

Hinweise:

- Bei diesen Unterlagen handelt sich um Rohmaterialien, die unter anderem in der Vorlesung behandelt wurden. Insbesondere handelt sich hierbei ausdrücklich um keine Zusammenfassung des behandelten Stoffs und es wird **keine umfängliche Darstellung des klausurrelevanten Stoffs** wiedergegeben. In der Vorlesung wird nämlich auch das Skript oder andere Präsentationen direkt herangezogen, manches wird an der Tafel erklärt oder alleinig mündlich angesprochen.
- Da es sich um Arbeits-Rohmaterialien handelt, sind bei der Gestaltung, Struktur und Bezügen, speziell Formelbezügen Einbußen hinzunehmen.
- Sofern wegen der Übersichtlichkeit die männliche Form gewählt wurde, beziehen sich die Angaben selbstverständlich auf Angehörige beider Geschlechter.
- Weiterverarbeitung jeder Art, auch auszugsweise, ausdrücklich nicht gestattet.
- Haftungsausschluss jeglicher Art: alle Angaben sind ohne Gewähr, so dass **keine Gewähr für Stringenz, Fehlerfreiheit, Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität** übernommen werden kann, insbesondere dienen die Inhalte lediglich der Information und stellen **keine Stoffabgrenzung für die Klausur** dar.

Retrospektive Ermittlung der ungezillmerten tariflichen Alterungsrückstellung.

- Die retrospektive ungezillmerte tarifliche Alterungsrückstellung ${}^{retro}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichten Alter $x+m$ gibt den Überschussbetrag aus dem gesamten vergangenen aufgezinnten Ausgabenvolumen bezüglich des erreichten Alter $x+m$ abzüglich des gesamten vergangenen aufgezinnten Einnahmenvolumens an Nettoprämien bezüglich des erreichten Alter $x+m$ an. Retrospektiv heißt dabei zukunftsbezogen, dabei bedeutet „vergangenen“ ohne die Geldflüsse zum Alter $x+m$.

			vergangene aufgezinste Versicherungsleistungen		vergangene aufge- zinste Einnahmen	
Jahr	Auf- zinsung ^{o)}	An- zahl VP	mittl. Leis- tung	aufgezinste Leis- tungsvolumen	Ein- zahl- zahl.	aufgezinste Zah- lungsvolumen
t_0+0	$(1+r)^{m-0}$	I_{x+0}	K_{x+0}	$I_{x+0} \cdot K_{x+0} \cdot (1+r)^{m-0}$	P_x	$I_{x+0} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-0}$
t_0+1	$(1+r)^{m-1}$	I_{x+1}	K_{x+1}	$I_{x+1} \cdot K_{x+1} \cdot (1+r)^{m-1}$	P_x	$I_{x+1} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-1}$
t_0+2	$(1+r)^{m-2}$	I_{x+2}	K_{x+2}	$I_{x+2} \cdot K_{x+2} \cdot (1+r)^{m-2}$	P_x	$I_{x+2} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-2}$
\vdots			\vdots		\vdots	
$t_0+\mu$	$(1+r)^{m-\mu}$	$I_{x+\mu}$	$K_{x+\mu}$	$I_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$	P_x	$I_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu}$
\vdots			\vdots		\vdots	
t_0+m-1	$(1+r)^{m-(m-1)}$	I_{x+m-1}	K_{x+m-1}	$I_{x+m-1} \cdot K_{x+m-1} \cdot (1+r)^{m-(m-1)}$	P_x	$I_{x+m-1} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-(m-1)}$
t_0+m-0	—	—	—	—	—	—
Kollektivsumme be- züglich Barwerte zum Bezugsjahr t_0+m			$\sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$		$\sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu}$	
I_{x+m}			${}^{retro}V_{x;x+m}$			

^{o)} Anzahl der Aufzinsungsjahre vom Jahr $t_0+\mu$ zum Bezugsjahr t_0+m :

$$t_0+m - (t_0+\mu) = m-\mu$$

mit: Rechnungszins r

Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende I_x

rechnungsmäßige normierte Kopfschäden $K_x = G \cdot k_x$ mit Grundkopfschaden G und normierten Kopfschäden k_x

- Gemäß erweitertem Äquivalenzprinzip (Formel ...) ist demnach:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu} + I_{x+m} \cdot {}^{retro}V_{x;x+m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu},$$

dabei bezeichnet ${}^{retro}V_{x;x+m}$ diejenige unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung, die im Laufe der m Jahren nach Versicherungsbeginn zum Alter x angesammelt wurde.

- Ziel: Darstellung gemäß prospektiver Alterungsrückstellung gemäß Formel ...
- Gesamtes vergangenes aufgezinste Leistungsvolumen:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

- mit $K_x = G \cdot k_x$:

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot k_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

- mit $O_x := D_x \cdot k_x$ und Erweiterung um $\frac{v^{x+\mu}}{v^{x+\mu}}$:

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot k_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu} \cdot \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

$$\begin{aligned} \circ \text{ mit } \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu} &= \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{1+r}} \right)^{m-\mu} \stackrel{v=\frac{1}{1+r}}{=} \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \left(\frac{1}{v} \right)^{m-\mu} = \\ &= \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \frac{1}{v^{m-\mu}} = \frac{1}{v^{x+\mu+m-\mu}} = \frac{1}{v^{x+m}} : \\ &= G \cdot \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu}}_{=O_{x+\mu}} \cdot \underbrace{\frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu}}_{=\frac{1}{v^{x+m}}} \end{aligned}$$

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} O_{x+\mu} \cdot \frac{1}{v^{x+m}}$$

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} O_{x+\mu}$$

○ Umparametrisierung Summe $x+\mu \mid 0 \leq \mu \leq m-1 \rightarrow \xi \mid x \leq \xi \leq x+m-1$:

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_{\xi}$$

○ Erweiterung der Summation bis x_{ω} :

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \left(\underbrace{\sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} O_{\xi}}_{U_x} - \underbrace{\sum_{\xi=x+m}^{x_{\omega}} O_{\xi}}_{U_{x+m}} \right)$$

○ mit $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} O_{\xi}$ für die Summe der diskontierten Leistungen:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} I_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu} = G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot (U_x - U_{x+m}).$$

• Gesamtes vergangenes aufgezinste Prämienvolumen:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{x+m-1} I_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu} \\ &= P_x \cdot \sum_{\mu=0}^{x+m-1} I_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu} \end{aligned}$$

○ Analog zum gesamtem vergangenen aufgezinsten Leistungsvolumen für die Prämiensumme:

$$\sum_{\mu=0}^{x+m-1} I_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu} = P_x \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot (N_x - N_{x+m}).$$

• Mit der Gleichheit auf Grund des Äquivalenzprinzips gemäß Formel ... und den Formeln ... und ...:

$$G \cdot \underbrace{\frac{1}{v^{x+m}} \cdot (U_x - U_{x+m})}_{\text{Summe über alle } I_{x+m}} + \underbrace{I_{x+m} \cdot {}^{\text{retro}}V_{x;x+m}}_{\text{Summe über alle } I_{x+m}} = P_x \cdot \underbrace{\frac{1}{v^{x+m}} \cdot (N_x - N_{x+m})}_{\text{Summe über alle } I_{x+m}}$$

$$\Rightarrow {}^{\text{retro}}V_{x;x+m} = P_x \cdot \frac{1}{I_{x+m} \cdot v^{x+m}} \cdot (N_x - N_{x+m}) - G \cdot \frac{1}{I_{x+m} \cdot v^{x+m}} \cdot (U_x - U_{x+m})$$

○ mit $D_x := v^x \cdot I_x$

$$\text{retro}V_{x;x+m} = \underbrace{P_x \cdot \frac{N_x}{D_{x+m}}}_{=G \cdot \frac{U_x}{N_x}} - \underbrace{P_x \cdot \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}}_{=a_{x+m}} - G \cdot \frac{U_x}{D_{x+m}} + G \cdot \underbrace{\frac{U_{x+m}}{D_{x+m}}}_{=A_{x+m}}$$

$$\text{retro}V_{x;x+m} = \underbrace{\frac{G \cdot U_x - G \cdot U_x}{D_{x+m}}}_{=0} - P_x \cdot a_{x+m} + G \cdot A_{x+m}$$

$$\text{retro}V_{x;x+m} = 0 + G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}.$$

- Die prospektive unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung ergibt sich demnach zu

$$\text{retro}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m} \blacksquare$$

Darstellung der ungezillmerten Alterungsrückstellung.

- Gemäß Formeln ...:

$$\text{prosp}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

und ...:

$$\text{retro}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

gilt die Übereinstimmung von prospektiv und retrospektiv ermittelter ungezillmelter Alterungsrückstellung $\text{prosp}V_{x;x+m}$ resp. $\text{retro}V_{x;x+m}$, so dass sich allgemein die Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ für Versicherte zum Eintrittsalter x nach m Jahren, d.h. zum erreichten Alter $x+m$ gemäß $V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$ bemisst. ■

- Mit der Nettoprämienformel $p_x = \frac{A_x}{a_x}$, d.h. $\begin{cases} A_{x+m} = p_{x+m} \cdot a_{x+m} \\ G \cdot A_{x+m} = P_{x+m} \cdot a_{x+m} \end{cases}$ folgt

$$\text{aus } \begin{cases} v_{x;x+m} = A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m} \\ V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m} \end{cases} :$$

$$\begin{cases} v_{x;x+m} = (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m} \\ V_{x;x+m} = (P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m} \end{cases} \quad \square$$

- Mit der Beitragsformel $B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$ für ungezillmerte Jahresbruttoprä-

$$\text{mien, d.h. } \begin{cases} P_x = (1 - \Delta_{j/s|x}) \cdot B_x - \Gamma_{j/s|x} \\ P_{x+m} = (1 - \Delta_{j/s|x+m}) \cdot B_{x+m} - \Gamma_{j/s|x+m} \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$\Delta_{j/s|x} = \begin{cases} \Delta_j & \text{für } x < x_s \\ \Delta_s & \text{für } x \geq x_s \end{cases}, \quad \Gamma_{j/s|x} = \begin{cases} \Gamma_j & \text{für } x < x_s \\ \Gamma_s & \text{für } x \geq x_s \end{cases} \quad \text{folgt aus}$$

$$V_{x;x+m} = (P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m} :$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m} = [(1 - \Delta_{j/s|x+m}) \cdot B_{x+m} - \Gamma_{j/s|x+m} - (1 - \Delta_{j/s|x}) \cdot B_x + \Gamma_{j/s|x}] \cdot a_{x+m}$$

$$V_{x;x+m} = \left[(1 - \Delta_{j/s|x+m}) \cdot B_{x+m} - (1 - \Delta_{j/s|x}) \cdot B_x - (\Gamma_{j/s|x+m} - \Gamma_{j/s|x}) \right] \cdot a_{x+m}$$

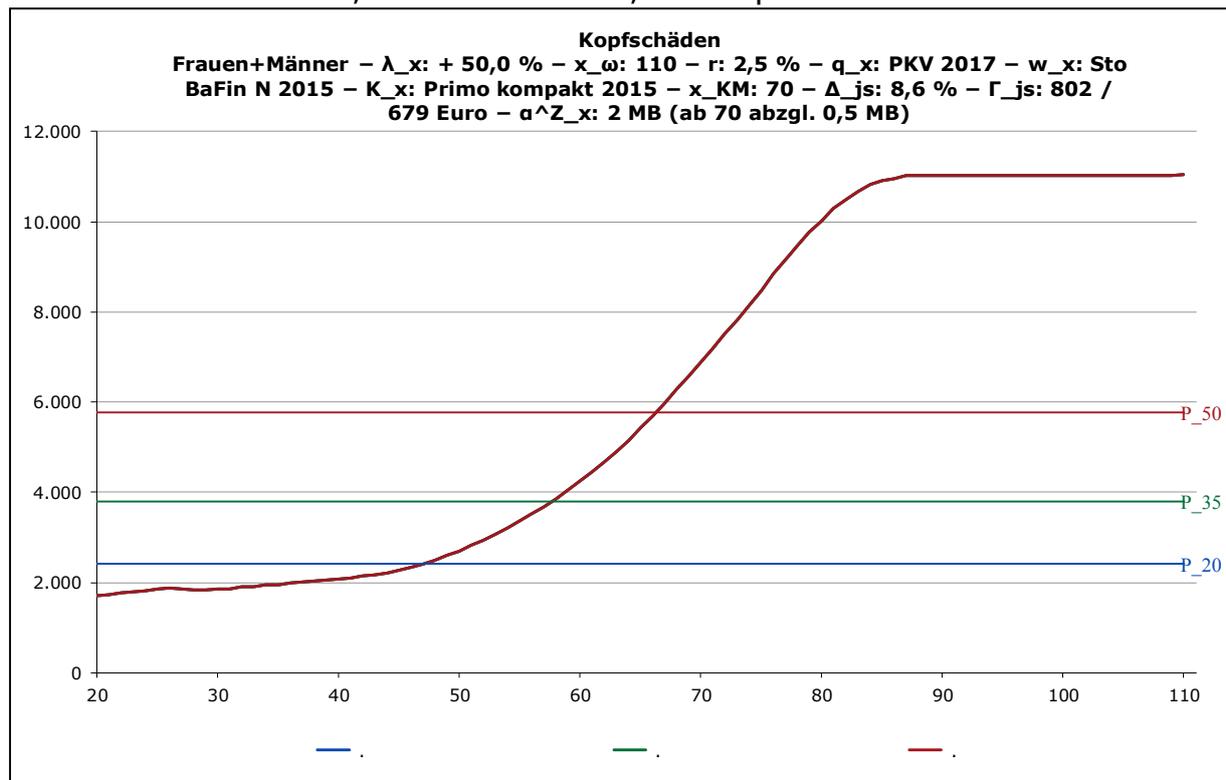
Zahlenbeispiel.

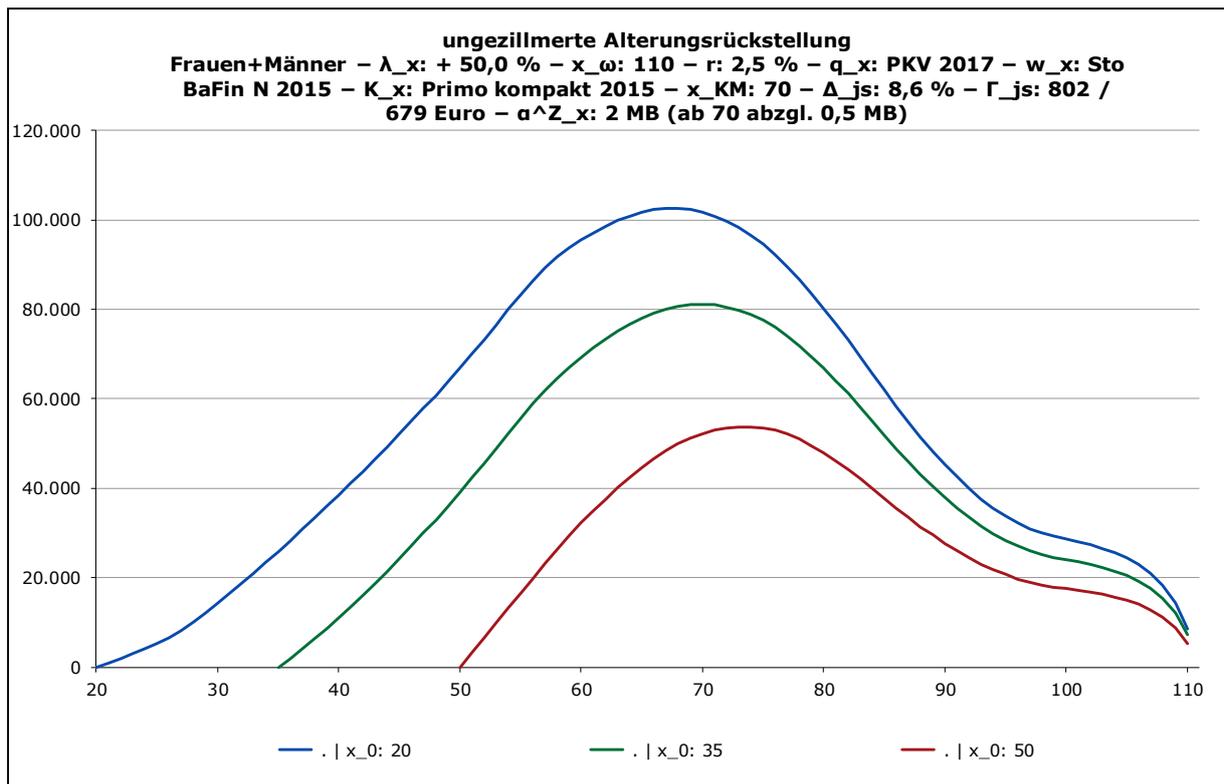
GA _{x+m}	a _{x+m}	V _{x;x+m}	P _x	18,48	21,54	26,86	34,98	50,00
			x	1	2	3	4	5
		x+m						
70,04	3,79	1		0,00
67,63	3,14	2		9,60	-0,01	.	.	.
66,35	2,47	3		20,70	13,15	0,01	.	.
58,41	1,67	4		27,55	22,44	13,55	-0,01	.
50,00	1,00	5		31,52	28,46	23,14	15,02	0,00

In der Diagonalen müssten algebraisch Nullen errechnet werden, dazu nachstehende Formel ..., wovon allerdings die numerischen Ergebnisse auf Grund von Rundungen in den Zwischenschritten abweichen können.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 20, 35 resp. 50.





Bemerkung.

- Die ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x+0}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m=0$ beträgt Null, d.h. für $m=0$ ist

$$V_{x;x+0} = (P_{x+0} - P_x) \cdot a_{x+0} = 0 \cdot a_{x+0} = 0 :$$

$$V_{x;x+0} = 0 .$$

- Die ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x_\omega}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter x_ω beträgt $(K_{x_\omega} - P_x)$, d.h. es ist

$$V_{x;x_\omega} = G \cdot A_{x_\omega} - P_x \cdot a_{x_\omega} = G \cdot k_{x_\omega} - P_x \cdot 1 = K_{x_\omega} - P_x$$

$$V_{x;x_\omega} = K_{x_\omega} - P_x .$$

- Sei das Profil $\{k_x\}_{x_K \leq x \leq x_\omega}$ ab dem Alter x_K konstant, d.h.

$\forall \xi \mid \xi \geq x_K : k_\xi = k_{x_K}$, sodann wird für das Eintrittsalter x_K im weiteren Verlauf keine tarifliche Alterungsrückstellung aufgebaut, d.h.

$$\forall \mu \mid \mu \geq 0 : V_{x_K;x_K+\mu} = 0 .$$

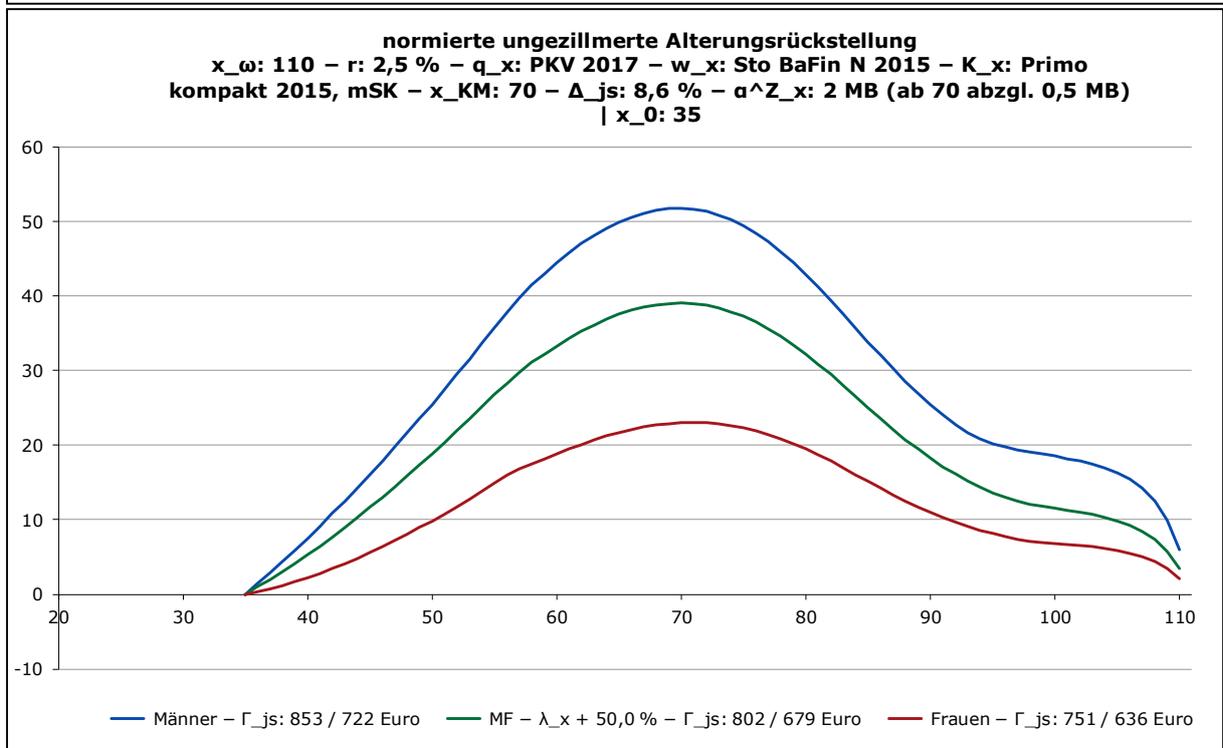
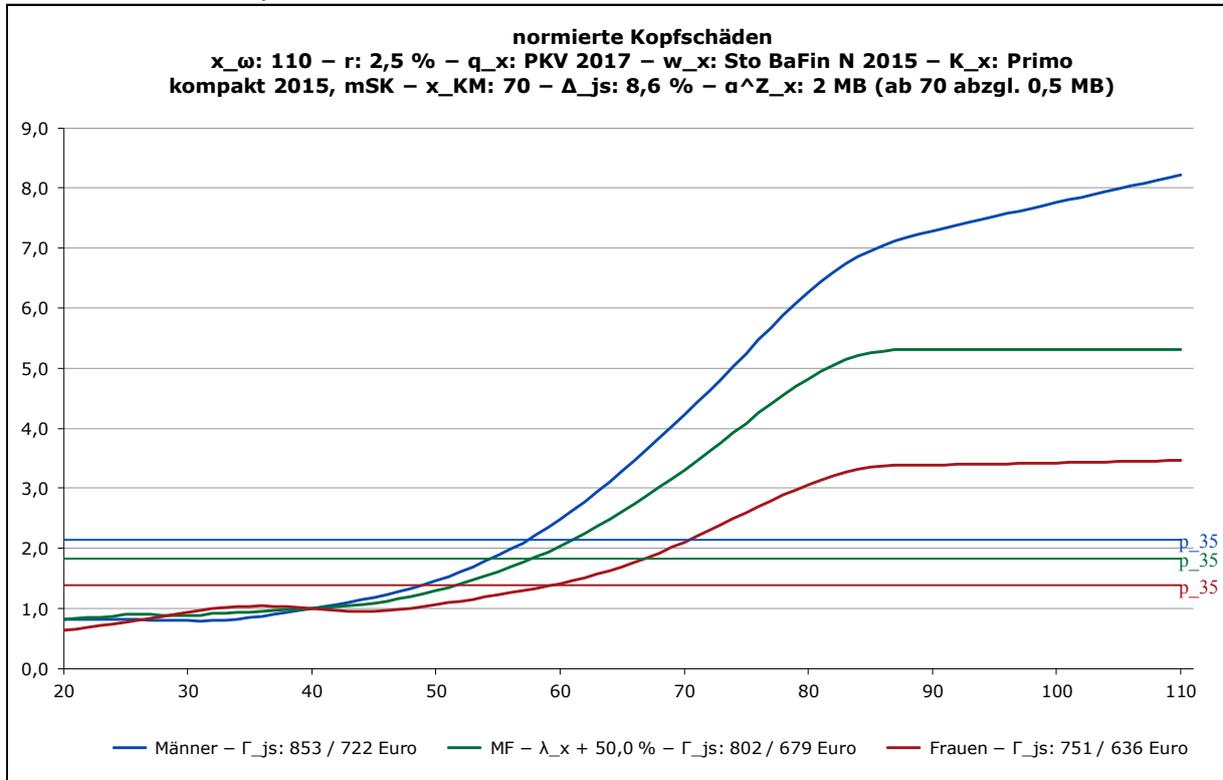
- Begründung: Da für diesen Altersbereich die Nettoprämie konstant ist, d.h. $\forall \mu \mid \mu \geq 0 : p_{x_K+\mu} = k_{x_K}$ gilt mit der Darstellung

$$v_{x;x+\mu} = (p_{x+\mu} - p_x) \cdot a_{x+\mu} \text{ gemäß Formel ... für die Alterungsrückstellung: } v_{x_K;x_K+\mu} = (k_{x_K} - k_{x_K}) \cdot a_{x_K+\mu} = 0 .$$

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen

sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz (mSK: Leistungen wegen Schwangerschaft und Mutterschaft bei Frauen), 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35.



Aufteilung der Alterungsrückstellung in zwei Bereiche.

- Die normierte ungezillmerte Alterungsrückstellung $v_{x;x+m+k}$ zum erreichten Alter $x+m+k$ ergibt sich aus den ungezillmerten Alterungsrückstellungen $v_{x;x+m}$ und $v_{x+m;x+m+k}$ zum Grenzalter $x+m$ durch:

$$v_{x;x+m+k} = \underbrace{v_{x;x+m}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x \text{ bis } x+m} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\text{Rabattauszahlung, Verzinsung und Vererbung}} + \underbrace{v_{x+m;x+m+k}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k} \cdot$$

- Begründung: an Hand von $v_{x;x+m} = (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel ... ergeben sich die Darstellungen

$$\begin{cases} v_{x;x+m+k} &= (p_{x+m+k} - p_x) \cdot a_{x+m+k} \\ v_{x;x+m} &= (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m} \\ v_{x+m;x+m+k} &= (p_{x+m+k} - p_{x+m}) \cdot a_{x+m+k} \end{cases} \cdot$$

- Für $v_{x;x+m+k} = (p_{x+m+k} - p_x) \cdot a_{x+m+k}$ ist

$$v_{x;x+m+k} = p_{x+m+k} \cdot a_{x+m+k} - p_x \cdot a_{x+m+k}$$

- Ergänzung um $(-p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} + p_{x+m} \cdot a_{x+m+k})$:

$$v_{x;x+m+k} = p_{x+m+k} \cdot a_{x+m+k} - p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} + p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} - p_x \cdot a_{x+m+k}$$

$$v_{x;x+m+k} = (p_{x+m+k} - p_{x+m}) \cdot a_{x+m+k} + (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m+k}$$

- Ergänzung des zweiten Terms um $\frac{a_{x+m}}{a_{x+m}}$

$$v_{x;x+m+k} = \underbrace{(p_{x+m+k} - p_{x+m}) \cdot a_{x+m+k}}_{=v_{x+m;x+m+k}} + \underbrace{(p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m}}_{=v_{x;x+m}} \cdot \frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}$$

$$v_{x;x+m+k} = \underbrace{v_{x;x+m}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x \text{ bis } x+m} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\text{Rabattauszahlung, Verzinsung und Vererbung}} + \underbrace{v_{x+m;x+m+k}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k} \cdot$$

- Unnormierte Darstellung mit $V_{\xi;\mu} = G \cdot v_{\xi;\mu}$. ■

Einjährige Fortschreibung der Alterungsrückstellung.

Herleitung.

- Vorbereitung: Mit Ausscheideordnung $l_{x+1} = l_x \cdot (1 - s_x)$ und Kommutativwerten $D_x := l_x \cdot v^x$, $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$, $O_x := l_x \cdot v^x \cdot k_x = D_x \cdot k_x$, $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$ und $a_x = \frac{N_x}{D_x}$ und $A_x = \frac{U_x}{D_x}$ ist:

$$a_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} = \frac{\sum_{\xi=x+m}^{x_\omega} D_\xi}{D_{x+m}} = \frac{D_{x+m} + \sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega} D_\xi}{D_{x+m}} =$$

$$\frac{D_{x+m}}{D_{x+m}} + \frac{\sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega} D_\xi}{D_{x+m}} = 1 + \frac{N_{x+m+1}}{D_{x+m}} = 1 + \frac{N_{x+m+1} \cdot D_{x+m+1}}{D_{x+m+1} \cdot D_{x+m}} =$$

$$1 + a_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}$$

$$a_{x+m} = 1 + a_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}.$$

$$\circ G \cdot A_{x+m} = G \cdot \frac{U_{x+m}}{D_{x+m}} = G \cdot \frac{\sum_{\xi=x+m}^{x_{\omega}} O_{\xi}}{D_{x+m}} = G \cdot \frac{O_{x+m} + \sum_{\xi=x+m+1}^{x_{\omega}} O_{\xi}}{D_{x+m}} =$$

$$G \cdot \frac{O_{x+m}}{D_{x+m}} + G \cdot \frac{\sum_{\xi=x+m+1}^{x_{\omega}} O_{\xi}}{D_{x+m}} = G \cdot \frac{D_{x+m} \cdot k_{x+m}}{D_{x+m}} + G \cdot \frac{U_{x+m+1}}{D_{x+m}} =$$

$$G \cdot k_{x+m} + G \cdot \frac{U_{x+m+1} \cdot D_{x+m+1}}{D_{x+m+1} \cdot D_{x+m}} = K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}$$

$$G \cdot A_{x+m} = K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}.$$

$$\circ D_{x+m} = I_{x+m} \cdot v^{x+m}, \text{ Erweiterung um } \frac{v \cdot (1-s_{x+m})}{v \cdot (1-s_{x+m})}:$$

$$D_{x+m} = \frac{I_{x+m} \cdot v^{x+m} \cdot v \cdot (1-s_{x+m})}{v \cdot (1-s_{x+m})} = \frac{v^{x+m+1} \cdot I_{x+m+1}}{v \cdot (1-s_{x+m})} = \frac{D_{x+m+1}}{v \cdot (1-s_{x+m})}$$

$$\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} = v \cdot (1-s_{x+m}).$$

- Mit Formel ... unter Verwendung der Formeln ..., ... und ... und

$$A_{x+m+1} = \frac{U_{x+m+1}}{D_{x+m+1}} \text{ und } a_{x+m+1} = \frac{N_{x+m+1}}{D_{x+m+1}} \text{ ist:}$$

$$V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

$$= K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} - P_x \cdot \left(1 + a_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} \right)$$

$$= K_{x+m} - P_x + \underbrace{\left(G \cdot A_{x+m+1} - P_x \cdot a_{x+m+1} \right)}_{=V_{x;x+m+1}} \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}}_{=v \cdot (1-s_{x+m})}$$

$$= K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \underbrace{v}_{=\frac{1}{1+r}} \cdot (1-s_{x+m})$$

$$V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot (1-s_{x+m}).$$

- Darstellung der Alterungsrückstellung $V_{x;x+m+1}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m+1$ an Hand der Vorjahresalterungsrückstellung

$V_{x;x+m}$ zum Alter $x+m$:

- Mit $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot (1-s_{x+m})$ gemäß Formel ... ist durch Umstellung der Formel:

$$V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot (1-s_{x+m}) = V_{x;x+m} + P_x - K_{x+m}$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})] \cdot (1+r) \cdot \frac{1}{(1-s_{x+m})}$$

- Erweiterung des Bruchs mit I_{x+m} :

$$V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})] \cdot (1+r) \cdot \frac{I_{x+m}}{I_{x+m} \cdot (1-s_{x+m})}$$

- AR-Fortschreibung (Darstellung mit Rechnungszins r und Rechnungsmäßig-Lebenden l_ξ) – dazu Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende nach Ausscheideordnung gemäß $l_{x+m+1} = l_{x+m} \cdot (1 - s_{x+m})$:

$$V_{x;x+m+1} = \left[\underbrace{V_{x;x+m}}_{\text{vorhandene AR}} + \underbrace{(P_x - K_{x+m})}_{\text{Sparprämie}} \right] \cdot \underbrace{(1+r)}_{\text{Verzinsung}} \cdot \underbrace{\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}}_{\text{Aufteilung auf die Verbliebenen}} . \quad \square$$

- Mit $1+r = \frac{1}{\frac{1}{1+r}} = \frac{1}{v} = \frac{v^\xi}{v \cdot v^\xi} = \frac{v^\xi}{v^{\xi+1}}$ ist $\frac{D_\xi}{D_{\xi+1}} = \frac{l_\xi \cdot v^\xi}{l_{\xi+1} \cdot v^{\xi+1}} =$

$$\frac{l_\xi}{l_{\xi+1}} \cdot (1+r), \text{ also: } (1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}} = \frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}, \text{ d.h.}$$

- AR-Fortschreibung (Darstellung mit diskontierten Lebende D_ξ)

$$V_{x;x+m+1} = \left[\underbrace{V_{x;x+m}}_{\text{vorhandene AR}} + \underbrace{(P_x - K_{x+m})}_{\text{Sparprämie}} \right] \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}}_{\text{Verzinsung und Vererbung}} . \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Bei negativer Sparprämie wird die vorhandene AR an deren negativem Fußpunkt aufgesetzt. Ab Mitte 80 ist das Profil quasi konstant, so dass sodann auch die Sparprämie quasi konstant ist.

Komponenten der Zuführung zur Alterungsrückstellung.

- Aus $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot (1 - s_{x+m})$ gemäß Formel ... folgt durch Umstellung der Formel:

$$V_{x;x+m+1} \cdot (1 - s_{x+m}) \cdot \frac{1}{1+r} = V_{x;x+m} + P_x - K_{x+m}$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} \cdot (1+r) + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} \cdot (1+r) + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r) + s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1}$$

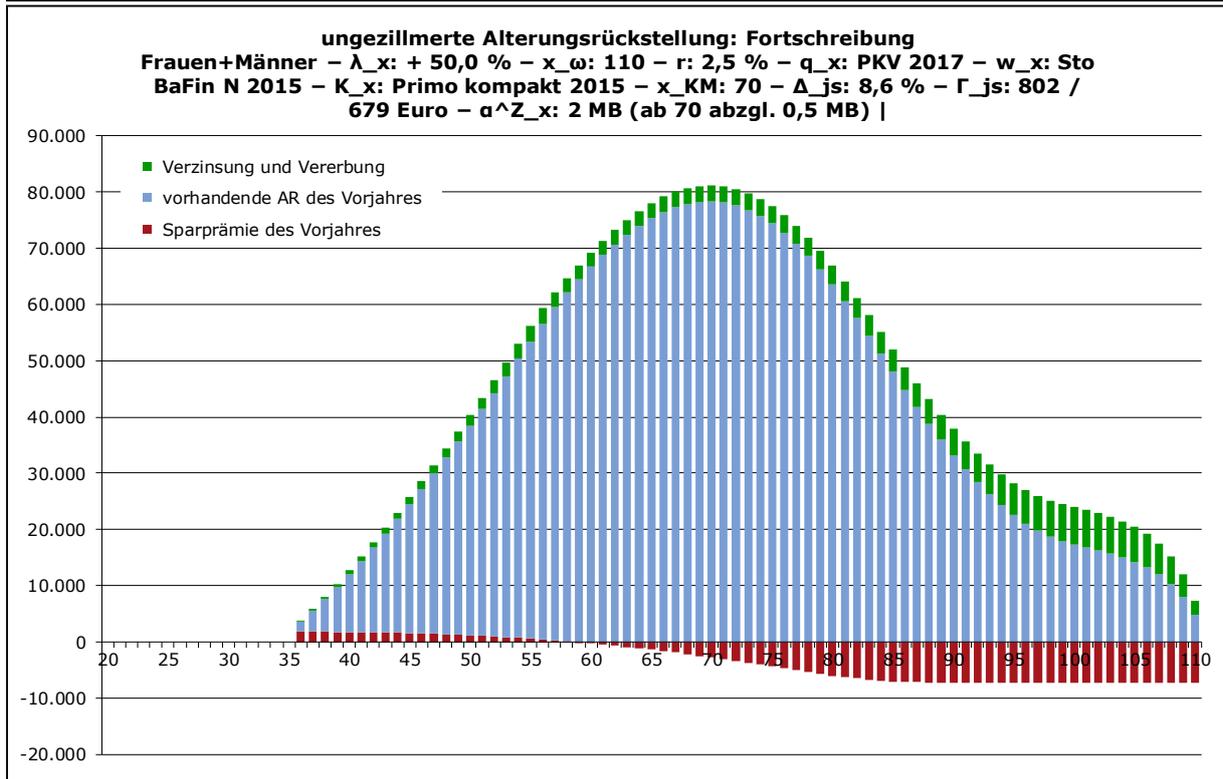
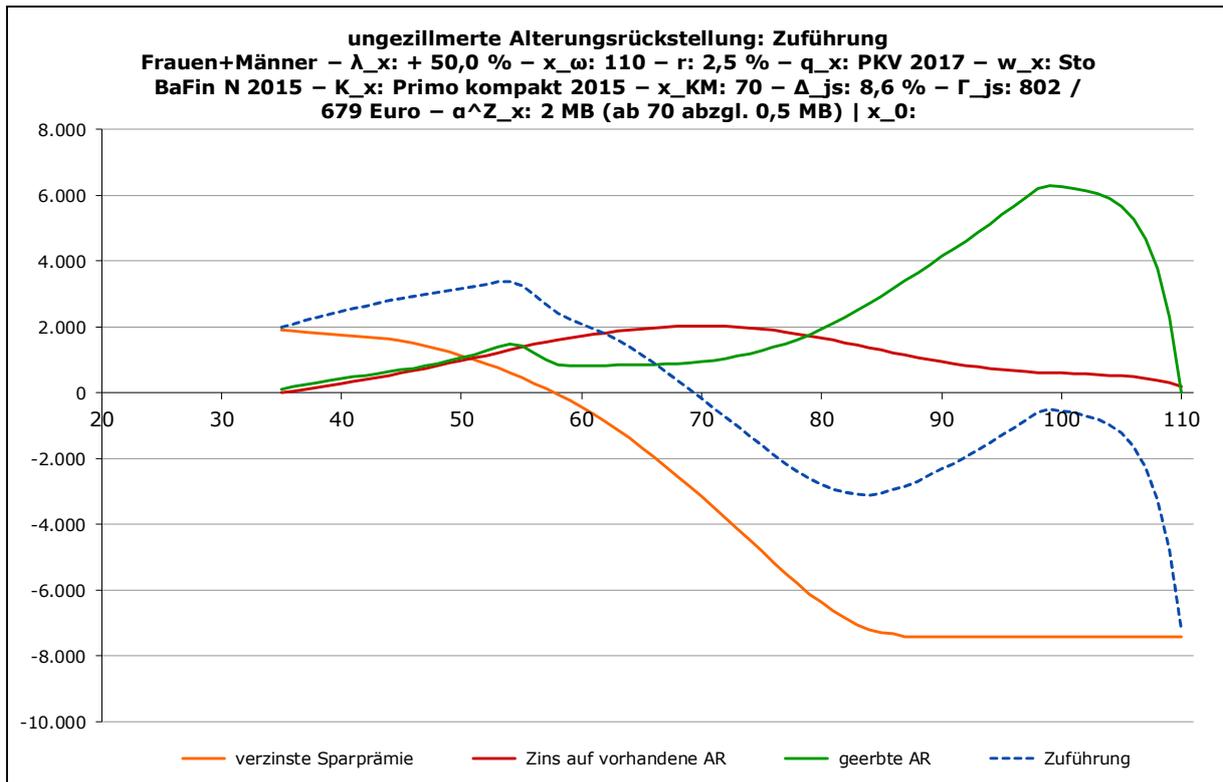
$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} + V_{x;x+m} \cdot r + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r) + s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1}$$

⇒ Komponenten der AR-Zuführung

$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = \underbrace{(P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)}_{\text{verzinsten Sparprämie}} + \underbrace{V_{x;x+m} \cdot r}_{\text{Zins auf vorhandene AR}} + \underbrace{s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte AR}} . \quad \blacksquare$$

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35.



Aufteilung der Nettoprämie.

- Aus $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot (1 - s_{x+m})$ gemäß Formel ... folgt mit $\frac{1}{1+r} = v$, Aufteilung der Nettoprämie P_x in Komponenten:

$$P_x = K_{x+m} + V_{x;x+m+1} \cdot v \cdot (1 - s_{x+m}) - V_{x;x+m}$$

$$\Rightarrow P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$$

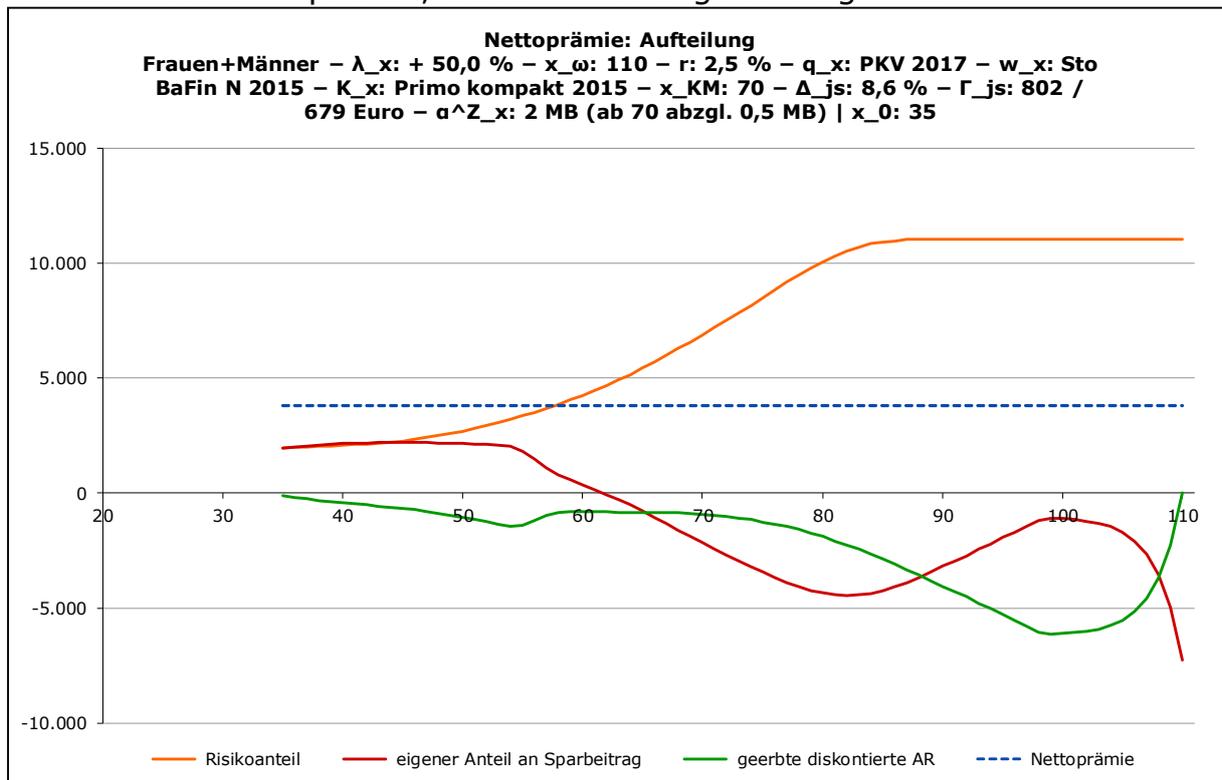
$$\Rightarrow \text{Aufteilung der Nettoprämie}$$

$$P_x = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} + \underbrace{v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}}_{\text{eigener Anteil an Sparbeitrag}} - \underbrace{s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte AR}} \cdot$$

Sparbeitrag

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35. Die geerbte Alterungsrückstellung reduziert die Nettoprämie, daher ist sie negativ dargestellt.



Gezillerte Alterungsrückstellung.

Darstellung der gezillerten Alterungsrückstellung.

Gezillerte Alterungsrückstellung.

normiert

unnormiert

$${}^zV_{x;x+m} = A_{x+m} - {}^z p_x \cdot a_{x+m}$$

$${}^zV_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - {}^z p_x \cdot a_{x+m}$$

$${}^zV_{x;x+m} = (p_{x+m} - {}^z p_x) \cdot a_{x+m}$$

$${}^zV_{x;x+m} = (p_{x+m} - {}^z p_x) \cdot a_{x+m}$$

gezillerte Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

$${}^zV_{x;x+m} = \left[(1 - \Delta_{j/s|x+m}) \cdot b_{x+m} - (1 - \Delta_{j/s|x}) \cdot {}^z b_x - (\gamma_{j/s|x+m} - \gamma_{j/s|x}) \right] \cdot a_{x+m}$$

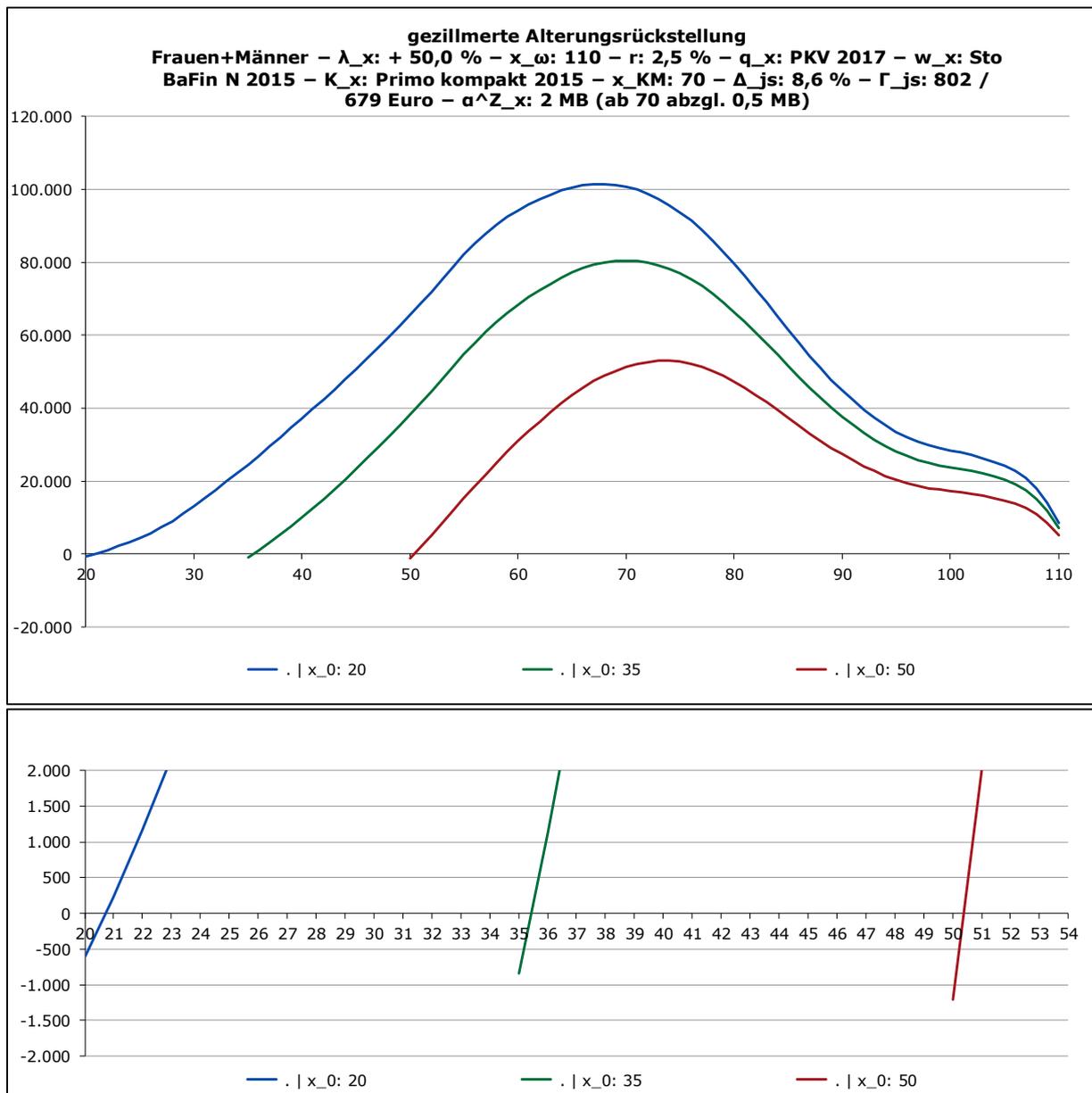
$$\begin{aligned}
zV_{x;x+m} &= \left[(b_{x+m} - {}^z b_x) - (\Delta_{j/s|x+m} \cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s|x} \cdot {}^z b_x) - (\gamma_{j/s|x+m} - \gamma_{j/s|x}) \right] \cdot a_{x+m} \\
{}^z V_{x;x+m} &= \left[(1 - \Delta_{j/s|x+m}) \cdot B_{x+m} - (1 - \Delta_{j/s|x}) \cdot {}^z B_x - (\Gamma_{j/s|x+m} - \Gamma_{j/s|x}) \right] \cdot a_{x+m} \\
{}^z V_{x;x+m} &= \left[(B_{x+m} - {}^z B_x) - (\Delta_{j/s|x+m} \cdot B_{x+m} - \Delta_{j/s|x} \cdot {}^z B_x) - (\Gamma_{j/s|x+m} - \Gamma_{j/s|x}) \right] \cdot a_{x+m} \\
zV_{x;x+m+k} &= \underbrace{{}^z V_{x;x+m}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x \text{ bis } x+m \text{ gezillert}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\text{Verzinsung und Vererbung}} + \underbrace{V_{x+m;x+m+k}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k \text{ ungezillert}} \\
{}^z V_{x;x+m+k} &= \underbrace{{}^z V_{x;x+m}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x \text{ bis } x+m \text{ gezillert}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\text{Verzinsung und Vererbung}} + \underbrace{V_{x+m;x+m+k}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k \text{ ungezillert}}
\end{aligned}$$

Zahlenbeispiel.

a^Z_x	GA _x	a_x	${}^Z_{x;x+m}$	P^Z_x	19,68	23,16	29,45	37,34	50,00
				x	1	2	3	4	5
2,00	70,04	3,79	x+m						
			1		-4,55
2,00	67,63	3,14	2		5,83	-5,09	.	.	.
2,00	66,35	2,47	3		17,74	9,14	-6,39	.	.
1,00	58,41	1,67	4		25,54	19,73	9,23	-3,95	.
0,00	50,00	1,00	5		30,32	26,84	20,55	12,66	0,00

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 20, 35 resp. 50.



Bemerkung.

- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^ZV_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m$ beträgt bei der Zillmerung von $\alpha_x^Z \cdot {}^Z\tilde{B}_x$ bezüglich der Anzahl α_x^Z an gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^Z\tilde{B}_x$:

- Mit Darstellung der gezillmerten Nettoprämie ${}^ZP_x = P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^ZB_x$ ist

$$\begin{aligned} {}^ZV_{x;x+m} &= (P_{x+m} - {}^ZP_x) \cdot a_{x+m} = \left[P_{x+m} - \left(P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^ZB_x \right) \right] \cdot a_{x+m} \\ &= \left(P_{x+m} - P_x - \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^ZB_x \right) \cdot a_{x+m}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^ZV_{x;x+0}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m=0$ beträgt $-\alpha_x^Z \cdot {}^Z\tilde{B}_x$ bei der Zillmerung von

$\alpha_x^z \cdot \tilde{z}B_x$ bezüglich der Anzahl α_x^z an gezillerten Monatsbruttoprämien $\tilde{z}B_x$, d.h. für $m = 0$ ist

- Direkt aus Formel **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**, p. **Fehler! Textmarke nicht definiert.**): ${}^zV_{x;x+0} =$

$$\left(P_{x+0} - P_x - \frac{\alpha_x^z \cdot zB_x}{12 \cdot a_x} \right) \cdot a_{x+0} = - \frac{\alpha_x^z \cdot zB_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_x = - \alpha_x^z \cdot \tilde{z}B_x \dots \blacksquare$$

- Die gezillerte Alterungsrückstellung ${}^zV_{x;x_\omega}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter x_ω beträgt $(K_{x_\omega} - {}^zP_x)$, d.h. es ist $V_{x;x_\omega} = G \cdot A_{x_\omega} - {}^zP_x \cdot a_{x_\omega} = G \cdot k_{x_\omega} - {}^zP_x \cdot 1 = K_{x_\omega} - {}^zP_x$

Fortschreibung und Zuführung zur gezillerten Alterungsrückstellung und Aufteilung der gezillerten Nettoprämie.

Fortschreibung der gezillerten Alterungsrückstellung.

${}^zV_{x;x+m+1} = \left[\underbrace{{}^zV_{x;x+m}}_{\text{vorh. gez. AR}} + \underbrace{({}^zP_x - K_{x+m})}_{\text{gez. Sparprämie}} \right] \cdot \underbrace{(1+r)}_{\text{Verzinsung}} \cdot \underbrace{\frac{I_{x+m}}{I_{x+m+1}}}_{\text{Aufteilung auf die Verbliebenen}}$	Fortschreibung der gezillerten Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ um ein Jahr
${}^zV_{x;x+m+1} = \left[\underbrace{{}^zV_{x;x+m}}_{\text{vorh. gez. AR}} + \underbrace{({}^zP_x - K_{x+m})}_{\text{gez. Sparprämie}} \right] \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}}_{\text{Verzinsung und Vererbung}}$	

Zuführung zur gezillerten Alterungsrückstellung.

$${}^zV_{x;x+m+1} - {}^zV_{x;x+m} = \underbrace{({}^zP_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)}_{\text{verzinstе gez. Sparprämie}} + \underbrace{{}^zV_{x;x+m} \cdot r}_{\text{Zins auf vorh. gez. AR}} + \underbrace{s_{x+m} \cdot {}^zV_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte gez. AR}}$$

Ein-Jahres-Zuführung zur gezillerten Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichten Alter $x+m+1$

Aufteilung der gezillerten Nettoprämie.

$${}^zP_x = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} + \underbrace{v \cdot {}^zV_{x;x+m+1} - {}^zV_{x;x+m}}_{\text{eigener Anteil an gez. Sparbeitrag}} - \underbrace{s_{x+m} \cdot v \cdot {}^zV_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte gez. AR}}$$

Aufteilung der (unnormierten) gezillerten Jahresbruttoprämie zP_x zum Eintrittsalter x nach m Jahren zum erreichten Alter $x+m$

Maximal zulässige Zillmerung.

§ 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ KVAV.

[...]

- (3) Unmittelbare Abschlusskosten dürfen durch Zillmerung nur in einer solchen Höhe in die Prämien eingerechnet werden, dass die Gesamalterungsrückstellung eines Zugangsjahres im Tarif höchstens vier Jahre und jede Einzelalterungsrückstellung nicht länger als 15 Jahre und nicht länger als die Hälfte der tariflich vorgesehenen künftigen Vertragsdauer negativ ist.

[...]

[...]

Bemerkung zur Höhe der Zillmerung.

- Erläuterung zur Gesamalterungsrückstellung eines Zugangsjahres gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ Absatz 3 KVAV:

Mit der die Anzahl ${}^{NG}L_x$ der neu versicherten Personen eines Jahres hat zu gelten:

$$\forall m \mid m > 4 : \sum_x ({}^{NG}L_x \cdot {}^ZV_{x;x+m}) \geq 0.$$

Mit ${}^ZV_{x;x+m} = (P_{x+m} - {}^ZP_x) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**, p. **Fehler! Textmarke nicht definiert.**), da $a_x \geq 0$:

$$\forall m \mid m > 4 : \sum_x ({}^{NG}L_x \cdot (P_{x+m} - {}^ZP_x)) \geq 0.$$

Ist $\forall m \mid m > 4 : {}^ZV_{x;x+m} \geq 0$ resp. $P_{x+m} - {}^ZP_x \geq 0$ für die neugeschäftsmöglichen Alter x , so ist der Nachweis für die Gesamalterungsrückstellung ohne Bestimmung des konkreten Neuzugangs eines Zugangsjahres erbracht.

- Erläuterung zur Einzelalterungsrückstellung gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ Absatz 3 KVAV:

Eine gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^ZV_{x;x+m}$ darf maximal 15 Jahre oder maximal „Restlaufzeit-Halbe“ negativ sein, d.h.

$$\forall x : \forall m \mid m > \min\left(15 ; \frac{1}{2} \cdot (x_\omega - x)\right) : {}^ZV_{x;x+m} \geq 0 \text{ resp.}$$

$$\forall x : \forall m \mid m > \min\left(15 ; \frac{1}{2} \cdot (x_\omega - x)\right) : P_{x+m} - {}^ZP_x \geq 0.$$

Bei diesen beiden Vorschriften ist in praxi zu beachten, dass auf Grund von Rundungen bei den Berechnungen unerwünschte rein numerische Effekte (beispielsweise negative Alterungsrückstellungen trotz konstantem Profil) entstehen können, die durch entsprechende Betrachtungen oder Maximierungen ignoriert oder egalisiert werden.

- Ad Beitragsmonotonie:

Aus den beiden vorstehenden Vorschriften gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ Absatz 3 KVAV folgt, dass zumindest zum Endalter x_ω nicht mehr gezillmert werden kann. Dies hat

eine Reduzierung der Zillmerbeträge ZB_x zur Folge, welche als Anzahl α_x^Z an gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^Z\tilde{B}_x$, ${}^Z\tilde{B}_x = \frac{1}{12} \cdot {}^ZB_x$ zur gezillmerten Jahresbruttoprämie ZB_x dargestellt werden: ${}^ZB_x = \alpha_x^Z \cdot {}^Z\tilde{B}_x = \frac{1}{12} \cdot \alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x$.

Eine Reduzierung von α_x^Z mit fortschreitendem Alter x geht senkend in die gezillmerte Jahresbruttoprämie ZB_x ein – ZB_x darf allerdings mit fortschreitendem Alter x nicht sinken, was ansonsten zu einem Widerspruch zu § 146 „Substitutive Krankenversicherung“ Absatz 2 Satz 2 VAG (keine günstigeren Prämien für das Neugeschäft als im Altbestand – nämlich nach einem Alterswechsel) führen würde. Dementsprechend erfolgt die Rückführung von α_x^Z ab einem gewissen Alter in kleineren Schritten so, dass die wachsende Monotonie von ZB_x gewährleistet ist.

Gezillmerte und ungezillmerte Alterungsrückstellung.

- Mit ${}^ZV_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - P_x - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x}{12 \cdot a_x} \right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden., p. Fehler! Textmarke nicht definiert.** ist

$${}^ZV_{x;x+m} = \underbrace{(P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m}}_{V_{x;x+m}} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} = V_{x;x+m} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} \quad \blacksquare$$

- Die Differenz ${}^ZV_{x;x+m} - V_{x;x+m}$ zwischen *gezillmerter* und *ungezillmerter* Alterungsrückstellung ${}^ZV_{x;x+m}$ resp. $V_{x;x+m}$ beträgt

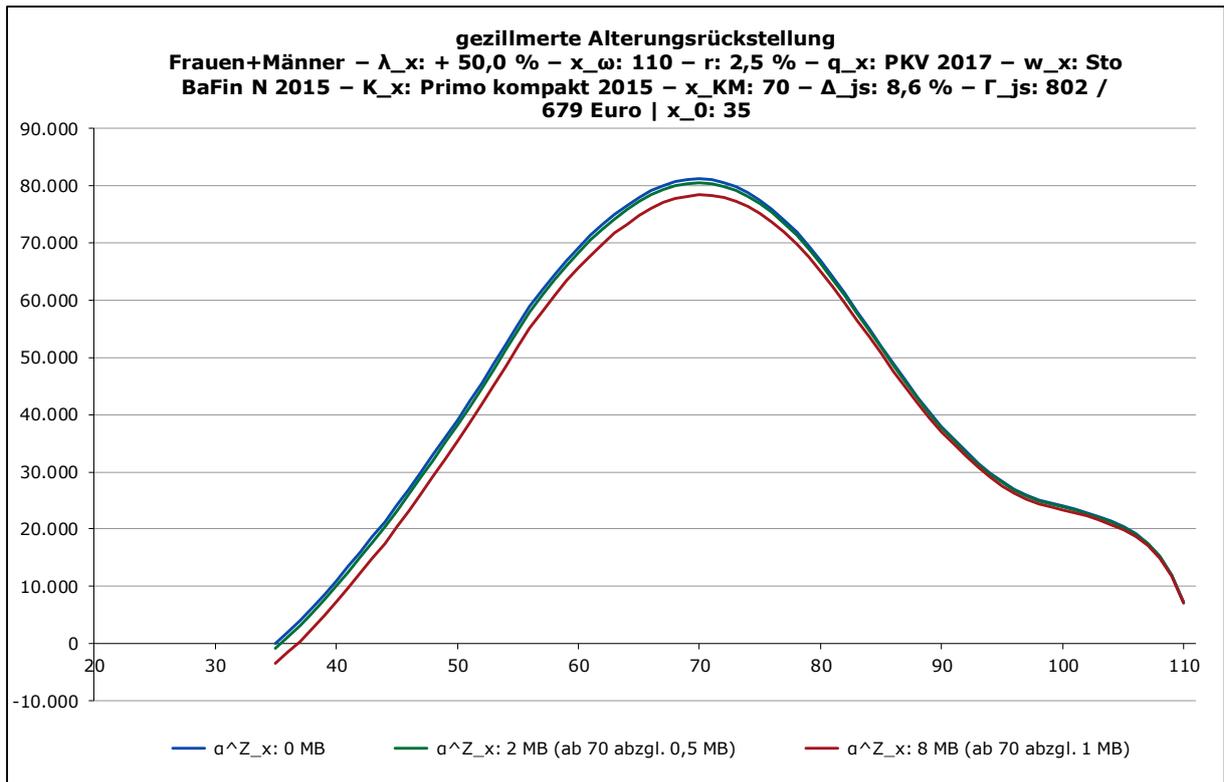
$${}^ZV_{x;x+m} - V_{x;x+m} = -\frac{\alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} = -\alpha_x^Z \cdot {}^Z\tilde{B}_x \cdot \frac{a_{x+m}}{a_x},$$

so dass die *gezillmerte* Alterungsrückstellung ${}^ZV_{x;x+m}$ stets kleiner oder gleich der *ungezillmerter* Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ ist:

$${}^ZV_{x;x+m} - V_{x;x+m} = -\frac{\alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} \leq 0.$$

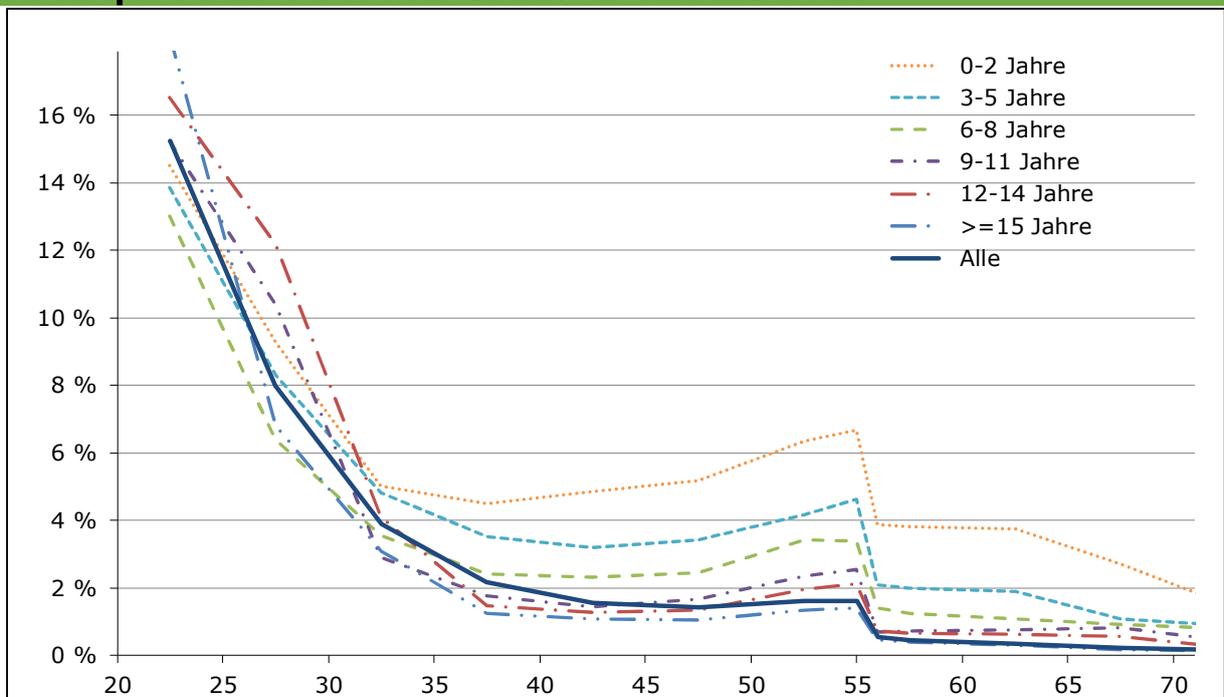
Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35, bei Zillmerung von 0, 2 resp. 8 Monatsbeiträgen.



Stornogewinne/-verluste.

Grundproblem der Stornowahrscheinlichkeiten.



Äquivalenzprinzip $\sum_{\xi \geq x} I_{\xi} \cdot K_{\xi} \cdot v^{\xi-x} = \sum_{\xi \geq x} I_{\xi} \cdot P_x \cdot v^{\xi-x}$

Wird die Vorversicherungsdauer bei den Rechnungsmäßig-Lebenden $\{l_{x;\mu}\}_{x_a \leq x \leq x_b}$ miteinbezogen, ergeben sie sich gemäß $l_{x;1} = l_{x;0} \cdot (1 - s_{x;0})$, wobei $l_{x;\mu}$ die Anzahl der Rechnungsmäßig-Lebenden zum ursprünglichen Bezugsalter x nach μ Jahren und $(1 - s_{x;\mu})$ die Verbleibwahrscheinlichkeit von Ursprünglich- x -Jährigen nach μ Jahren bezeichnet.

Mit diesen zweidimensionalen Werten entwickeln sich die Rechnungsmäßig-Lebenden in Kohorten gemäß den Spalten im Schema:

err. Alter	Eintrittsalter / Alterskohorten bzgl. Eintrittsalter					
	$x+0; \tau$	$x+1; \tau$	$x+2; \tau$	$x+3; \tau$	$x+4; \tau$	
$x+0$	im 1. VJ: $l_{x+0;0}$					
$x+1$	im 2. VJ: $l_{x+0;1} = l_{x+0;0} \cdot (1 - s_{x+0;0})$	im 1. VJ: $l_{x+1;0}$				$\} s_{x+0}$
$x+2$	im 3. VJ: $l_{x+0;2} = l_{x+0;1} \cdot (1 - s_{x+0;1})$	im 2. VJ: $l_{x+1;1} = l_{x+1;0} \cdot (1 - s_{x+1;0})$	im 1. VJ: $l_{x+2;0}$			$\} s_{x+1}$
$x+3$	im 4. VJ: $l_{x+0;3} = l_{x+0;2} \cdot (1 - s_{x+0;2})$	im 3. VJ: $l_{x+1;2} = l_{x+1;1} \cdot (1 - s_{x+1;1})$	im 2. VJ: $l_{x+2;1} = l_{x+2;0} \cdot (1 - s_{x+2;0})$	im 1. VJ: $l_{x+3;0}$		$\} s_{x+2}$
$x+4$	im 5. VJ: $l_{x+0;4} = l_{x+0;3} \cdot (1 - s_{x+0;3})$	im 4. VJ: $l_{x+1;3} = l_{x+1;2} \cdot (1 - s_{x+1;2})$	im 3. VJ: $l_{x+2;2} = l_{x+2;1} \cdot (1 - s_{x+2;1})$	im 2. VJ: $l_{x+3;1} = l_{x+3;0} \cdot (1 - s_{x+3;0})$	im 1. VJ: $l_{x+4;0}$	$\} s_{x+3}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x+\mu$	allgemein: $l_{x+\mu;\tau+1} = l_{x+\mu;\tau} \cdot (1 - s_{x+\mu;\tau})$					

VJ: Versicherungsjahr

$${}^{StTag} \hat{L}(\{j_{x|t}\})$$

beobachteter Bestand: Anzahl der x -jährigen versicherten Personen $j_{x|t}$ in einem Kollektiv mit mindestens t -jähriger Versicherungszeit zu Beginn des Beobachtungszeitraumes (Stichtagsbestand)

$${}^w \hat{L}(\{j_{x|t}\})$$

beobachteter Abgang: Anzahl derjenigen versicherten Personen aus $\{j_{x|t}\}$ mit Vertragsbeendigung im Beobachtungszeitraum auf Grund Stornierung

$$\hat{w}_{x|t}^{VP} := \frac{{}^w \hat{L}(\{j_{x|t}\})}{{}^{StTag} \hat{L}(\{j_{x|t}\})}$$

personenbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit zum Alter x

Zahlenbeispiel „VP alle VJ“.

err. Alter	Eintrittsalter / Alterskohorte bzgl. Eintrittsalter x					Summe
	1	2	3	4	5	
Stichtags-Bestand $L^{\text{StTag}}_{x,\tau}$						
1	1.500					1.500
2	1.361	1.000				2.361
3	1.221	889	500			2.610
4	1.106	799	446	50		2.401
5	754	542	302	33	10	1.641
davon Abgänge auf Grund Storno $L^w_{x,\tau}$						
1	124					124
2	99	81				180
3	78	63	39			180
4	31	25	15	2		73
5	0	0	0	0	0	0
beobachtete Stornowahrscheinlichkeiten						$w^{\text{VP/alleVJ}}$
1	0,0827					0,0827
2	0,0727	0,0810				0,0762
3	0,0639	0,0709	0,0780			0,0690
4	0,0280	0,0313	0,0336	0,0400		0,0304
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
beob. Storno in Abhängigkeit von Vorversicherungszeit						$w^{\text{VP/alleVJ}}$
	0	1	2	3	4	
1	0,0827					0,0827
2	0,0810	0,0727				0,0762
3	0,0780	0,0709	0,0639			0,0690
4	0,0400	0,0336	0,0313	0,0280		0,0304
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Zahlenbeispiel „VP ab 1 VJ“.

err. Alter	Eintrittsalter / Alterskohorte bzgl. Eintrittsalter x					Summe
	1	2	3	4	5	
Stichtags-Bestand $L^{\text{StTag}}_{x,\tau}$ mit mind. 1-jähriger Vorvers'zeit						
1	.					0
2	1.361	.				1.361
3	1.221	889	.			2.110
4	1.106	799	446	.		2.351
5	754	542	302	33	.	1.631
davon Abgänge auf Grund Storno $L^w_{x,\tau}$						
1	.					0
2	99	.				99
3	78	63	.			141
4	31	25	15	.		71
5	0	0	0	0	.	0
beobachtete Stornowahrscheinlichkeiten						$w^{\text{VP/ab1VJ}}$
1	.					.
2	0,0727	.				0,0727
3	0,0639	0,0709	.			0,0668
4	0,0280	0,0313	0,0336	.		0,0302
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	.	0,0000

	beob. Storno in Abhängigkeit von Vorversicherungszeit					ab1VJ
	0	1	2	3	4	
1						.
2		0,0727				0,0727
3		0,0709	0,0639			0,0668
4		0,0336	0,0313	0,0280		0,0302
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Ermittlung von beobachteten Stornowahrscheinlichkeiten.

$${}^zP_x = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} + \underbrace{v \cdot {}^zV_{x;x+m+1} - {}^zV_{x;x+m}}_{\text{eigener Anteil an gez. Sparbeitrag}} - \underbrace{s_{x+m} \cdot v \cdot {}^zV_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte gez. AR}}$$

Ermittlung alterungsrückstellungsbezogener beobachteter Stornowahrscheinlichkeit (allgemein).

${}^{stTag}\hat{V}(\{j_{x|t}\})$ beobachteter Bestand: vorhandene untersuchungsrelevante Alterungsrückstellung der x -jährigen versicherten Personen $j_{x|t}$ in einem Kollektiv mit mindestens t -jähriger Versicherungszeit zu Beginn des Beobachtungszeitraumes (stichtagsbezogen)

${}^w\hat{V}(\{j_{x|t}\})$ beobachteter Abgang: frei werdenden untersuchungsrelevanten Alterungsrückstellung derjenigen versicherten Personen aus $\{j_{x|t}\}$ mit Vertragsbeendigung im Beobachtungszeitraum auf Grund Stornierung

$\hat{W}_{x|t}^{AR} := \frac{{}^w\hat{V}(\{j_{x|t}\})}{{}^{stTag}\hat{V}(\{j_{x|t}\})}$ alterungsrückstellungsbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit zum Alter x

Problem negativer Alterungsrückstellungen.

	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	${}^{stTag}\hat{V}(\{j_\lambda\})$	storn. VP j_λ	${}^w\hat{V}(\{j_\lambda\})$	\hat{W}^{AR}
a)	+100	+100	+50	-100	-100	50	j_5	-100	-200 Prozent
b)	+100	+100	+50	-100	-100	50	j_1	+100	+200 Prozent
c)	+100	-100	-100	-100	-100	-300	j_5	-100	33 Prozent

$${}^zP_x = K_{x+m} + v \cdot {}^zV_{x;x+m+1} - {}^zV_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot {}^zV_{x;x+m+1}$$

Untersuchungsrelevante Alterungsrückstellungen.

$${}^zP_x = K_{x+m} + v \cdot {}^zV_{x;x+m+1} - {}^zV_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot {}^zV_{x;x+m+1}$$

${}^{StTag}\hat{V}(\{j_{x|t}\}) = \sum_j {}^{StTag}V_{x+1}(\{j_{x|t}\})$, wobei ${}^{StTag}V_{x+1}(j_{x|t})$ die stichtagsbezogene Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ der versicherten Person $j_{x|t}$ ist

Ermittlung alterungsrückstellungsbezogener beobachteter Stornowahrscheinlichkeit.

$${}^{StTag}V_{x+1}(\{j_{x|0} | {}^{StTag}V_{x+1}(j_{x|0}) > 0\})$$

beobachteter Bestand: vorhandene positive zu berücksichtigende Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ der x -jährigen versicherten Personen j_x in einem Kollektiv zu Beginn des Beobachtungszeitraumes (stichtagsbezogen, unabhängig von der Versicherungszeit, d.h. $t = 0$)

$${}^wV_{x+1}(\{j_{x|0} | {}^{StTag}V_{x+1}(j_{x|0}) > 0\})$$

beobachteter Abgang: frei werdenden zu berücksichtigende Alterungsrückstellung derjenigen versicherten Personen aus $\{j_x\}$ mit Vertragsbeendigung im Beobachtungszeitraum auf Grund Stornierung

$$\hat{w}_{x|t}^{AR} := \frac{{}^wV_{x+1}(\{j_x | {}^{StTag}V_{x+1}(j_x) > 0\})}{{}^{StTag}V_{x+1}(\{j_x | {}^{StTag}V_{x+1}(j_x) > 0\})}$$

alterungsrückstellungsbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit zum Alter x

Zahlenbeispiel „positive AR“.

err. Alter	Eintrittsalter / Alterskohorte bzgl. Eintrittsalter x					Summe
	1	2	3	4	5	
Stichtags-Alterungsrückstellung $\text{posAR}^{\wedge}\text{StTag}_{x+1,\tau}$						
1	14.400					14.400
2	56.345	13.150				69.495
3	100.916	39.898	6.775			147.589
4	139.444	68.219	20.641	751		229.055
5	0	0	0	0	0	0
davon Abgänge auf Grund Storno $\text{posAR}^{\wedge}w_{x,\tau}$						
1	1.190					1.190
2	4.099	1.065				5.164
3	6.447	2.827	528			9.802
4	3.908	2.135	694	30		6.767
5	0	0	0	0	0	0
beobachtete Stornowahrscheinlichkeiten						$w^{\wedge}\text{posAR}$
1	0,0826					0,0826
2	0,0727	0,0810				0,0743
3	0,0639	0,0709	0,0779			0,0664
4	0,0280	0,0313	0,0336	0,0399		0,0295
5

		beob. Storno in Abhängigkeit von Vorversicherungszeit					
		0	1	2	3	4	abVJ
1		0,0826					0,0826
2		0,0810	0,0727				0,0743
3		0,0779	0,0709	0,0639			0,0664
4		0,0399	0,0336	0,0313	0,0280		0,0295
5							.

Wirtschaftlichkeitsverprobung rechnungsmäßiger Stornowahrscheinlichkeiten.

- $\{w_x\}_{x_\alpha \leq x \leq x_\omega}$ zu überprüfende Stornowahrscheinlichkeiten
- τ Beobachtungsjahr
- $j_x^\tau \in I$ konkreter Tarifbestand zu Beginn von τ (alle versicherte Personen [VP]): VP j_x^τ zum Alter x der Tarife i desjenigen Tarifkreises I , für den $\{w_x\}_{x_\alpha \leq x \leq x_\omega}$ verwendet werden (d.h. $j_x^\tau \in i, i \in I$)
- ${}^{StTag}\hat{V}_{x+1}(j_x^\tau)$ vorhandene individuelle untersuchungsrelevante Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ der VP j_x^τ zu Beginn von τ (ohne Elimination negativer Werte)
- $w_x \cdot {}^{StTag}\hat{V}_{x+1}(j_x^\tau)$ entsprechende rechnungsmäßig vererbte Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ auf Grund Stornierung
- ${}^w\hat{V}_{x+1}(j_x^\tau)$ frei werdende individuelle untersuchungsrelevante Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ derjenigen VP aus $\{j_x^\tau\}$ mit Vertragsbeendigung in τ auf Grund Stornierung (ohne Elimination negativer Werte)

Der Abgleich kann zunächst je Einzelalter x durchgeführt werden:

$$\forall x \mid x_\alpha \leq x \leq x_\omega : \overbrace{w_x \cdot \sum_{j_x^\tau \in I} {}^{StTag}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{rechnungsmäßige Vererbung}} \stackrel{!}{\leq} \overbrace{\sum_{j_x^\tau \in I} {}^w\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{tatsächliche Vererbung}} ;$$

$$\forall \bar{x} \mid \bar{x}_\alpha \leq \bar{x} \leq \bar{x}_\omega : \sum_{x \in \bar{x}} \sum_{j_x^\tau \in I} w_x \cdot {}^{StTag}\hat{V}(j_x^\tau) \stackrel{!}{\leq} \sum_{x \in \bar{x}} \sum_{j_x^\tau \in I} {}^w\hat{V}(j_x^\tau)$$

$$\sum_{x \in \bar{x}} \sum_{j_x^\tau \in I} w_x \cdot {}^{StTag}\hat{V}(j_x^\tau) \stackrel{!}{\leq} \sum_{x \in \bar{x}} \sum_{j_x^\tau \in I} {}^w\hat{V}(j_x^\tau)$$

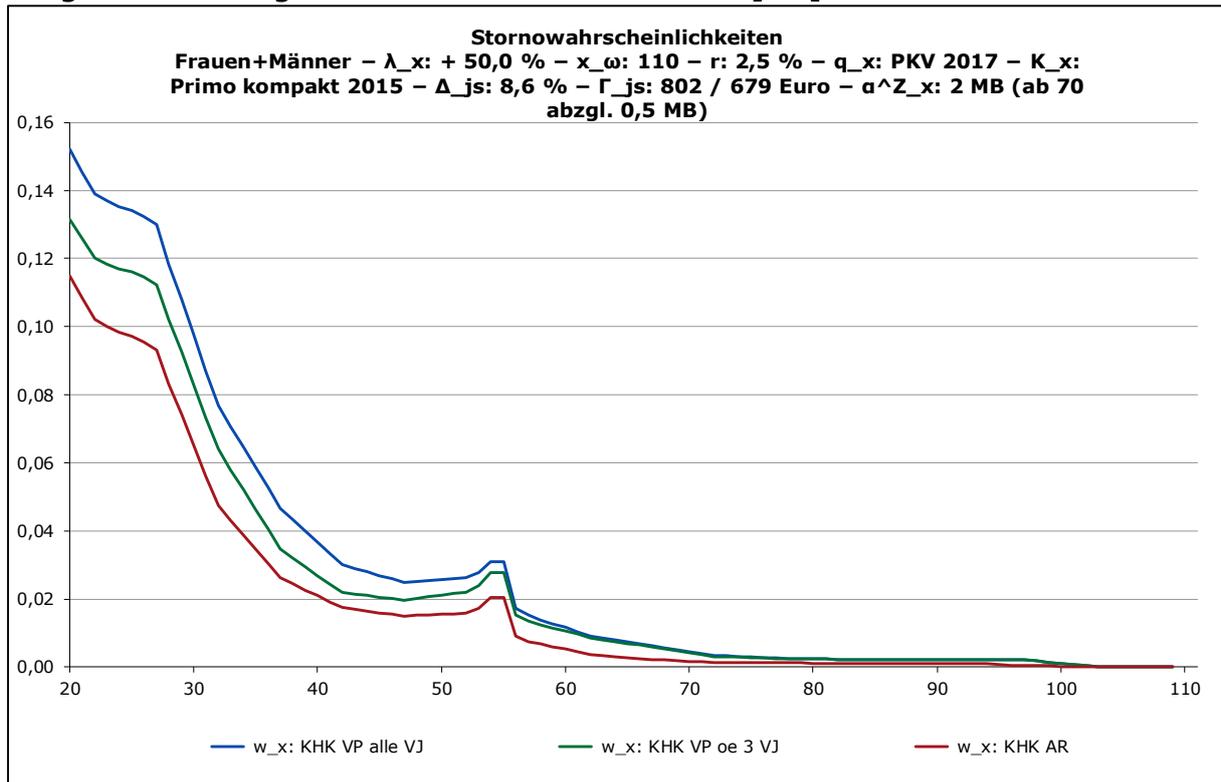
$$\sum_{\tau \in T} \sum_{x \in \bar{x}} \sum_{j_x^\tau \in I} w_x \cdot {}^{StTag}\hat{V}(j_x^\tau) \stackrel{!}{\leq} \sum_{\tau \in T} \sum_{x \in \bar{x}} \sum_{j_x^\tau \in I} {}^w\hat{V}(j_x^\tau),$$

Zahlenbeispiel.

Alter	tats.Vererb.	AR	w^VP/alleVJ	mm.Vererb.	Verb'Erg.	Wirt.	w^VP/ab1VJ	mm.Vererb.	Verb'Erg.	Wirt.	w^AR	mm.Vererb.	Verb'Erg.	Wirt.
1	635	8.745	0,0726	635	+ 0	WAHR	0,0726	635	+ 0	WAHR	0,0725	634	+ 1	WAHR
2	4.654	62.530	0,0767	4.796	- 142	FALSCH	0,0726	4.540	+ 114	WAHR	0,0746	4.665	- 11	FALSCH
3	10.122	151.881	0,0690	10.480	- 358	FALSCH	0,0672	10.206	- 84	FALSCH	0,0667	10.130	- 8	FALSCH
4	7.381	251.300	0,0301	7.564	- 183	FALSCH	0,0299	7.514	- 133	FALSCH	0,0293	7.363	+ 18	WAHR
5	0	0	0,0000	0	+ 0	WAHR	0,0000	0	+ 0	WAHR	0,0000	0	+ 0	WAHR
Summe	22.792	474.456		23.475	- 683	FALSCH		22.895	- 103	FALSCH		22.792	+ 0	WAHR
bzgl. tats.Vererb.					- 3 %	FALSCH			- 0 %	FALSCH			+ 0 %	WAHR

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktuelle Sterbewahrscheinlichkeiten und durchschnittlichen Kostenansätzen; Stornowahrscheinlichkeiten: bestimmt an Hand aller versicherter Personen [VP alle VJ], der versicherten Personen mit mindestens dreijähriger Vorversicherungszeit [VP oe 3 VJ], der Alterungsrückstellung aller versicherter Personen [AR].



Monatsbeiträge (monotonisiert)
Frauen+Männer - λ_x : + 50,0 % - x_ω : 110 - r: 2,5 % - q_x : PKV 2017 - K_x :
Primo kompakt 2015 - Δ_{js} : 8,6 % - Γ_{js} : 802 / 679 Euro - a^Z_x : 2 MB (ab 70
abzgl. 0,5 MB)

