a \pm \epsilon b|^2 = |a|^2 + \epsilon^2 |b|^2 \pm 2\epsilon(a \cdot b) \Rightarrow$)

$$\mp(a \cdot b) \leq \frac{|a|^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2}|b|^2 \qquad a, b \in \mathbb{R}^d, \quad \epsilon > 0,$$

schätzen wir den gemischten Term aus (2.4) ab:

$$2\int_\Omega \eta Du \cdot u D\eta \, dx \leq 2\int_\Omega u^2 |D\eta|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2 |Du|^2 \, dx.$$

Youngs Ungleichung für $\epsilon := \delta^2$ hilft uns außerdem bei der Abschätzung von

$$-\int_\Omega \eta^2 f u \, dx \leq \frac{1}{2\delta^2}\int_\Omega \eta^2 u^2 \, dx + \frac{\delta^2}{2}\int_\Omega \eta^2 f^2 \, dx. \tag{2.5}$$

Aus (2.4) und (2.5) erhalten wir

$$\int_\Omega \eta^2 |Du|^2 \, dx \leq 2\int_\Omega u^2 |D\eta|^2 \, dx + \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \eta^2 |Du|^2 \, dx}_{(*)} + \frac{1}{2\delta^2}\int_\Omega \eta^2 u^2 \, dx + \frac{\delta^2}{2}\int_\Omega \eta^2 f^2 \, dx. \tag{2.6}$$

Nachdem wir $(*)$ auf die linke Seite von (2.6) gebracht und die Gleichung mit 2 multipliziert haben, wollen wir die Eigenschaften von η ausnutzen:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega'} |Du|^2 \, dx \quad & \leq \quad \int_\Omega \eta^2 \, |Du|^2 \, dx \\
& \overset{|D\eta| \leq \frac{2}{\delta},\, 0 \leq \eta \leq 1}{\leq} \quad \left(4 \left(\frac{2}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{\delta^2} \right) \int_\Omega u^2 \, dx + \delta^2 \int_\Omega f^2 \, dx \\
& \leq \quad \frac{17}{\delta^2} \int_\Omega u^2 \, dx + \delta^2 \int_\Omega f^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

□

Mit diesem Lemma können wir das nächste Theorem beweisen.

Theorem 4 Für ein offenes und beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\Delta u = f$ mit $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$, dass $u \in W^{2,2}(\Omega')$ und

$$
\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.7}
$$

Dabei hängt die Konstante von d und $\delta := \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ab.

Beweis. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, $\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{4}$ und $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega'') \geq \frac{\delta}{4}$. Sei außerdem $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} v \subset\subset \Omega''$, sodass (2.1) erfüllt ist. Wir wählen uns $h > 0$ so, dass

$$
0 < 2h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial\Omega'').
$$

Wegen dieser Wahl und Lemma 11 dürfen wir auch $\Delta_i^{-h} v$ für $i = 1, \dots, d$ anstelle von v in (2.1) einsetzen:

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega''} Du \cdot D(\Delta_i^{-h} v) \, dx \quad & = \quad \int_{\Omega''} f \, \Delta_i^{-h} v \, dx \\
& \overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} \quad \left(\int_{\Omega''} f^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega''} (\Delta_i^{-h} v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \overset{(*)}{\leq} \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} \, \|D_i v\|_{L^2(\Omega'')} \\
& \leq \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^d \int_{\Omega''} |D_i v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} \, \|Dv\|_{L^2(\Omega'')} ,
\end{aligned}
$$

wobei wir in $(*)$ die Wahl von h, $\operatorname{supp} v \subset\subset \Omega''$ und die Ungleichung (2.2) benutzt haben. Es gilt also

$$
-\int_{\Omega''} Du \cdot D(\Delta_i^{-h} v) \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \, \|Dv\|_{L^2(\Omega'')} . \tag{2.8}
$$

Außerdem brauchen wir

$$\begin{aligned}\int_{\Omega''} D\left(\Delta_i^h u\right)\cdot Dv\,dx &= \int_{\Omega''}\frac{1}{h}\left(Du(x+he_i)-Du(x)\right)\cdot Dv\,dx\\ &= \int_{\Omega''}\Delta_i^h\left(Du\right)\cdot Dv\,dx\\ &\overset{(**)}{=} -\int_{\Omega''} Du\cdot D\left(\Delta_i^{-h}v\right)\,dx.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Wir zeigen $(**)$ für eine Dimension: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega''} D_j u\,\Delta_i^{-h}(D_j v)\,dx =\\ =\ &\frac{1}{(-h)}\int_{\Omega''} D_j u(x)\,D_j v(x-he_i)\,dx-\frac{1}{(-h)}\int_{\Omega''} D_j u(x)\,D_j v(x)\,dx\\ =\ &\frac{1}{(-h)}\int_{\Omega''} D_j u(x+he_i)\,D_j v(x)\,dx-\frac{1}{(-h)}\int_{\Omega''} D_j u(x)\,D_j v(x)\,dx\\ =\ &\frac{1}{(-h)}\int_{\Omega''}\left(D_j u(x+he_i)-D_j u(x)\right)D_j v(x)\,dx\\ =\ &-\int_{\Omega''}\Delta_i^h(D_j u)\,D_j v\,dx.\end{aligned}$$

Aus (2.8) und (2.9) erhalten wir

$$\int_{\Omega''} D\left(\Delta_i^h u\right)\cdot Dv\,dx \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|Dv\|_{L^2(\Omega'')}\,.\tag{2.10}$$

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 12 sei nun $\eta\in C_0^1(\Omega'')$ mit $0\le\eta\le 1$, $|D\eta|\le\frac{8}{\delta}$ und $\eta(x)=1$ für $x\in\Omega'$. Wir setzen

$$v := \eta^2\Delta_i^h u.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\int_{\Omega''}\left|\eta D(\Delta_i^h u)\right|^2 dx &\overset{\substack{\text{Produkt-}\\ \text{regel}}}{=} \int_{\Omega''} D(\Delta_i^h u)\cdot D(\eta^2\Delta_i^h u)\,dx-2\int_{\Omega''}\eta D(\Delta_i^h u)\cdot\Delta_i^h u D\eta\,dx\\ &\overset{(2.10)}{\le} \|f\|_{L^2(\Omega)}\left\|D(\eta^2\Delta_i^h u)\right\|_{L^2(\Omega'')}+\\ &\quad+\frac{1}{4}\left\|\eta D(\Delta_i^h u)\right\|_{L^2(\Omega'')}^2+4\left\|\Delta_i^h u D\eta\right\|_{L^2(\Omega'')}^2,\end{aligned}\tag{2.11}$$

wobei wir für den zweiten Term die Hölder-Ungleichung und die Ungleichung von Schwarz in der Form

$$ab\le\frac{1}{2\epsilon}a^2+\frac{\epsilon}{2}b^2$$

für $\epsilon = 4$ benutzt haben.
Außerdem erhält man nach einigen Umformungen und Abschätzungen des ersten Summanden der rechten Seite von (2.11)

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(\Omega)} \left\|D(\eta^2 \Delta_i^h u)\right\|_{L^2(\Omega'')} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \, 2\sqrt{d} \left(\left\|\Delta_i^h u D\eta\right\|_{L^2(\Omega'')} + \left\|\eta D(\Delta_i^h u)\right\|_{L^2(\Omega'')} \right) \\
&\leq d \, \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Delta_i^h u D\eta\right\|^2_{L^2(\Omega'')} + \\
&\quad + 4d \, \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4} \left\|\eta D(\Delta_i^h u)\right\|^2_{L^2(\Omega'')} ,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

wobei wir im letzten Schritt die Ungleichung von Schwarz für $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{d}}$ bzw. $\epsilon = \frac{1}{4\sqrt{d}}$ verwendet haben.
Insgesamt bekommen wir aus (2.11) und (2.12)

$$\left\|\eta D(\Delta_i^h u)\right\|^2_{L^2(\Omega'')} \quad \leq \quad 5d \, \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \left\|\eta D(\Delta_i^h u)\right\|^2_{L^2(\Omega'')} + 5 \underbrace{\sup |D\eta|^2 \, \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega'')}}_{(***)} .$$

Für $(***)$ haben wir durch Wahl von $h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \eta, \partial\Omega'')$ das Lemma 11 zusammen mit der Tatsache benutzt, dass $\operatorname{supp} \eta \subset\subset \Omega''$. Bringen wir den Term mit Koeffizient $\frac{1}{2}$ auf die linke Seite und multiplizieren wir die ganze Gleichung anschließend mit 2, so erhalten wir wegen $\eta \equiv 1$ auf Ω' und $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a + b$ $(a, b \geq 0)$

$$\left\|D(\Delta_i^h u)\right\|_{L^2(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sup |D\eta| \, \|D_i u\|_{L^2(\Omega'')} \right) .$$

Wegen der Vertauschbarkeit von Differenzenquotient und Ableitung folgt mit der Bemerkung nach Lemma 11 für $h \to 0$, dass

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\delta} \|D_i u\|_{L^2(\Omega'')} \right) .$$

$$\overset{\text{Lemma 12}}{\Rightarrow} \left\|D^2 u\right\|_{L^2(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\sqrt{17}}{\delta^2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) .$$

Also erhalten wir hieraus die gewünschte Abschätzung für $\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\Omega')}$ und aus Lemma 12 die Abschätzung für $\|Du\|_{L^2(\Omega')}$. Damit bekommen wir schließlich

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} &= \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega')} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega')} + \left\|D^2 u\right\|^2_{L^2(\Omega')} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\|_{L^2(\Omega')} + \|Du\|_{L^2(\Omega')} + \left\|D^2 u\right\|_{L^2(\Omega')} \\
&\leq \text{const} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) .
\end{aligned}$$

□

Verlangt man zusätzlich $f \in W^{k,2}(\Omega)$ für $k \geq 1$, so erhält man das folgende Resultat.

Theorem 5 Für ein offenes und beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\Delta u = f$ mit $f \in W^{k,2}(\Omega)$. Dann gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$, dass $u \in W^{k+2,2}(\Omega')$ und

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq \text{const}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}\right). \tag{2.13}$$

Dabei hängt die Konstante von d, k und $\delta := \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ab.

Beweis. Zunächst für $k = 1$. Wegen der Voraussetzung gilt insbesondere, dass $f \in L^2(\Omega)$. Aus Theorem 4 folgern wir also, dass $u \in W^{2,2}(\Omega')$ und

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq \text{const}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Für alle $i = 1, \dots, d$ ist damit $D_i u \in W^{1,2}(\Omega')$. Man setzt nun $D_i v$ statt v in (2.1) für Ω' statt Ω ein und erhält mit der Definition der schwachen Ableitung und der Vertauschbarkeit zweier schwacher Ableitungen (die leicht zu zeigen ist)

$$\int_{\Omega'} D(D_i u) \cdot Dv \, dx = -\int_{\Omega'} D_i f \, v \, dx.$$

Weil $D_i f \in L^2(\Omega')$, können wir Theorem 4 für $D_i u$ statt u, $D_i f$ statt f und Ω' statt Ω anwenden. Es folgt also $D_i u \in W^{2,2}(\Omega'')$ bzw. $u \in W^{3,2}(\Omega'')$ für $\Omega'' \subset\subset \Omega'$ und

$$\begin{aligned}
\|D_i u\|_{W^{2,2}(\Omega'')} &\leq \text{const}\left(\|D_i u\|_{L^2(\Omega')} + \|D_i f\|_{L^2(\Omega')}\right) \\
&\leq \text{const}\left(\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} + \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}\right) \\
&\overset{\text{Theorem 4}}{\leq} \text{const}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt letztendlich

$$\|u\|_{W^{3,2}(\Omega'')} \leq \text{const}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}\right).$$

Für die Induktion von k nach $k+1$ benötigen wir nun keine neuen Ideen mehr. Aus $u \in W^{k+2,2}(\widetilde{\Omega})$ mit $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ folgt $D_i u \in W^{k+1,2}(\Omega)$ und es gelte wie oben

$$\int_{\widetilde{\Omega}} D(D_i u) \cdot Dv \, dx = -\int_{\widetilde{\Omega}} D_i f \, v \, dx.$$

Man nimmt an, dass $f \in W^{k+1,2}(\widetilde{\Omega})$. Es folgt induktiv, dass $D_i u \in W^{k+2,2}(\widetilde{\Omega}')$ für $\widetilde{\Omega}' \subset\subset \widetilde{\Omega}$, und damit ist $u \in W^{(k+1)+2,2}(\widetilde{\Omega}')$. Der Rest funktioniert ganz analog. □

Mit den bisherigen Resultaten folgern wir nun eine Aussage, mit der wir unter bestimmten Voraussetzungen schwache Lösungen als glatte Funktionen identifizieren können.

Korollar 4 Für ein offenes und beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\Delta u = f$ mit $f \in \bigcap_{k\geq 1} W^{k,2}(\Omega)$, d.h. $f \in C^\infty(\Omega)$. Dann ist auch $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis. Zur Erinnerung: Wir haben Korollar 2 mit der Hilfe von Korollar 1 gezeigt. Analog lässt sich eine entsprechende Aussage, die aus Korollar 3 folgt, beweisen:
Ist $f \in W^{k,2}(\Omega)$ für alle $k \geq 1$, so gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$, dass $f \in C^\infty(\overline{\Omega'})$, d.h. $f \in C^\infty(\Omega)$. Wir können also schreiben:

$$\bigcap_{k\geq 1} W^{k,2}(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega). \tag{2.14}$$

Weil $f \in \bigcap_{k\geq 1} W^{k,2}(\Omega)$, folgt mit Theorem 5, dass für alle $k \geq 1$

$$u \in W^{k+2,2}(\Omega') \qquad \text{für alle} \quad \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Wegen Theorem 4 gilt das auch für $k = 0$. Aus der Voraussetzung können wir außerdem leicht sehen, dass $u \in W^{1,2}(\Omega')$.

$$\Rightarrow u \in W^{m,2}(\Omega') \qquad \text{für alle} \quad m \geq 1 \quad \text{und} \quad \Omega' \subset\subset \Omega$$

$$\overset{(2.14)}{\Longrightarrow} u \in C^\infty(\Omega).$$

□

2.3 Regularität schwacher Lösungen elliptischer Gleichungen

Am Beispiel der Poisson-Gleichung haben wir uns im vorangegangenen Unterabschnitt die Regularitätstheorie erarbeitet. Jetzt wollen wir die gewonnenen Resultate auf Gleichungen der Form

$$Lu(x) = f(x) \tag{2.15}$$

auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ für

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^j}\left[a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}u(x)\right] + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^j}\left[b^j(x)u(x)\right] + \sum_{i=1}^{d} c^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}u(x) + d(x)u(x)$$

übertragen, wobei wir folgende Annahmen machen:

A1 Es soll ein $\lambda > 0$ geben, sodass $\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda\,|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$. Die Gleichung soll also *elliptisch* sein.

A2 Die Beträge der Koeffizienten $a^{ij}(x), b^j(x), c^i(x)$ und $d(x)$ sollen für alle $x \in \Omega$ und $i, j = 1, \ldots, d$ nach oben durch eine gemeinsame Konstante K beschränkt sein.

Definition Man nennt $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine *schwache Lösung* der Gleichung (2.15) mit $f \in L^2(\Omega)$, falls für alle $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^d a^{ij} D_i u D_j v + \sum_{j=1}^d b^j u \, D_j v - \left(\sum_{i=1}^d c^i D_i u + du \right) v \right] dx = - \int_\Omega f v \, dx. \tag{2.16}$$

Außerdem bezeichnen wir Lu mit $b^j, c^i, d \equiv 0$ als

$$Mu := \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x^j} \left[a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} u(x) \right].$$

Dabei definiert man eine schwachen Lösung von $Mu = f$ analog zu (2.16). Im Folgenden wird es ausreichen, schwache Lösungen von $Mu = f$ statt $Lu = f$ zu betrachten. Warum das funktioniert, werden wir später sehen. Als erstes zeigen wir eine analoge Aussage zu Lemma 12.

Lemma 13 Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $Mu = f$ mit $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$:

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega')} \leq \text{const} \, \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta^2 \, \|f\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.17}$$

wobei die Konstante jetzt von $\delta = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), \lambda, K$ und d abhängig ist.

Beweis. Wir setzen $\eta^2 u$ mit η wie im Beweis von Lemma 12 als „Testfunktion“ in (2.16) für $b^j, c^i, d \equiv 0$ ein und erhalten mit der Produktregel

$$- \int_\Omega f \eta^2 u \, dx = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^d \eta^2 a^{ij} D_i u \, D_j u + 2 \sum_{i,j=1}^d \eta a^{ij} u D_i u \, D_j \eta \right) dx. \tag{2.18}$$

Wegen **A1** ist

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta^2 \left| Du \right|^2 \, dx &\leq \frac{1}{\lambda} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \eta^2 a^{ij} D_i u \, D_j u \, dx \\
&\overset{(2.18)}{=} -\frac{1}{\lambda} \int_\Omega 2 \sum_{i,j=1}^d \eta a^{ij} u D_i u \, D_j \eta \, dx - \frac{1}{\lambda} \int_\Omega f \eta^2 u \, dx \qquad (2.19) \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \left| 2 \eta a^{ij} u D_i u \, D_j \eta \right| \, dx + \frac{1}{\lambda} \int_\Omega \left| f \eta \right| \left| \eta u \right| \, dx.
\end{aligned}$$

Für beide Summanden der rechten Seite von (2.19) wenden wir jeweils Youngs Ungleichung mit ϵ bzw. $\widetilde{\epsilon}$ an. Also gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \eta^2 |Du|^2 \, dx \quad &\leq \quad \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \left(\frac{\epsilon}{2} (2\eta a^{ij} D_i u)^2 + \frac{1}{2\epsilon} (u D_j \eta)^2 \right) dx + \frac{\widetilde{\epsilon}}{2\lambda} \int_\Omega \eta^2 f^2 \, dx + \\
&+ \quad \frac{1}{2\widetilde{\epsilon}\lambda} \int_\Omega \eta^2 u^2 \, dx \qquad \text{und mit}\, \epsilon = \frac{\lambda}{4K^2 d} \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{\epsilon} = 2\delta^2 \lambda \quad \text{ist das} \\
&\leq \quad \frac{1}{2} \int_\Omega \eta^2 |Du|^2 \, dx + \frac{2M^2 d^2}{\lambda^2} \int_\Omega u^2 |D\eta|^2 \, dx + \\
&+ \quad \delta^2 \int_\Omega \eta^2 f^2 \, dx + \frac{1}{4\lambda^2 \delta^2} \int_\Omega \eta^2 u^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

Das Integral mit dem Koeffizienten $\frac{1}{2}$ subtrahieren wir von beiden Seiten und multiplizieren die Ungleichung mit 2. Verwendet man anschließend die Eigenschaften von η, so folgt die Behauptung. $\square$

Um ein analoges Theorem zu Theorem 4 und 5 aufstellen zu können, werden einige zusätzliche Voraussetzungen benötigt. Neben der Forderung von **A1** stellt man weitere Bedingungen an die Koeffizienten $a^{ij}(x)$.

Theorem 6 Für ein offenes und beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $Mu = f$ mit $f \in W^{k,2}(\Omega)$. Es gelte die Bedingung **A1** und man nehme an, dass $a^{ij}(x) \in C^{k+1}(\Omega)$ für $i, j = 1, \ldots, d$.
Dann gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$:

$$u \in W^{k+2,2}(\Omega').$$

Falls es eine Konstante $M_k < \infty$ gibt, so dass $\left\| a^{ij} \right\|_{C^{k+1}(\Omega')} \leq M_k$ für alle $i, j = 1, \ldots, d$, so gilt außerdem

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \right), \tag{2.20}$$

wobei diese Konstante von d, λ, k, M_k und δ abhängt.

Mit $\left\| a^{ij} \right\|_{C^{k+1}(\Omega')}$ bezeichnen wir die Summe aller Supremumsnormen über Ω' von $D_\alpha a^{ij}$ für $|\alpha| \leq k + 1$.

Beweis. Wir wollen zunächst den Fall $k = 0$ betrachten.
Sei $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, $\text{dist}(\Omega'', \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{4}$ und $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega'') \geq \frac{\delta}{4}$. Für alle $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt nach (2.16) die Gleichung

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} \left[a^{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) \right] \, dx = - \int_\Omega f(x) v(x) \, dx. \tag{2.21}$$

Es sei $\operatorname{supp} v \subset\subset \Omega''$ und man wähle $h > 0$ mit $2h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial\Omega'')$. Wie im Beweis für die Poisson-Gleichung setzen wir $\Delta_l^{-h} v$ anstelle von v in (2.21) ein. Die linke Seite von (2.21) wird dann zu

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} \left[a^{ij}(x) D_i u(x) \frac{1}{(-h)} \left(D_j v(x - he_l) - D_j v(x) \right) \right] dx = \\
&= \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} \left[a^{ij}(x) D_i u(x) \frac{1}{(-h)} D_j v(x - he_l) \right] dx - \\
&\quad - \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} \left[a^{ij}(x) D_i u(x) \frac{1}{(-h)} D_j v(x) \right] dx \\
&= \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} \left[a^{ij}(x + he_l) D_i u(x + he_l) \frac{1}{(-h)} D_j v(x) \right] dx - \\
&\quad - \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} \left[a^{ij}(x) D_i u(x) \frac{1}{(-h)} D_j v(x) \right] dx \\
&= - \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} \left[\Delta_l^h \left(a^{ij} D_i u \right) D_j v \right] dx.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} \left[\Delta_l^h \left(a^{ij} D_i u \right) D_j v \right] dx = \int_{\Omega''} f(x) \Delta_l^{-h} v(x) \, dx.$$

Den Differenzenquotienten des Produkts $a^{ij} D_i u$ müssen wir umschreiben:

$$\Delta_l^h \left(\sum_{i=1}^{d} a^{ij} D_i u \right) = \sum_{i=1}^{d} \left[a^{ij}(x + he_l) \Delta_l^h D_i u(x) + (\Delta_l^h a^{ij}(x)) D_i u(x) \right].$$

Setze nun $\psi^j(x) := \sum_{i=1}^{d} (\Delta_l^h a^{ij}(x)) D_i u(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x + he_l) D_i \Delta_l^h u(x) \, D_j v(x) \, dx = &\int_{\Omega''} f(x) \Delta_l^{-h} v(x) \, dx - \\
&- \int_{\Omega''} \sum_{j=1}^{d} \psi^j(x) D_j v(x) \, dx.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Wegen der Wahl von h und $\operatorname{supp} v \subset\subset \Omega''$ können wir nun Lemma 11 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x+he_l) D_i \Delta_l^h u(x)\, D_j v(x)\, dx &\le \left[\sum_{j=1}^{d} \left\|\psi^j\right\|_{L^2(\Omega'')} + \|f\|_{L^2(\Omega'')}\right] \|Dv\|_{L^2(\Omega'')} \\ &\le c_1 \left[\|u\|_{W^{1,2}(\Omega'')} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right] \|Dv\|_{L^2(\Omega'')}\,, \end{aligned} \tag{2.23}$$

wobei die Konstante c_1 von d und M_0 abhängig ist.

Im Beweis von Theorem 4 haben wir an der entsprechenden Stelle (2.11) damit begonnen, $\left\|\eta D(\Delta_l^h u)\right\|^2_{L^2(\Omega'')}$ nach oben abzuschätzen. Genauso gehen wir auch jetzt vor. Wähle η wie im Beweis von Theorem 4. Wegen **A1** gilt

$$\lambda \int_\Omega \left|\eta D\left[\Delta_l^h u(x)\right]\right|^2 dx \le \int_\Omega \eta^2 \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x+he_l) \Delta_l^h\left[D_i u\right] \Delta_l^h\left[D_j u\right]. \tag{2.24}$$

Für $v := \eta^2 \Delta_l^h u$ wird die linke Seite von (2.22) bzw. (2.23) zu

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x+he_l) D_i\left[\Delta_l^h u\right] D_j\left[\eta^2 \Delta_l^h u\right] dx = \\ &= \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} \eta^2 a^{ij}(x+he_l) D_i\left[\Delta_l^h u\right] D_j\left[\Delta_l^h u\right] dx + \\ &\quad + \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} 2\eta a^{ij}(x+he_l) \Delta_l^h u\, D_i\left[\Delta_l^h u\right] D_j \eta\, dx. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Der zweite Summand der rechten Seite von (2.25) lässt sich mit der Hölder-Ungleichung, $\sum_{i=1}^d z_i \le \sqrt{d}\left(\sum_{i=1}^d z_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und Lemma 11 folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} 2\eta a^{ij}(x+he_l) \Delta_l^h u\, D_i\left[\Delta_l^h u\right] D_j \eta\, dx\right| \le \\ &\le \frac{16 M_0 d^{\frac{3}{2}}}{\delta} \left\|\eta D\left[\Delta_l^h u\right]\right\|_{L^2(\Omega'')} \|D_l u\|_{L^2(\Omega'')} \\ &\overset{\text{Young}}{\le} \frac{16 M_0 d^{\frac{3}{2}}}{\delta} \left(\frac{\epsilon}{2} \left\|\eta D\left[\Delta_l^h u\right]\right\|^2_{L^2(\Omega'')} + \frac{1}{2\epsilon} \|D_l u\|^2_{L^2(\Omega'')}\right) \\ &= \frac{\lambda}{4} \left\|\eta D\left[\Delta_l^h u\right]\right\|^2_{L^2(\Omega'')} + \frac{16^2 M_0^2 d^3}{\lambda \delta^2} \|D_l u\|^2_{L^2(\Omega'')}\,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

wobei wir $\epsilon = \frac{\lambda\delta}{32M_0 d^{\frac{3}{2}}}$ gesetzt haben. Bevor wir alle bisherigen Schritte miteinander kombinieren, benötigen wir noch weitere Abschätzungen. Wegen (2.23) gilt

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x+he_l) D_i \left[\Delta_l^h u\right] \; D_j \left[\eta^2 \Delta_l^h u\right] \, dx \leq \\
&\leq c_1 \left[\|u\|_{W^{1,2}(\Omega'')} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right] \left\| D\left[\eta^2 \Delta_l^h u\right]\right\|_{L^2(\Omega'')} \\
&\leq c_1 \left[\|u\|_{W^{1,2}(\Omega'')} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right] 2\sqrt{d} \left(\left\|\Delta_l^h u D\eta\right\|_{L^2(\Omega'')} + \left\|\eta D\left[\Delta_l^h u\right]\right\|_{L^2(\Omega'')}\right) \\
&\leq \frac{\lambda}{4} \left\|\eta D\left[\Delta_l^h u\right]\right\|^2_{L^2(\Omega'')} + c_2 \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega'')} + \|D_l u\|^2_{L^2(\Omega'')}\right),
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

wobei wir in der letzten Zeile von (2.27) Lemma 11 und Youngs Ungleichung (viermal) verwendet haben. Die Konstante c_2 hängt von c_1 und λ ab. Nun benutzen wir alle bisherigen Ergebnisse und erhalten

$$
\begin{aligned}
\lambda \left\|\eta D\left[\Delta_l^h u\right]\right\|^2_{L^2(\Omega'')} &\overset{(2.24),(2.25)}{\leq} \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x+he_l) D_i \left[\Delta_l^h u\right] \; D_j \left[\eta^2 \Delta_l^h u\right] dx + \\
&\qquad + \left| \int_{\Omega''} \sum_{i,j=1}^{d} 2\eta a^{ij}(x+he_l) \Delta_l^h u \, D_i \left[\Delta_l^h u\right] D_j \eta \, dx \right| \\
&\overset{(2.26),(2.27)}{\leq} \frac{\lambda}{2} \left\|\eta D\left[\Delta_l^h u\right]\right\|^2_{L^2(\Omega'')} + \\
&\qquad + c_3 \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega'')} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega'')}\right).
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Wir bringen jetzt dem Term mit Koeffizient $\frac{\lambda}{2}$ auf die linke Seite von (2.28), multiplizieren die Gleichung mit 2, benutzen Lemma 13 für $\|Du\|^2_{L^2(\Omega'')}$ und erhalten wie im Beweis von Theorem 4 für $h \to 0$

$$\left\|D^2 u\right\|^2_{L^2(\Omega')} \leq \text{const} \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \right).$$

Schließlich verfährt man genauso wie im Beweis von Theorem 4 und erhält die gewünschte Aussage für $k = 0$.

Wir nehmen nun an, die Aussage sei für k gezeigt. Es gelte also

$$u \in W^{k+2,2}(\widetilde{\Omega}) \quad \text{für} \quad \widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega, \quad f \in W^{k,2}(\Omega), \tag{2.29}$$

und

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\widetilde{\Omega})} \leq \text{const} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \right). \tag{2.30}$$

Um die Aussage für $k+1$ zu zeigen, dürfen wir zusätzlich annehmen, dass $f \in W^{k+1,2}(\Omega)$ und $a^{ij} \in C^{k+2}(\Omega)$. Die Annahme (2.29) liefert

$$D_l u \in W^{k+1,2}(\widetilde{\Omega}) \quad \text{für } l = 1, \ldots, d.$$

Wir setzen nun $D_l v$ statt v in (2.16) ein und erhalten

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} D_i u D_j \left(D_l v\right) \, dx = -\int_{\widetilde{\Omega}} f \, D_l v \, dx.$$

$$\Rightarrow -\int_{\widetilde{\Omega}} \sum_{i,j=1}^{d} D_l \left(a^{ij} D_i u\right) D_j v \, dx = \int_{\widetilde{\Omega}} D_l f \, v \, dx.$$

Mit der Produktregel bekommen wir

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \sum_{i,j=1} D_l a^{ij} D_i u D_j v \, dx + \int_{\widetilde{\Omega}} \sum_{i,j=1} a^{ij} D_i \left(D_l u\right) D_j v \, dx = -\int_{\widetilde{\Omega}} D_l f \, v \, dx. \tag{2.31}$$

Die grundlegende Idee ist wie im Beweis von Theorem 5, schwache Lösungen der Gleichung für $D_l u$ statt u und $D_l f$ statt f zu betrachten. Wegen dem ersten Summanden der linken Seite von (2.31) können wir noch nicht analog wie bisher verfahren. Am Anfang dieses Unterabschnitts haben wir allerdings behauptet, es genüge, Gleichungen der Form $Mu = f$ statt $Lu = f$ zu betrachten. Die versprochene Rechtfertigung für diesen Schritt wird im Anschluss dieses Beweises nachgeliefert.
Diesen Ansatz wollen wir auch für (2.31) verwenden und lassen den ersten Summanden weg. Weil $D_l u \in W^{k+1,2}(\widetilde{\Omega})$ und $D_l f \in W^{k,2}(\widetilde{\Omega})$, folgt dann mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$D_l u \in W^{k+2,2}(\widetilde{\Omega}') \quad \text{für } \widetilde{\Omega}' \subset\subset \widetilde{\Omega} \qquad \left(\Rightarrow u \in W^{k+3,2}(\widetilde{\Omega}')\right)$$

für $l = 1, \ldots, d$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\|D_l u\|_{W^{k+2,2}(\widetilde{\Omega}')} &\leq \operatorname{const}\left(\|D_l u\|_{L^2(\widetilde{\Omega})} + \|D_l f\|_{W^{k,2}(\widetilde{\Omega})}\right) \\
&\leq \operatorname{const}\left(\|u\|_{W^{k+2,2}(\widetilde{\Omega})} + \|f\|_{W^{k+1,2}(\widetilde{\Omega})}\right) \\
&\overset{(2.30)}{\leq} \operatorname{const}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k+1,2}(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\|u\|_{W^{k+3,2}(\widetilde{\Omega}')} \leq \operatorname{const}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k+1,2}(\Omega)}\right).$$

□

Unser Ziel ist es, eine zu Korollar 4 entsprechende Aussage für $Lu = f$ zu zeigen. Dazu schreiben wir (2.16) als

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} D_i u D_j v \, dx = \int_\Omega \psi \, v \, dx,$$

wobei

$$\psi := \sum_{i=1}^{d} \left(b^i + c^i\right) D_i u + \left[\sum_{i=1}^{d} D_i b^i + d\right] u - f.$$

Nach Annahme ist $\psi \in L^2(\Omega)$. Also ist u eine schwache Lösung von

$$Mu = \psi \qquad \text{in} \quad \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Mit Theorem 6 für $k = 0$ erhalten wir $u \in W^{2,2}(\Omega'')$ für $\Omega'' \subset\subset \Omega'$. Dann folgern wir, dass auch ψ lokal in $W^{1,2}$ enthalten ist. Benutzen wir nun wieder das Theorem, dann sehen wir, dass u lokal in $W^{3,2}$ enthalten ist. Iterativ erhält man, dass u für jedes $m \in \mathbb{N}$ lokal in $W^{m,2}$ enthalten ist.
Schließlich können wir das folgende Resultat formulieren:

Korollar 5 Sei u eine schwache Lösung von $Lu = f$ mit $f \in \bigcap_{m\geq 1} W^{m,2}(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$ für ein offenes und beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Alle Koeffizienten $a^{ij}(x), \ldots, d(x)$ seien in $C^\infty(\Omega)$ und es gelte die Annahme **A1**.
Dann ist auch $u \in C^\infty(\Omega)$.

3 Ausblick: Innere L^p-Regularitätstheorie

Die bisherigen Methoden lassen sich für $1 < p < \infty$ leider nicht direkt auf die L^p-Regularitätstheorie übertragen und dennoch ähneln sich die entsprechenden Resultate sehr. Die zu (2.7) analoge Ungleichung lautet bespielsweise

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq \text{const}\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right)$$

für $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wir wollen in diesem Kapitel einen kleinen Einblick in die innere L^p-Regularitätstheorie geben und dabei in erster Linie die Methoden zum Beweis der Calderon-Zygmund-Ungleichung vorstellen.

3.1 Calderon-Zygmund-Ungleichung

Um das Theorem formulieren zu können, benötigen wir erst den Begriff der Fundamentallösung und des Newton-Potentials.

Definition Wir setzen für $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq y$

$$\Gamma(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|x-y| & \text{für } d = 2 \\ \\ \frac{1}{d(2-d)\omega_d} |x-y|^{2-d} & \text{für } d > 2 \end{cases}$$

und nennen Γ die *Fundamentallösung der Laplace-Gleichung*. Die Berechtigung für diesen Namen ergibt sich aus der Tatsache, dass $\Delta\Gamma = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{y\}$ für Γ als Funktion von x. Das *Newton-Potential* von f ist dann definiert als

$$\omega(x) := \int_\Omega \Gamma(x,y) f(y)\, dy.$$

Theorem 7 (Calderon-Zygmund-Ungleichung) Sei $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, und ω das Newton-Potential von f. Dann ist $\omega \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta\omega = f$ fast überall in Ω, und es gilt

$$\left\|D^2\omega\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{const}\, \|f\|_{L^p(\Omega)}\,, \tag{3.1}$$

wobei die Konstante von p und der Dimension d abhängt. Für $p = 2$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|D^2\omega\right|^2 dx = \int_\Omega f^2\, dx.$$

Mit der Gleichung für $p = 2$ könnte man Theorem 4 bzw. 5 auf eine neue Art beweisen. Dafür sei auf das Buch „Partial Differential Equations“ von J.Jost [1] verwiesen. Wir wollen den Fall $p \neq 2$ betrachten. Für den Beweis des Theorems 7 benötigen wir die sogenannte „Cube Decomposition Procedure“ und das Interpolationstheorem von Marcinkiewicz.

3.1.1 Cube Decomposition

Wie die Übersetzung des Begriffs „Cube Decomposition“ schon erahnen lässt, geht es bei dieser Methode darum, einen Würfel in $\mathbb{R}^d$ auf eine spezielle Weise zu zerlegen. Dazu betrachte man einen solchen Würfel K_0 und eine nicht-negative integrierbare Funktion f, die auf K_0 definiert ist. Sei außerdem $t > 0$ derart, dass

$$\int_{K_0} f\,dx \leq t\,|K_0|\,.$$

Man zerlegt nun K_0 in 2^d kongruente Würfel K, deren Inneres paarweise disjunkt ist. Gilt für einen solchen Würfel

$$\int_K f\,dx \leq t\,|K|\,,$$

so wird die eben beschriebene Prozedur wiederholt. Ist hingegen

$$\int_K f\,dx > t\,|K|\,,$$

so fassen wir solche Würfel in der Menge $\mathcal{S}$ zusammen. Für jedes $K \in \mathcal{S}$ sei $\hat{K}$ derjenige Würfel, aus dessen Unterteilung K hervorgeht. Es gilt dann $\frac{|\hat{K}|}{|K|} = 2^d$ und wir erhalten

$$t < \frac{1}{|K|}\int_K f\,dx \leq \frac{1}{|K|}\int_{\hat{K}} f\,dx = \frac{\left|\hat{K}\right|}{|K|}\frac{1}{\left|\hat{K}\right|}\int_{\hat{K}} f\,dx \overset{\hat{K}\notin\mathcal{S}}{\leq} \frac{\left|\hat{K}\right|}{|K|}t = 2^d t.$$

Wir setzen nun $F := \bigcup_{K\in\mathcal{S}} K$ und $G := K_0 \backslash F$. Nach Lebesgues „Differentiation Theorem“ (siehe dazu beispielsweise „Partial Differential Equations“ (Appendix E.4) von L.C.Evans [3]) gilt

$$f \leq t \quad \text{fast überall in} \quad G.$$

Man definiert außerdem die Menge $\hat{F} := \bigcup_{K\in\mathcal{S}} \hat{K}$, für welche wieder die Ungleichung

$$\int_{\hat{F}} f\,dx \leq t\left|\hat{F}\right|$$

gilt, weil $K \notin \mathcal{S}$. Ist nun f gleich der charakteristischen Funktion χ_A für eine messbare Teilmenge A von K_0, so erhält man aus den bisherigen Resultaten insbesondere

$$|A| = \left|A \cap \hat{F}\right| \leq t\left|\hat{F}\right|.$$

3.1.2 Interpolationstheorem von Marcinkiewicz

Für eine messbare Funktion f auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definieren wir für $t > 0$

$$\mu_f(t) := |\{x \in \Omega|\,|f(x)| > t\}|\,.$$

Diese Funktion μ besitzt zwei wichtige Eigenschaften.

Lemma 14 Für alle $p > 0$ und f mit $|f|^p \in L^1(\Omega)$ gilt

$$\mu_f(t) \leq t^{-p} \int_\Omega |f|^p \, dx \tag{3.2}$$

und

$$\int_\Omega |f|^p \, dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_f(t) dt. \tag{3.3}$$

Beweis. Auf $\{x \in \Omega | \, |f(x)| > t\}$ gilt $t^p \leq |f(x)|^p$. Daraus erhalten wir

$$t^p \underbrace{|\{x \in \Omega| \, |f(x)| > t\}|}_{=\mu_f(t)} \leq \int_{\{x \in \Omega| \, |f(x)|>t\}} |f(x)|^p \, dx \leq \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \qquad \forall t > 0.$$

$\Rightarrow$ (3.2).
Um (3.3) zu zeigen, nehmen wir zunächst an, dass $f \in L^1(\Omega)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)| \, dx &= \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} dt \, dx = \int_\Omega \int_0^\infty \chi_{\{|f(x)|>t\}}(t) dt \, dx = \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \int_\Omega \chi_{\{|f(x)|>t\}}(x) dx \, dt = \\ &= \int_0^\infty \mu_f(t) \, dt, \end{aligned}$$

wobei χ_A die charakteristische Funktion einer messbaren Menge A sein soll. Daraus folgt (3.3) für $p = 1$.
Für ein allgemeines $p > 0$ sieht man (3.3) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p t^{p-1} \mu_f(t) \, dt &= \int_0^\infty \int_\Omega p t^{p-1} \chi_{\{|f(x)|>t\}}(x) dx \, dt = \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} p t^{p-1} dt \, dx = \int_\Omega [t^p]_0^{|f(x)|} \, dx = \\ &= \int_\Omega |f(x)|^p \, dx. \end{aligned}$$

□

Mit dieser Aussage kann man das folgende Theorem beweisen.

Lemma 15 (Interpolationstheorem von Marcinkiewicz) Sei T eine lineare Abbildung von $L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ in sich selbst mit $1 \leq q < r < \infty$. Man nehme an, es existieren Konstanten T_1 und T_2, sodass für alle $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ und alle $t > 0$ gilt:

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{T_1 \|f\|_{L^q(\Omega)}}{t} \right)^q \quad \text{und} \quad \mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{T_2 \|f\|_{L^r(\Omega)}}{t} \right)^r. \tag{3.4}$$

Dann lässt sich T für $q < p < r$ zu einer beschränkten linearen Abbildung von $L^p(\Omega)$ in sich selbst fortsetzen und es gilt für alle $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ und α mit $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{r}$

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{const}\, T_1^\alpha\, T_2^{1-\alpha}\, \|f\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{3.5}$$

Beweisskizze. Sei $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ und $s > 0$. Definiere

$$f_1(x) = f(x)\chi_{\{|f(x)|>s\}}(x) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = f(x)\chi_{\{|f(x)|\leq s\}}(x).$$

Dann ist $f = f_1 + f_2$. Wegen der Linearität von T und der Ungleichung $|Tf| \leq |Tf_1| + |Tf_2|$ ist

$$\begin{aligned} \mu_{Tf}(t) &\leq \mu_{Tf_1}(\frac{t}{2}) + \mu_{Tf_2}(\frac{t}{2}) \\ &\overset{(3.4)}{\leq} \left(\frac{2T_1}{t}\right)^q \|f_1\|^q_{L^q(\Omega)} + \left(\frac{2T_2}{t}\right)^r \|f_2\|^r_{L^r(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Tf|^p\, dx &\overset{(3.3)}{=} p\int_0^\infty t^{p-1}\mu_{Tf}(t)\, dt \\ &\overset{(3.6)}{\leq} p(2T_1)^q \int_0^\infty t^{p-1-q}\left(\int_{\{|f|>s\}} |f|^q\, dx\right) dt+ \\ &\quad + p(2T_2)^r \int_0^\infty t^{p-1-r}\left(\int_{\{|f|\leq s\}} |f|^r\, dx\right) dt. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sei $A > 0$ eine Konstante, die wir aber erst später bestimmen wollen. Wir betrachten nun s als eine Funktion von t, d.h. wir setzen $s = \frac{t}{A}$. Mit Fubini lässt sich die Ungleichung (3.7) zu

$$\|Tf\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \left[\frac{p}{p-q}(2T_1)^q A^{p-q} + \frac{p}{r-p}(2T_2)^r A^{p-r}\right] \|f\|^p_{L^p(\Omega)}\,. \tag{3.8}$$

umformen.
Man wählt nun

$$A := 2T_1^{-\frac{q}{r-q}} T_2^{\frac{r}{r-q}}$$

und erinnert sich daran, dass $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{r}$. Daraus erhält man $\alpha = \frac{q(r-p)}{p(r-q)}$ und aus (3.8) schließlich

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \leq \underbrace{2\left[\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p}\right]^{\frac{1}{p}}}_{\text{const}(p,q,r)} T_1^\alpha T_2^{1-\alpha}\, \|f\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

□

3.1.3 Beweisskizze zur Calderon-Zygmund-Ungleichung

Angenommen, wir hätten den Fall $p = 2$ beweisen. Dann definieren wir für den allgemeinen Fall $1 < p < \infty$ den linearen Operator $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ durch

$$Tf = D_{ij}\omega$$

für festes i und j. Wegen (3.1) für $p = 2$ und Lemma 14 erhält man

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{t} \right)^2 . \tag{3.9}$$

Es gilt außerdem die Ungleichung

$$\mu_{Tf}(t) \leq \frac{C\,\|f\|_{L^1(\Omega)}}{t}, \tag{3.10}$$

wobei die Konstante C von d abhängt. Um (3.10) zu zeigen, setzen wir $f = 0$ außerhalb von Ω und wählen einen Würfel K_0 mit $\Omega \subset K_0$, sodass

$$\int_{K_0} f\,dx \leq t\,|K_0|\,.$$

Wir zerlegen K_0 mithilfe der „Cube Decomposition“-Methode und erhalten so eine Folge von Würfeln $\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$ mit der Eigenschaft

$$t < \frac{1}{|K_l|} \int_{K_l} |f|\,dx < 2^d t \quad \text{und} \quad |f| \leq t \quad \text{in} \quad G = K_0 \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l.$$

Der nächste Schritt ist es, f in einen „guten“ Teil g und einen „schlechten“ Teil $b := f - g$ aufzuteilen, wobei

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in G \\ \frac{1}{|K_l|}\int_{K_l} f\,dx & \text{für } x \in K_l,\ \text{l=1,2,\dots} \end{cases}$$

Es folgt $|g| \leq 2^d t$ fast überall, $b(x) = 0$ für $x \in G$ und $\int_{K_l} b\,dx = 0$ für jedes l. Weil T linear ist, gilt $Tf = Tg + Tb$ und wir erhalten

$$\mu_{Tf}(t) \leq \mu_{Tg}(\frac{t}{2}) + \mu_{Tb}(\frac{t}{2}).$$

Mithilfe einiger Abschätzungen der rechten Seite bekommt man schließlich (3.10).
Wegen (3.9) und (3.10) sind die Voraussetzungen des Interpolationstheorems für $q = 1$ und $r = 2$ erfüllt. Daraus erhält man für $1 < p \leq 2$ und $f \in L^2(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{const}\ \|f\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

wobei die Konstante von d und p abhängt. Diese Ungleichung lässt sich für $p > 2$ erweitern. Dazu seien $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (Tf) g \, dx &= \int_\Omega D_{ij}\omega \, g \, dx = \int_\Omega \omega D_{ij} g \, dx \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) D_{ij} g \, dx dy \\
&= \int_\Omega f(y)(Tg)(y) \, dy \\
&\overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} \|f\|_{L^p(\Omega)} \|Tg\|_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weil $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$, erhalten wir

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} = \sup_{\|g\|_q = 1} \left[\int_\Omega (Tf) g \, dx \right] \leq \sup_{\|g\|_q = 1} \|f\|_{L^p(\Omega)} \|Tg\|_{L^q(\Omega)} .$$

Weil $p > 2$, ist $q < 2$ und wir können obiges Resultat für q statt p und g statt f anwenden. Es folgt

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \leq c(d,q) \sup_{\|g\|_q = 1} \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} = c(d,q) \|f\|_{L^p(\Omega)} .$$

Da q von p abhängt, erhalten wir die Behauptung durch Approximation. □

3.2 Bemerkungen zur L^p-Regularitätstheorie

Mit Theorem 7 lässt sich eine zu (3.1) entsprechende Ungleichung für u und Δu folgern:

$$\left\| D^2 u \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{const} \, \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} .$$

Diese ist für den Beweis der L^p-Version von Theorem 4 bzw. des analogen Theorems für $Lu = f$ von großem Nutzen, denn damit erhält man nach einigen Überlegungen

$$\begin{aligned}
&\left\| D^2 u \right\|_{L^p(B_{\sigma R})} \leq \\
&\leq \text{const} \left(\|f\|_{L^p(B_R)} + \frac{1}{(1-\sigma)R} \|Du\|_{L^p(B_{\frac{1}{2}(1+\sigma)R})} + \frac{1}{(1-\sigma)^2 R^2} \|u\|_{L^p(B_R)} \right),
\end{aligned}$$

wobei $B_R = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ für ein festes $x_0 \in \Omega' \subset\subset \Omega$ und $\sigma \in (0,1)$, solange R genügend klein gewählt ist. Im zweiten Teil des Beweises führt man folgende Notation ein:

$$\Phi_k = \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k \left\| D^k u \right\|_{L^p(B_{\sigma R})}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Aus obiger Ungleichung folgt damit

$$\Phi_2 \leq \text{const} \left(R^2 \|f\|_{L^p(B_R)} + \Phi_1 + \Phi_0 \right).$$

Man kann zeigen, dass die Φ_k die Interpolationsungleichung

$$\Phi_1 \leq \epsilon\Phi_2 + \frac{\text{const}}{\epsilon}\Phi_0$$

erfüllen. Insgesamt ergibt sich

$$\Phi_2 \leq \text{const}\left(R^2 \|f\|_{L^p(B_R)} + \Phi_0\right), \text{d.h.}$$

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^p(B_{\sigma R})} \leq \frac{\text{const}}{(1-\sigma)^2 R^2}\left(R^2 \|f\|_{L^p(B_R)} + \|u\|_{L^p(B_R)}\right).$$

Man setzt nun $\sigma = \frac{1}{2}$ und überdeckt Ω' mit endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{R}{2}$ (mit genügend kleinem R) und erhält somit die Abschätzung

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq \text{const}\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right) \tag{3.11}$$

für $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Abschließende Bemerkungen

Ausgehend von schwachen Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen, die zunächst nirgends klassisch differenzierbar sein mussten, haben wir uns Kriterien erarbeitet, um sie schließlich doch als klassische glatte Lösungen zu identifizieren. In den Räumen $L^2(\Omega)$ und $L^p(\Omega)$ sind wir dabei unterschiedlichen Methoden begegnet. Die L^p-Regularitätstheorie scheint zunächst nur eine unbrauchbare Verallgemeinerung der L^2-Regularitätstheorie zu sein; sie wird allerdings für die Behandlung vieler nichtlinearer partieller Differentialgleichungen unentbehrlich.
Diese Arbeit hat sich nur mit der inneren Regularität beschäftigt, also ist es nur selbstverständlich sich zu fragen, inwiefern es sich mit der Regularität auf $\partial\Omega$ verhält. Um dafür eine entsprechende Theorie zu entwickeln, verlangt man von $\partial\Omega$, eine $(d-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ der Klasse C^k zu sein. Im Prinzip werden dann lokale Funktionen $u \circ \phi^{-1}$ statt u betrachtet, wobei es sich bei $\phi : B_r(x_0) \to \phi(B_r(x_0))$ für $x_0 \in \partial\Omega$ um eine Bijektion handelt, die zusammen mit ihrer Umkehrfunktion ϕ^{-1} in C^k enthalten ist. „Partial Differential Equations“ von J.Jost [1] gibt für dieses Thema eine kleine Einführung. Für genauere Ausführungen der Globalen Regularitätstheorie sowie der L^p-Regularitätstheorie sei auf das Buch „Elliptic Partial Differential Equations of Second Order“ von Gilbarg/Trudinger [4] verwiesen.

Literatur

[1] J.Jost. „Partial Differential Equations“. Springer 2002.

[2] E.H.Lieb, M.Loss. „Analysis“, Second Edition. American Mathematical Society 2001.

[3] L.C.Evans. „Partial Differential Equations“. American Mathematical Society 2002.

[4] D.Gilbarg, N.Trudinger. „Elliptic Partial Differential Equations of Second Order“, Second Edition. Springer.

[5] D.Werner. „Funktionalanalysis“. Springer 2007.

[6] H.W.Alt. „Lineare Funktionalanalysis - Eine anwendungsorientierte Einführung“. Springer 2006.

[7] M.Giaquinta. „Introduction to Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems“. Birkhäuser Verlag.

[8] L.Hörmander. „The Analysis of Linear Partial Differential Operators I“. Springer.

[9] J.Jost. „Postmodern Analysis“, Springer.

[10] M.Giaquinta, S.Hildebrandt. „Calculus Of Variations I“. Springer.

[11] M.Dobrowolski. „Angewandte Funktionalanalysis - Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen“. Springer 2005.