1. Die tarifliche Alterungsrückstellung. 2

1.1 Anwartschaftsdeckungsverfahren. 4

1.2 Ungezillmerte Alterungsrückstellung. 7

1.2.1 Prospektive Ermittlung der ungezillmerten Alterungsrückstellung. 7

1.2.2 Retrospektive Ermittlung der ungezillmerten Alterungsrückstellung. 9

1.2.3 Darstellung der ungezillmerten Alterungsrückstellung. 12

1.2.4 Fortschreibung und Zuführung zur ungezillmerten Alterungsrückstellung und Aufteilung der Nettoprämie. 18

1.3 Gezillmerte Alterungsrückstellung. 28

1.3.1 Darstellung der gezillmerten Alterungsrückstellung. 28

1.3.2 Gezillmerte und ungezillmerte Alterungsrückstellung. 35

1.3.3 Maximal zulässige Zillmerung 36

1.4 Stornogewinne/-verluste 38

1.5 Bilanz- und Stornorückstellung. 39

1.6 Problem fallender Profile. 40

1. Die tarifliche Alterungsrückstellung.

§ 12 „Substitutive Krankenversicherung" VAG.

(1) Soweit die Krankenversicherung ganz oder teilweise den im gesetzlichen Sozialversicherungssystem vorgesehenen Kranken- oder Pflegeversicherungsschutz ersetzen kann (substitutive Krankenversicherung), darf sie im Inland vorbehaltlich des Absatzes 6 nur nach Art der Lebensversicherung betrieben werden, wobei
[…]
2. die Alterungsrückstellung nach § 341f des Handelsgesetzbuchs zu bilden ist,
[…]

(6) Substitutive Krankenversicherungen mit befristeten Vertragslaufzeiten nach § 195 Absatz 2 und 3 [Ausbildungs-, Auslands-, Ausländer-, Reise- und Restschuldkrankenversicherungen] sowie § 196 [befristete Krankentagegeldversicherungen] des Versicherungsvertragsgesetzes können ohne Alterungsrückstellung kalkuliert werden.

[…]

§ 341f „Deckungsrückstellung" HGB.

(1) Deckungsrückstellungen sind für die Verpflichtungen aus dem Lebensversicherungs- und dem nach Art der Lebensversicherung betriebenen Versicherungsgeschäft in Höhe ihres versicherungsmathematisch errechneten Wertes einschließlich bereits zugeteilter Überschussanteile mit Ausnahme der verzinslich angesammelten Überschussanteile und nach Abzug des versicherungsmathematisch ermittelten Barwerts der künftigen Beiträge zu bilden (prospektive Methode).
Ist eine Ermittlung des Wertes der künftigen Verpflichtungen und der künftigen Beiträge nicht möglich, hat die Berechnung auf Grund der aufgezinsten Einnahmen und Ausgaben der vorangegangenen Geschäftsjahre zu erfolgen (retrospektive Methode).

(2) Bei der Bildung der Deckungsrückstellung sind auch gegenüber den Versicherten eingegangene Zinssatzverpflichtungen zu berücksichtigen, sofern die derzeitigen oder zu erwartenden Erträge der Vermögenswerte des Unternehmens für die Deckung dieser Verpflichtungen nicht ausreichen.

(3) In der Krankenversicherung, die nach Art der Lebensversicherung betrieben wird, ist als Deckungsrückstellung eine Alterungsrückstellung zu bilden;
hierunter fallen auch der Rückstellung bereits zugeführte Beträge aus der Rückstellung für Beitragsrückerstattung sowie Zuschreibungen, die dem Aufbau einer Anwartschaft auf Beitragsermäßigung im Alter dienen.
Bei der Berechnung sind die für die Berechnung der Prämien geltenden aufsichtsrechtlichen Bestimmungen zu berücksichtigen.

§ 1 „Versicherungsmathematische Methoden in der Krankenversicherung" KalV.

Versicherungsmathematische Methoden zur Berechnung der Prämien und Rückstellungen in der nach Art der Lebensversicherung betriebenen Krankenversicherung sind die nach den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik unter Verwendung der in den §§ 2 und 4 bis 8 näher bezeichneten Rechnungsgrundlagen erfolgenden Berechnungen der Prämien und der Alterungsrückstellungen nach Maßgabe der §§ 3, 10, 11, 13 und 16.

§ 3 „Gleiche Rechnungsgrundlagen" KalV.
Für die Berechnung der Prämie und der Alterungsrückstellung sind die gleichen Rechnungsgrundlagen zu verwenden.

§ 4 „Rechnungszins" KalV.
Der Rechnungszins für die Prämienberechnung und die Berechnung der Alterungsrückstellung darf 3,5 vom Hundert nicht übersteigen.

§ 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" KalV.
[…]
(3) Unmittelbare Abschlusskosten dürfen durch Zillmerung nur in einer solchen Höhe in die Prämien eingerechnet werden, dass die Gesamtalterungsrückstellung eines Zugangsjahres im Tarif höchstens vier Jahre und jede Einzelalterungsrückstellung nicht länger als fünfzehn Jahre und nicht länger als die Hälfte der tariflich vorgesehenen künftigen Vertragsdauer negativ ist.
[…]

§ 16 „Alterungsrückstellung" KalV.
Bei der Berechnung der Alterungsrückstellung nach § 341f des Handelsgesetzbuchs und § 25 Absatz 5 der Verordnung über die Rechnungslegung von Versicherungsunternehmen vom 8. November 1994 (BGBl. I S. 3378) ist die Summe der Einzelalterungsrückstellungen am Abschlussstichtag unter Berücksichtigung des Alters des Versicherten an diesem Stichtag zu Grunde zu legen.
Zur Berechnung der Alterungsrückstellungen nach Satz 1 ist auch ein Näherungsverfahren zulässig, bei dem das arithmetische Mittel der Einzelalterungsrückstellungen, die sich dadurch ergeben, dass die Versicherungsdauern auf ganze Jahre auf- und abgerundet werden, verwendet wird.

Verordnung über die Rechnungslegung von Versicherungsunternehmen (Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung – RechVersV)
§ 25 „Deckungsrückstellung" RechVersV.
(1) Bei der Berechnung der Deckungsrückstellung sind für die Berücksichtigung der Risiken aus dem Versicherungsvertrag angemessene Sicherheitszuschläge anzusetzen.
Einmalige Abschlusskosten dürfen nach einem angemessenen versicherungsmathematischen Verfahren, insbesondere dem Zillmerungsverfahren, berücksichtigt werden.
[…]
(5) Bei der Berechnung der von den Krankenversicherungsunternehmen zu bildenden Alterungsrückstellung finden die auf Grund des § 12c Abs. 1 Nummer 1 des Versicherungsaufsichtsgesetzes erlassenen Vorschriften Anwendung.
Ergibt sich durch Aufrechnung negativer Alterungsrückstellungen gegen positive Alterungsrückstellungen für die Alterungsrückstellung aller vom Krankenversicherungsunternehmen selbst abgeschlossenen Versicherungen eine negative Alterungsrückstellung, so ist diese in der Bilanz mit Null einzustellen.
[…]

1.1 Anwartschaftsdeckungsverfahren.

Für den weiteren Vertragsverlauf nach m Jahren ist das grundständige Äquivalenzprinzip zum Eintrittsalter x auf der Zahlungsseite um die (gezillmerte) Alterungsrückstellung ${}^{(Z)}V_{x;x+m}$ zu erweitern zu (dabei bedeutet „zukünftig“ einschließlich der Geldflüsse zum erreichten Alter $x+m$):

Erweitertes Äquivalenzprinzip zum Alter.		(1:1)
gesamtes zukünftiges diskontiertes Ausgabenvolumen	=	gesamtes zukünftiges diskontiertes Einnahmenvolumen
	+	vorhandene tarifliche Alterungsrückstellung

Äquivalenzprinzip zum Alter $x+m$ (bei normierten Rechnungsgrundlagen).		
	ohne Zillmerung	mit Zillmerung
	$A_{x+m} = p_x \cdot a_{x+m} + v_{x;x+m}$	$A_{x+m} = {}^{Z}p_x \cdot a_{x+m} + {}^{Z}v_{x;x+m}$

Auf Grund der Beitragskalkulation nach Art der Lebensversicherung (mit Ansparprozess) liegt die während der Vertragslaufzeit gleichbleibende Nettoprämie P_x für monoton steigende Kopfschäden K_x

- in den anfänglichen Altern x_0+a über den durchschnittlich in Anspruch genommenen Leistungen ($P_{x_0+a} > K_{x_0+a}$),
- in den späteren Altern $x_\omega-s$ unter den durchschnittlich in Anspruch genommenen Leistungen ($P_{x_\omega-s} < K_{x_\omega-s}$);

was eine Konstanz des Beitragsverlaufes bewirkt.

Die tarifliche Alterungsrückstellung (AR) kann dabei als Teil eines kollektiven Sparbuchs von Gleichaltrigen aufgefasst werden,

- dem in den anfänglichen Altern x_0+a die – bezüglich der Kopfschäden – überschüssigen Beitragsanteile $P_{x_0+a} - K_{x_0+a}$ (die sogenannte Sparprämien) zugeführt werden,
- das in den Altern $x_\omega-s$ die – nicht in Gänze aus dem Beitrag gedeckten – Kopfschäden $K_{x_\omega-s} - P_{x_\omega-s}$ finanziert.

Dabei wird die Alterungsrückstellung unter Berücksichtigung von Rechnungszins und rechnungsmäßiger Ausscheideordnung geführt.

Die Alterungsrückstellung dient also der Vorsorge, um die in späteren Altern höheren Gesundheitskosten finanzieren zu können.

Bis zur Einführung des Übertragungswertes zum 01.01.2009 blieb allerdings diese Vorsorge auf dasjenige Versicherungsunternehmen beschränkt, bei dem die Versicherung geführt wurde. Bei einem Unternehmenswechsel verblieb nämlich die gesamte vorhandene Alterungsrückstellung beim verlassenen Unternehmen und wurde in voller Höhe dem dort verbliebenen Versichertenkollektiv der Gleichaltrigen zugeführt.

Kollektiveigenschaft der Alterungsrückstellung.

- Als Grundvoraussetzung ist zu beachten, dass die Krankenversicherung im weiteren Sinne eine Risikoversicherung ist und kein individueller Sparvertrag (wie zum Beispiel eine Lebensversicherung mit Leistungen im Erlebensfall). Unter dieser Prämisse wird im Folgenden die unter Aktuaren weitverbreitete gängige Meinung dargestellt, dass eine pauschale Individualisierung der Alterungsrückstellung nicht sachgerecht sei. In der Literatur gibt es viele dem diametral widersprechende Äußerungen, auch juristische Aspekte sind dabei zu beachten. Je nach Versicherungsart (Lebens-, Renten-, Berufsunfähigkeit-, Pflegerentenversicherungen etc., die von Lebensversicherungsgesellschaften betrieben werden) gibt es unterschiedliche Betrachtungsweisen der Deckungsrückstellung, dabei auch die Aufteilung des Kollektivs in Beitragszahlende und Leistungsempfangende mit unterschiedlichen Zuweisungen von Deckungsrückstellungen.

- So wie die Prämie für ein Kollektiv Gleichaltriger ggf. gleichen Geschlechts bestimmt wird, bezieht sich auch die Alterungsrückstellung auf das Kollektiv Gleichaltriger ggf. gleichen Geschlechts. Die Höhe der Gesamtalterungsrückstellung für das Kollektiv Gleichaltriger ggf. eines Geschlechts ist unabhängig von der Gesamtalterungsrückstellung jedes anderen Alters ggf. jedes anderen Geschlechts. Dies resultiert unmittelbar aus dem Äquivalenzprinzip.

- Die Nettoprämie ist – unter Zusammenfassung einer Vielzahl von unterschiedlichen Versicherungsfällen mit statistischen und berechenbaren Gesetzmäßigkeiten – alleinig für das Kollektiv von Gleichaltrigen ggf. gleichen Geschlechts in seiner Gesamtheit bemessen, für die Individuen selbst bleibt sie ohne Aussagekraft. Für jeden einzelnen Versicherten dieses Alters entspricht nämlich der zukünftige persönliche Schadenverlauf i.d.R. nicht den jeweiligen altersgemäßen angesetzten rechnungsmäßigen Kopfschäden, die an Hand der durchschnittlichen Schäden im Kollektiv (unter Beachtung des Gesetzes der großen Zahlen) angesetzt werden.

- Die Kollektiveigenschaft der Nettoprämie überträgt sich direkt auf die Alterungsrückstellung. Auch die Gesamtalterungsrückstellung ist eine rein stochastische kollektive Größe, nämlich die Differenz zwischen dem Barwert der zukünftigen erwarteten Versicherungsleistungen und dem Barwert der zukünftigen erwarteten Prämieneinnahmen für das betreffende Kollektiv. Das Kollektiv von Gleichaltrigen ggf. gleichen Geschlechts bildet gemeinsam die Gesamtalterungsrückstellung und benötigt es auch im Laufe der Zeit.

- In der Krankenversicherung ist die Gesamtalterungsrückstellung somit im engen Sinne kaum auf die einzelnen Verträge aufteilbar (obwohl dies beim Tarifwechsel aufgeweicht wird: hier wird nämlich der dem Wechsler zugeordnete Anteil der Gesamtalterungsrückstellung dem Kollektiv des abgebenden Tarifs entzogen und sodann dem Kollektiv des aufnehmenden Tarifs zugeführt). Es findet nämlich kein Ansparen auf eine bestimmte individuelle Leistung stattfindet, ferner ist die Versicherungsleistung in der Krankenversicherung zweidimensional: sie hängt zum einen vom Zeitpunkt sowie der Häufigkeit und zum anderen von der Höhe der Schäden ab.

- Der auf einzelne versicherte Personen rein rechnerisch entfallende Anteil der altersbezogenen kollektiven Gesamtalterungsrückstellung von Gleichaltrigen ggf. gleichen Geschlechts gibt auch nicht wieder, wie sich das individuelle Risiko gestaltet resp. gestaltet hat.
- Dies sei an zwei Beispielen verdeutlicht:
  - Eine gesündere versicherte Person hätte retrospektiv betrachtet eine höhere Alterungsrückstellung, da sie kaum Leistungen in Anspruch genommen, d.h. sie hätte mehr ansparen können. Prospektiv betrachtet, würde für sie dagegen voraussichtlich eine geringere Alterungsrückstellung genügen, da sie vermutlich auch zukünftig weniger Leistungen in Anspruch nehmen wird.
  - Eine kränkere versicherte Person hätte retrospektiv betrachtet eine geringere Alterungsrückstellung, da sie viele Leistungen in Anspruch genommen, d.h. sie hätte weniger ansparen können. Prospektiv betrachtet, würde für sie dagegen voraussichtlich eine höhere Alterungsrückstellung benötigt, da sie vermutlich auch zukünftig viele Leistungen in Anspruch nehmen wird.
  - An Hand dieser beiden Versicherungsverläufe, denen kalkulatorisch der gleiche Anteil an der Alterungsrückstellung zugeschrieben wird, wird sichtbar, dass nur für das Kollektiv in Gänze die Alterungsrückstellung richtig bemessen ist.
- Bei geschlechts*unabh*ängig kalkulierten Tarifen entfällt die angegebene Differenzierung nach dem Geschlecht

Bemerkungen

- § 12 „Substitutive Krankenversicherung“ Absatz 6 VAG ermöglicht, dass substitutive Krankenversicherungen mit befristeten Vertragslaufzeiten, dazu gehören ggf. Ausbildungs-, Auslands-, Ausländer-, Reise- und Restschuldkrankenversicherungen sowie befristete Krankentagegeldversicherungen, ohne Alterungsrückstellung kalkuliert werden können.
- In § 4 „Rechnungszins“ KalV wird explizit darauf hingewiesen, dass der Rechnungszins auch bei der Berechnung der Alterungsrückstellung 3,5 Prozent nicht übersteigen darf, allerdings ist er gemäß § 3 „Gleiche Rechnungsgrundlagen“ KalV in gleicher Höhe wie bei der Prämienkalkulation anzusetzen. Dieser Hinweis ist vor dem Hintergrund zu sehen, dass neben der üblichen tariflichen Alterungsrückstellung, die alleinig in diesem Kapitel beschrieben wird, es weitere Alterungsrückstellungen gibt, die für die Versicherten geführt werden, beispielsweise diejenigen, die durch den gesetzlichen Zuschlag oder durch Beitragsentlastungstarife aufgebaut werden oder durch Zuschreibungen erfolgen.

1.2 Ungezillmerte Alterungsrückstellung.

Definition.

- Die normierte ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ gibt für Ursprünglich-x-Jährige im Alter $x+m$ denjenigen Betrag an, der genügt, während der weiteren Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω zusammen mit der laufend jährlich zu entrichtenden normierten Nettoprämie p_x (zum Eintrittsalter x) jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ eine veränderliche Rente (Zahlung) in Höhe $k_{x+m+\mu}$ ($\mu \geq 0$) zu finanzieren.

1.2.1 Prospektive Ermittlung der ungezillmerten Alterungsrückstellung.

Prospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung. (1:2)

${}^{prosp}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$	prospektiv ermittelte ungezillmerte Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

Definition und Berechnung.

- Die prospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ gibt den Fehlbetrag aus dem gesamten zukünftigen diskontierten Ausgabenvolumen bezüglich des erreichten Alter $x+m$ abzüglich des gesamten zukünftigen diskontierten Einnahmenvolumens an Nettoprämien bezüglich des erreichten Alter $x+m$ an. Prospektiv heißt dabei zukunftsbezogen, dabei bedeutet „zukünftig“ einschließlich der Geldflüsse zum Alter $x+m$.

- Die normierte prospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{prosp}v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ lässt sich als Differenz aus Leistungsbarwert A_{x+m} zum erreichten Alter $x+m$ abzüglich des normierten Nettoprämienbarwerts $p_x \cdot a_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ bezüglich der normierten Nettoprämie p_x zum Eintrittsalter x darstellen:

  $${}^{prosp}v_{x;x+m} = A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m}.$$

Herleitung

- Die gesamte vorhandene tarifliche Alterungsrückstellung $l_{x+m} \cdot {}^{prosp}V_{x;x+m}$ des Kollektivs nach m Jahren ergibt sich demnach aus der Differenz des gesamten restlichen zukünftigen diskontierten Leistungsvolumens abzüglich des gesamten restlichen zukünftigen diskontierten Einnahmenvolumens, bezogen jeweils auf das erreichte Alter $x+m$.

			zukünftige erwartete Versicherungsleistungen		zukünftige erwartete Einnahmen	
Jahr	Diskon-tierung	Anzahl VP	Leistung	diskontiertes Leistungsvolumen	Zah-lung	diskontiertes Zahlungsvolumen
—	—	—	—	—	—	—
t_0+m	v^0	l_{x+m+0}	K_{x+m+0}	$l_{x+m+0} \cdot K_{x+m+0} \cdot v^0$	P_x	$l_{x+m+0} \cdot P_x \cdot v^0$
t_0+m+1	v^1	l_{x+m+1}	K_{x+m+1}	$l_{x+m+1} \cdot K_{x+m+1} \cdot v^1$	P_x	$l_{x+m+1} \cdot P_x \cdot v^1$
t_0+m+2	v^2	l_{x+m+2}	K_{x+m+2}	$l_{x+m+2} \cdot K_{x+m+2} \cdot v^2$	P_x	$l_{x+m+2} \cdot P_x \cdot v^2$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
$t_0+m+\mu$	v^μ	$l_{x+m+\mu}$	$K_{x+m+\mu}$	$l_{\mu+m+\mu} \cdot K_{\mu+m+\mu} \cdot v^\mu$	P_x	$l_{x+m+\mu} \cdot P_x \cdot v^\mu$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
Kollektiv-Summe bezüglich Barwerte zum Bezugsjahr t_0+m				$l_{x+m} \cdot GA_{x+m}$ °)		$l_{x+m} \cdot P_x a_{x+m}$ °)

°) unnormierte Barwerte GA_{x+m}, $P_x a_{x+m}$ je versicherter Person

mit: Diskontierungsfaktor v, $v = \frac{1}{1+r}$ zum Rechnungszins r
Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende l_x
rechnungsmäßige normierte Kopfschäden $K_x = G \cdot k_x$ mit Grundkopfschaden G und normierten Kopfschäden k_x
kalkulatorisches Endalter x_ω

- Gemäß erweitertem Äquivalenzprinzip (Formel (1:1, p. 4)): $l_{x+m} \cdot GA_{x+m} = l_{x+m} \cdot P_x a_{x+m} + l_{x+m} \cdot {}^{prosp}V_{x;x+m}$ ist mit $GA_{x+m} = G \cdot A_{x+m}$, $P_x a_{x+m} = P_x \cdot a_{x+m}$ (wie beim grundständigem Äquivalenzprinzip hergeleitet) unter Beachtung des kalkulatorischen Endalters x_ω demnach

  $$l_{x+m} \cdot G \cdot A_{x+m} = l_{x+m} \cdot P_x \cdot a_{x+m} + l_{x+m} \cdot {}^{prosp}V_{x;x+m} \quad (m \ge 0,\ x+m \le x_\omega),$$

  dabei bezeichnet ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ diejenige unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung, die für Ursprünglich-x-Jährige nach m Jahren benötigt wird, um die restlichen zukünftigen Versicherungsleistungen – unter Beachtung des gesamten restlichen zukünftigen diskontierten Einnahmenvolumens – zu finanzieren. Die prospektive unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ ergibt sich somit zu

  $${}^{prosp}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}\,. \qquad \blacksquare$$

1.2.2 Retrospektive Ermittlung der ungezillmerten Alterungsrückstellung.

Retrospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung.	(1:3)
$^{retro}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$	retrospektiv ermittelte ungezillmerte Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

Definition und Berechnung.

- Die retrospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung $^{retro}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ gibt den Überschussbetrag aus dem gesamten vergangenem aufgezinsten Einnahmenvolumen bezüglich des erreichten Alter $x+m$ abzüglich des gesamten vergangenen aufgezinsten Ausgabenvolumens an Nettoprämien bezüglich des erreichten Alter $x+m$ an. Retrospektiv heißt dabei zukunftsbezogen, dabei bedeutet „vergangenen“ ohne die Geldflüsse zum Alter $x+m$.

Herleitung.

- Die gesamte vorhandene tarifliche Alterungsrückstellung $l_{x+m} \cdot {}^{retro}V_{x;x+m}$ des Kollektivs nach m Jahren ergibt sich aus der Differenz des gesamten vergangenen aufgezinsten Leistungsvolumens abzüglich des gesamten vergangenen aufgezinsten Einnahmenvolumens, bezogen jeweils auf das erreichte Alter $x+m$.

			vergangenen aufgezinste Versicherungsleistungen		vergangenen aufgezinste Einnahmen	
Jahr	Aufzinsung	Anzahl VP	Leistung	aufgezinstes Leistungsvolumen	Zahlung	aufgezinstes Zahlungsvolumen
t_0	$(1+r)^m$	l_{x+0}	K_{x+0}	$l_{x+0} \cdot K_{x+0} \cdot (1+r)^{m-0}$	P_x	$l_{x+0} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-0}$
t_0+1	$(1+r)^{m-1}$	l_{x+1}	K_{x+1}	$l_{x+1} \cdot K_{x+1} \cdot (1+r)^{m-1}$	P_x	$l_{x+1} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-1}$
t_0+2	$(1+r)^{m-2}$	l_{x+2}	K_{x+2}	$l_{x+2} \cdot K_{x+2} \cdot (1+r)^{m-2}$	P_x	$l_{x+2} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-2}$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
$t_0+\mu$ °)	$(1+r)^{m-\mu}$	$l_{x+\mu}$	$K_{x+\mu}$	$l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$	P_x	$l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu}$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
t_0+m-1	$(1+r)^1$	l_{x+m-1}	K_{x+m-1}	$l_{x+m-1} \cdot K_{x+m-1} \cdot (1+r)^1$	P_x	$l_{x+m-1} \cdot P_x \cdot (1+r)^1$
t_0+m	—	l_{x+m}	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
Kollektiv-Summe zum Bezugsjahr t_0+m			$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$		$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu}$	

°) $t_0+m-(t_0+\mu)=m-\mu$

mit: Rechnungszins r
Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende l_x
rechnungsmäßige normierte Kopfschäden $K_x = G \cdot k_x$ mit Grundkopfschaden G und normierten Kopfschäden k_x

- Gemäß erweitertem Äquivalenzprinzip (Formel (1:1, p. 4)) ist demnach:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu} + l_{x+m} \cdot {}^{retro}V_{x;x+m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu} \,, \tag{1:4}$$

dabei bezeichnet ${}^{retro}V_{x;x+m}$ diejenige unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung, die im Laufe der m Jahren nach Versicherungsbeginn zum Alter x angesammelt wurde.

- Ziel: Darstellung gemäß prospektiver Alterungsrückstellung gemäß Formel (1:3, p. 9)
- Gesamtes vergangenes aufgezinstes Leistungsvolumen:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

  - mit $K_x = G \cdot k_x$:

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot k_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

  - mit $O_x := D_x \cdot k_x$ und Erweiterung um $\frac{v^{x+\mu}}{v^{x+\mu}}$

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot k_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu} \cdot \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

  - mit $\frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu} = \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{1+r}}\right)^{m-\mu} = \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \left(\frac{1}{v}\right)^{m-\mu} = \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \frac{1}{v^{m-\mu}}$
$= \frac{1}{v^{x+\mu+m-\mu}} = \frac{1}{v^{x+m}}$:

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} \underbrace{l_{x+\mu} \cdot k_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu}}_{O_{x+\mu}} \cdot \underbrace{\frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu}}_{\frac{1}{v^{x+m}}}$$

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} O_{x+\mu} \cdot \frac{1}{v^{x+m}}$$

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} O_{x+\mu}$$

  - Umparametrisierung Summe $x+\mu \mid 0 \le \mu \le m{-}1 \;\rightarrow\; \xi \mid x \le \xi \le x{+}m{-}1$:

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi$$

  - Erweiterung der Summation bis x_ω:

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \Big(\underbrace{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi}_{U_x} - \underbrace{\sum_{\xi=x+m}^{x_\omega} O_\xi}_{U_{x+m}} \Big)$$

  - mit $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$ für die Leistungssumme:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu} = G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \left(U_x - U_{x+m}\right). \tag{1:5}$$

- Gesamtes vergangenes aufgezinstes Prämienvolumen:

$$\sum_{\mu=0}^{x+m-1} l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

$$= P_x \cdot \sum_{\mu=0}^{x+m-1} l_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

  - Analog zum gesamtem vergangenen aufgezinsten Leistungsvolumen für die Prämiensumme:

$$\sum_{\mu=0}^{x+m-1} l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu} = P_x \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \left(N_x - N_{x+m}\right). \tag{1:6}$$

- Mit der Gleichheit auf Grund des Äquivalenzprinzipes gemäß Formel (1:4, p. 10) und den Formeln (1:5, p. 11) und (1:6, p. 11):

$$\underbrace{G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \left(U_x - U_{x+m}\right)}_{\text{Summe über alle } l_{x+m}} + \underbrace{l_{x+m} \cdot {}^{retro}V_{x;x+m}}_{\text{Summe über alle } l_{x+m}} = \underbrace{P_x \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \left(N_x - N_{x+m}\right)}_{\text{Summe über alle } l_{x+m}}$$

$$\Rightarrow {}^{retro}V_{x;x+m} = P_x \cdot \frac{1}{l_{x+m} \cdot v^{x+m}} \cdot \left(N_x - N_{x+m}\right) - G \cdot \frac{1}{l_{x+m} \cdot v^{x+m}} \cdot \left(U_x - U_{x+m}\right)$$

  - mit $D_x := v^x \cdot l_x$

$${}^{retro}V_{x;x+m} = \underbrace{\underbrace{P_x}_{G \cdot \frac{U_x}{N_x}} \cdot \frac{N_x}{D_{x+m}}}_{G \cdot \frac{U_x}{D_{x+m}}} - P_x \cdot \underbrace{\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}}_{a_{x+m}} - G \cdot \frac{U_x}{D_{x+m}} + G \cdot \underbrace{\frac{U_{x+m}}{D_{x+m}}}_{A_{x+m}}$$

$${}^{retro}V_{x;x+m} = \underbrace{\frac{G \cdot U_x - G \cdot U_x}{D_{x+m}}}_{=0} - P_x \cdot a_{x+m} + G \cdot A_{x+m}$$

$${}^{retro}V_{x;x+m} = 0 + G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}.$$

- Die prospektive unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ ergibt sich demnach zu

$${}^{retro}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}.$$

■

1.2.3 Darstellung der ungezillmerten Alterungsrückstellung.

Ungezillmerte Alterungsrückstellung. (1:7)

normiert *unnormiert*

ungezillmerte Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

$$v_{x;x+m} = A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m} \qquad V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

$$v_{x;x+m} = (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m} \qquad V_{x;x+m} = (P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m}$$

$$v_{x;x+m} = \left[(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}) \cdot b_{x+m} - (1 - \Delta_{j/s\,|\,x}) \cdot b_x - (\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}) \right] \cdot a_{x+m}$$

$$v_{x;x+m} = \left[(b_{x+m} - b_x) - (\Delta_{j/s\,|\,x+m} \cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x} \cdot b_x) - (\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}) \right] \cdot a_{x+m}$$

$$V_{x;x+m} = \left[(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}) \cdot B_{x+m} - (1 - \Delta_{j/s\,|\,x}) \cdot B_x - (\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}) \right] \cdot a_{x+m}$$

$$V_{x;x+m} = \left[(B_{x+m} - B_x) - (\Delta_{j/s\,|\,x+m} \cdot B_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x} \cdot B_x) - (\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}) \right] \cdot a_{x+m}$$

$$v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{v_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{v_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k}}$$

$$V_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{V_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{V_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k}}$$

Gleichheit von prospektiv und retrospektiv ermittelter ungezillmerten Alterungsrückstellung.

- Gemäß Formeln (1:2, p. 7):

  $${}^{prosp}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

  und (1:3, p. 9):

  $${}^{retro}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

  gilt die Übereinstimmung von prospektiv und retrospektiv ermittelter ungezillmerter Alterungsrückstellung ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ resp. ${}^{retro}V_{x;x+m}$, so dass sich allgemein die Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ für Versicherte zum Eintrittsalter x nach m Jahren, d.h. zum erreichten Alter $x+m$ gemäß

  $$V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

  bemisst. ■

Darstellungen.

- Die normierte ungezillmerte Alterungsrückstellung $v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ lässt sich als Differenz aus Leistungsbarwert A_{x+m} zum erreichten Alter $x+m$ abzüglich des normierten Prämienbarwerts $p_x \cdot a_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ bezüglich der normierten Nettoprämie p_x zum Eintrittsalter x darstellen:

$v_{x;x+m} = A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m}$.

- Weiter ergibt sich die Darstellung der normierten ungezillmerten Alterungsrückstellung $v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ als Barwert der Differenz zwischen der normierten Nettoprämie p_{x+m} zum erreichtem Alter $x+m$ abzüglich der normierten Nettoprämie p_{x+m} zum Eintrittsalter x:

  $v_{x;x+m} = (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m}$.

- Weiter ergibt sich eine Darstellung der normierten ungezillmerten Alterungsrückstellung $v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ als Barwert bezüglich ungezillmerter Bruttoprämie b_{x+m} zum erreichtem Alter $x+m$ und ungezillmerter Bruttoprämie b_{x+m} zum Eintrittsalter x, beide Prämien jeweils abzüglich von Zuschlägen:

  $v_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot b_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$.

Herleitung.

- Mit der Nettoprämienformel $P_x = G \cdot \frac{A_x}{a_x}$, d.h. $G \cdot A_{x+m} = P_{x+m} \cdot a_{x+m}$ lautet $v_{x;x+m} = A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m}$:

  $V_{x;x+m} = (P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m}$ resp.

  $v_{x;x+m} = (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m}$. □

- Mit $B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$ ($\Rightarrow$ $P_x = \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot B_x - \Gamma_{j/s\,|\,x}$, $\Delta_{j/s\,|\,x} = \begin{cases} \Delta_j & \text{für } x < x_s \\ \Delta_s & \text{für } x \geq x_s \end{cases}$, $\Gamma_{j/s\,|\,x} = \begin{cases} \Gamma_j & \text{für } x < x_s \\ \Gamma_s & \text{für } x \geq x_s \end{cases}$) für ungezillmerte Jahresbruttoprämien folgt aus $V_{x;x+m} = (P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m}$:

$$\Rightarrow V_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot B_{x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot B_x + \Gamma_{j/s\,|\,x}\right] \cdot a_{x+m}$$

$$V_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot B_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot B_x - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$$\Rightarrow v_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot b_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$$v_{x;x+m} = \left[\left(b_{x+m} - b_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m} \cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x} \cdot b_x\right) - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

innerhalb der Altersintervalle j resp. s sodann jeweils

  - $V_{x;x+m\,|\,j/s} = \left(B_{x+m} - B_x\right) \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten ungezillmerten Jahresbruttoprämien B_ξ
  - $V_{x;x+m\,|\,j/s} = 12 \cdot \left(\widetilde{B}_{x+m} - \widetilde{B}_x\right) \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten ungezillmerten Monatsbruttoprämien $\widetilde{B}_\xi$ ($\widetilde{B}_\xi = \frac{1}{12} \cdot B_\xi$)

- $v_{x;x+m\,|\,j/s} = (b_{x+m} - b_x)\cdot(1-\Delta_{j/s})\cdot a_{x+m}$ bezüglich der normierten ungezillmerten Jahresbruttoprämien b_ξ ($b_\xi = \frac{1}{G}\cdot B_\xi$)
- $v_{x;x+m\,|\,j/s} = 12\cdot(\widetilde{b}_{x+m} - \widetilde{b}_x)\cdot(1-\Delta_{j/s})\cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten ungezillmerten Monatsbruttoprämien $\widetilde{b}_\xi$ ($\widetilde{b}_\xi = \frac{1}{G}\cdot \widetilde{B}_\xi$). ■

Bemerkung.

- Die normierte ungezillmerte Alterungsrückstellung $v_{x\,;\,x+m+k}$ zum erreichtem Alter $x+m+k$ ergibt sich aus den ungezillmerten Alterungsrückstellungen $v_{x\,;\,x+m}$ und $v_{x+m\,;\,x+m+k}$ zum Grenzalter $x+m$ durch:

$$v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{v_{x;x+m}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x \text{ bis } x+m} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\text{Rabattauszahlung, Verzinsung und Vererbung}} + \underbrace{v_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\text{aufgebaut in den Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k} .$$

  - Begründung: an Hand von $v_{x;x+m} = (p_{x+m} - p_x)\cdot a_{x+m}$ gemäß Formeln (1:7, p. 12) ergeben sich die Darstellungen $v_{x\,;\,x+m+k} = (p_{x+m+k} - p_x)\cdot a_{x+m+k}$, $v_{x\,;\,x+m} = (p_{x+m} - p_x)\cdot a_{x+m+k}$ und $v_{x+m\,;\,x+m+k} = (p_{x+m+k} - p_{x+m})\cdot a_{x+m+k}$.
  - Für $v_{x\,;\,x+m+k} = (p_{x+m+k} - p_x)\cdot a_{x+m+k}$ ist

$$v_{x\,;\,x+m+k} = p_{x+m+k}\cdot a_{x+m+k} - p_x \cdot a_{x+m+k}$$

  - Ergänzung um $(-\,p_{x+m}\cdot a_{x+m+k} + p_{x+m}\cdot a_{x+m+k})$:

$$v_{x\,;\,x+m+k} = p_{x+m+k}\cdot a_{x+m+k} - p_{x+m}\cdot a_{x+m+k} + p_{x+m}\cdot a_{x+m+k} - p_x\cdot a_{x+m+k}$$

$$v_{x\,;\,x+m+k} = (p_{x+m+k} - p_{x+m})\cdot a_{x+m+k} + (p_{x+m} - p_x)\cdot a_{x+m+k}$$

  - Ergänzung des ersten Terms um $\frac{a_{x+m}}{a_{x+m}}$

$$v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{(p_{x+m} - p_x)\cdot a_{x+m}}_{v_{x;x+m}} \cdot \frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}} + \underbrace{(p_{x+m+k} - p_{x+m})\cdot a_{x+m+k}}_{v_{x+m;x+m+k}}$$

$$v_{x\,;\,x+m+k} = v_{x;x+m}\cdot\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}} + v_{x+m\,;\,x+m+k} .$$

  - Unnormierte Darstellung mit $V_{\xi\,;\,\mu} = G\cdot v_{\xi\,;\,\mu}$. ■

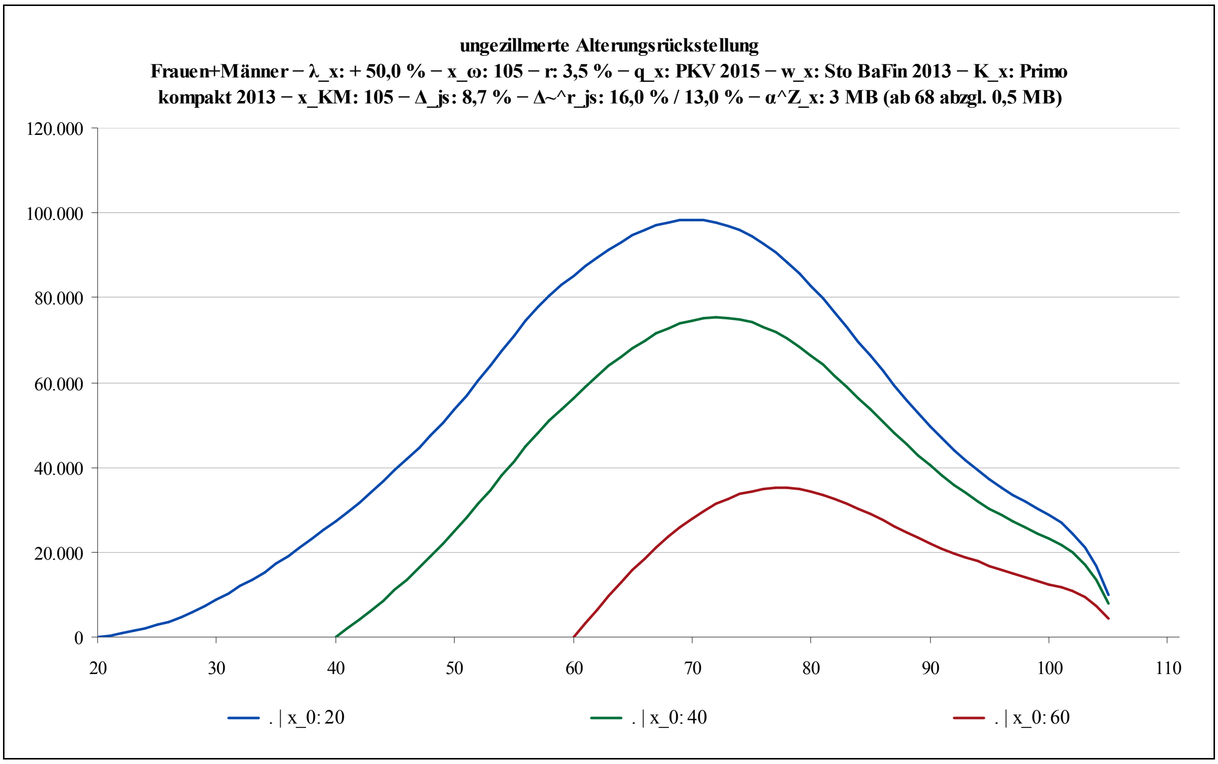
Zahlenbeispiel.

				P_x	18,11	21,18	26,79	34,96	50,00
P_x	GA_x+m	a_x+m	V_x;x+m	x	1	2	3	4	5
			x+m						
18,11	65,19	3,60	1		-0,01	.	.	.	.
21,18	64,19	3,03	2		9,32	0,01	.	.	.
26,79	64,82	2,42	3		20,99	13,56	-0,01	.	.
34,96	58,39	1,67	4		28,15	23,02	13,65	0,01	.
50,00	50,00	1,00	5		31,89	28,82	23,21	15,04	0,00

In der Diagonalen müssten algebraisch Nullen errechnet werden, dazu nachstehende Formel (1:8, p. 16), wovon allerdings die numerischen Ergebnisse auf Grund von Rundungen in den Zwischenschritten abweichen.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 20, 40 resp. 60.



Bemerkung.

- Die ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x+0}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m=0$ beträgt Null, d.h. für $m=0$ ist $V_{x;x+0}=\left(P_{x+0}-P_x\right)\cdot a_{x+0}=0\cdot a_{x+0}=0$:

$$V_{x;x+0} = 0\,. \tag{1:8}$$

- Die ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x_\omega}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter x_ω beträgt $\left(K_{x_\omega} - P_x\right)$, d.h. es ist $V_{x;x_\omega} = G \cdot A_{x_\omega} - P_x \cdot a_{x_\omega} = G \cdot k_{x_\omega} - P_x \cdot 1 = K_{x_\omega} - P_x$

$$V_{x;x_\omega} = K_{x_\omega} - P_x\,. \tag{1:9}$$

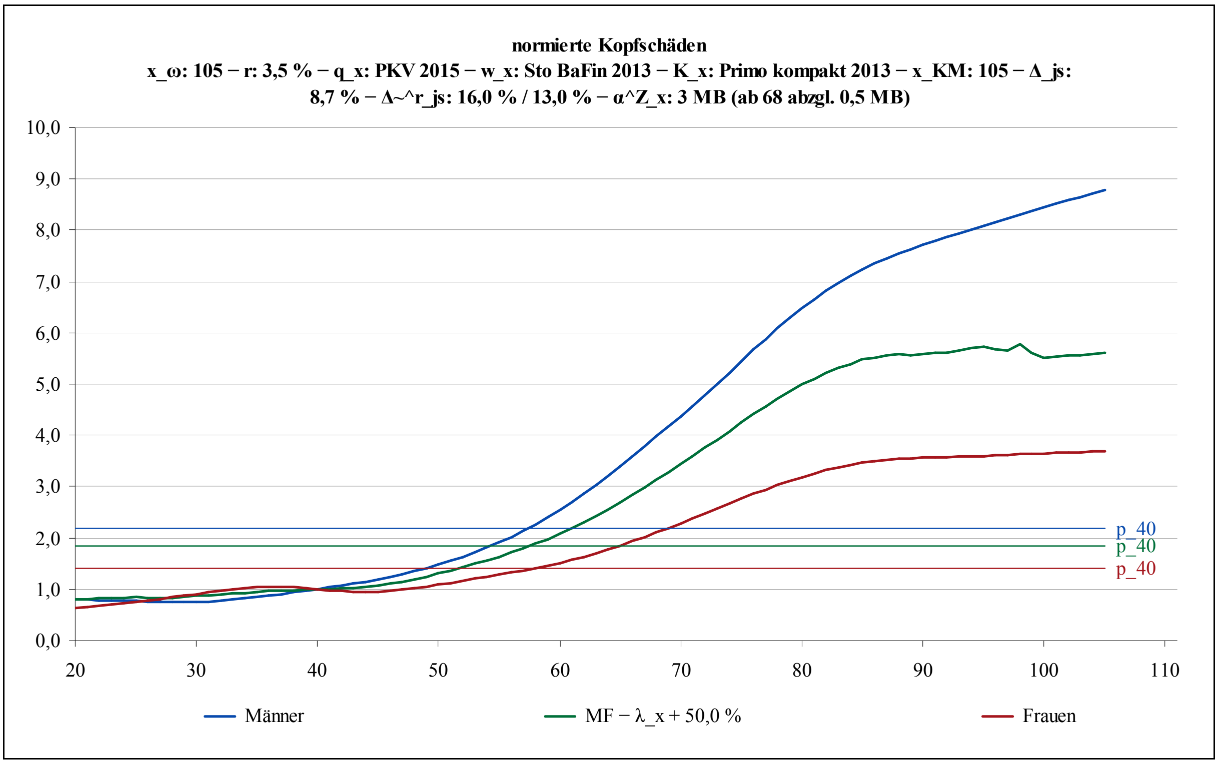
- Sei das Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ ab dem Alter x_K konstant, d.h. $\forall \xi \mid \xi \ge x_K : k_\xi = k_{x_K}$, sodann wird für das Eintrittsalter x_K im weiteren Verlauf keine tarifliche Alterungsrückstellung aufgebaut, d.h. $\forall \mu \mid \mu \ge 0 : V_{x_K;x_K+\mu} = 0$.
    - Begründung: Da für diesen Altersbereich die Nettoprämie konstant ist, d.h. $\forall \mu \mid \mu \ge 0 : p_{x_K+\mu} = k_{x_K}$ gilt mit der Darstellung $v_{x;x+\mu} = \left(p_{x+\mu} - p_x\right) \cdot a_{x+\mu}$ gemäß Formel (1:7, p. 12) für die Alterungsrückstellung: $v_{x_K;x_K+\mu} = \left(k_{x_K} - k_{x_K}\right) \cdot a_{x_K+\mu} = 0$. ■

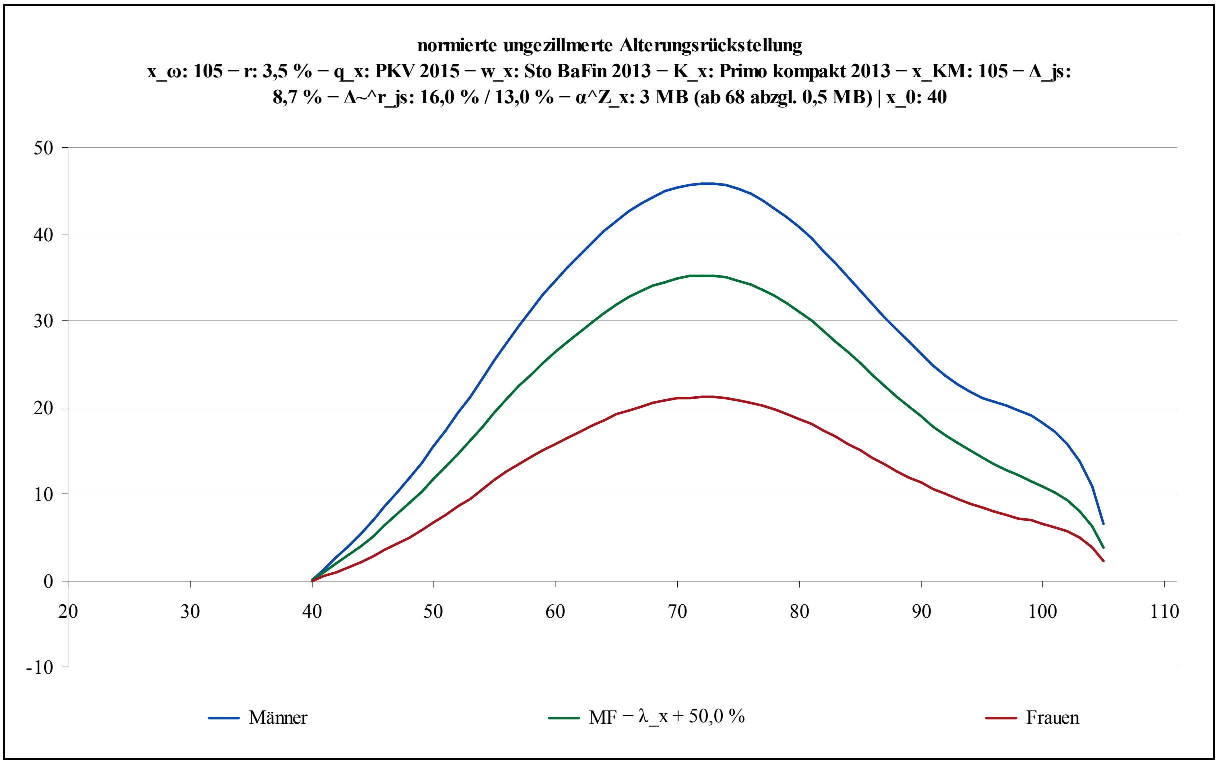
Bemerkung.

- I.d.R. nimmt mit der Profilsteilheit (d.h. mit zunehmender Ausgeprägtheit der Altersabhängigkeit der Kopfschäden) der Aufbau der Alterungsrückstellung zu, da in jüngeren Jahren aus der Prämie größere Teile in die Alterungsrückstellung fließen.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 40.


normierte Kopfschäden
x_ω: 105 – r: 3,5 % – q_x: PKV 2015 – w_x: Sto BaFin 2013 – K_x: Primo kompakt 2013 – x_KM: 105 – Δ_js: 8,7 % – Δ~^r_js: 16,0 % / 13,0 % – α^Z_x: 3 MB (ab 68 abzgl. 0,5 MB)
10,0
9,0
8,0
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
20 30 40 50 60 70 80 90 100 110
p_40
p_40
p_40
Männer
MF – λ_x + 50,0 %
Frauen


normierte ungezillmerte Alterungsrückstellung
x_ω: 105 – r: 3,5 % – q_x: PKV 2015 – w_x: Sto BaFin 2013 – K_x: Primo kompakt 2013 – x_KM: 105 – Δ_js: 8,7 % – Δ~^r_js: 16,0 % / 13,0 % – α^Z_x: 3 MB (ab 68 abzgl. 0,5 MB) | x_0: 40
50
40
30
20
10
0
-10
20 30 40 50 60 70 80 90 100 110
Männer
MF – λ_x + 50,0 %
Frauen

1.2.4 Fortschreibung und Zuführung zur ungezillmerten Alterungsrückstellung und Aufteilung der Nettoprämie.

Fortschreibung der ungezillmerten Alterungsrückstellung. (1:10)

$$V_{x;x+m+1} = \Big[\underbrace{V_{x;x+m}}_{\substack{\text{vorhandene}\\ \text{AR}}} + \underbrace{\left(P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{Sparprämie}}\Big] \cdot \underbrace{(1+r)}_{\text{Verzinsung}} \cdot \underbrace{\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}}_{\substack{\text{Aufteilung auf}\\ \text{die Verbliebenen}}},$$

$$V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}}$$

Fortschreibung der Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ um ein Jahr

Zuführung zur ungezillmerten Alterungsrückstellung.

$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = \underbrace{\left(P_x - K_{x+m}\right) \cdot (1+r)}_{\text{verzinste Sparprämie}} + \underbrace{V_{x;x+m} \cdot r}_{\text{Zins auf vorhandene AR}} + \underbrace{s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte AR}}$$

Ein-Jahres-Zuführung zur Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichten Alter $x+m+1$

Aufteilung der (ungezillmerten) Nettoprämie.

$$P_x = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} + \underbrace{v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}}_{\text{eigener Sparbeitrag}} - \underbrace{s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte AR}}$$

Aufteilung der (unnormierten) ungezillmerten Jahresbruttoprämie P_x zum Alter x nach m Jahren zum erreichten Alter $x+m$

Bemerkung.

- In diesem Abschnitt wird der kollektive Gemeinschaftsanspruch auf die Alterungsrückstellung zum besseren Verständnis der Fortschreibung, Zuführung und Aufteilung teilweise ignoriert, korrekterweise sollten um den Gedanken der kollektiven Alterungsrückstellung zu verdeutlichen die Alterungsrückstellungen mit den Rechnungsmäßig-Lebenden l_x multipliziert werden.
- Die Sparprämie $P_x - K_{x+m}$ ist in den anfänglichen Altern x_0+a positiv und wird in späteren Jahren $x_\omega-s$ negativ.

Einjährige Fortschreibung der Alterungsrückstellung.

Die Alterungsrückstellung $V_{x;x+m+1}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m+1$ ergibt sich aus der vorjährigen Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Alter $x+m$ zu

$$V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)\right]\cdot\left(1+r\right)\cdot\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}} = \left[V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)\right]\cdot\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}},$$

d.h. die einjährige Fortschreibung der Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zu $V_{x;x+m+1}$ erfolgt durch:

- Addition von vorhandener Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ und Sparprämie $P_x - K_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$: $V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)$;
- Darstellung mit Rechnungszins r und Rechnungsmäßig-Lebenden l_ξ:
  - Verzinsung dieser Summe mit dem Aufzinsungsfaktor $1+r$: $\left[V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)\right]\cdot\left(1+r\right)$,
  - Aufteilung dieser verzinsten Summe unter den Dann-Rechnungsmäßig-Verbliebenen l_{x+m+1}: $\left[V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)\right]\cdot\left(1+r\right)\cdot\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}$;
- Darstellung mit diskontierten Lebenden D_ξ:
  - resp. Verzinsung und Vererbung $\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$ dieser Summe aus vorhandener Alterungsrückstellung und Sparprämie: $\left[V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)\right]\cdot\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$.

Herleitung.

- Vorbereitung: Mit Ausscheideordnung $l_{x+1} = l_x\cdot\left(1-s_x\right)$ und Kommutationswerten $D_x := v^x\cdot l_x$, $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$, $O_x := v^x\cdot l_x\cdot k_x = D_x\cdot k_x$, $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$ und $a_x = \frac{N_x}{D_x}$ und $A_x = \frac{U_x}{D_x}$ ist:
  - $$a_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} = \frac{\sum_{\xi=x+m}^{x_\omega} D_\xi}{D_{x+m}} = \frac{D_{x+m} + \sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega} D_\xi}{D_{x+m}} = \frac{D_{x+m}}{D_{x+m}} + \frac{\sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega} D_\xi}{D_{x+m}}$$
    $$= 1 + \frac{N_{x+m+1}}{D_{x+m}} = 1 + \frac{N_{x+m+1}\cdot D_{x+m+1}}{D_{x+m+1}\cdot D_{x+m}}$$
    $$a_{x+m} = 1 + a_{x+m+1}\cdot\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}. \tag{1:11}$$
  - $$G\cdot A_{x+m} = G\cdot\frac{U_{x+m}}{D_{x+m}} = G\cdot\frac{\sum_{\xi=x+m}^{x_\omega} O_\xi}{D_{x+m}} = G\cdot\frac{O_{x+m} + \sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega} O_\xi}{D_{x+m}}$$
    $$= G\cdot\frac{O_{x+m}}{D_{x+m}} + G\cdot\frac{\sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega} O_\xi}{D_{x+m}} = G\cdot\frac{D_{x+m}\cdot k_{x+m}}{D_{x+m}} + G\cdot\frac{U_{x+m+1}}{D_{x+m}}$$
    $$= G\cdot k_{x+m} + G\cdot\frac{U_{x+m+1}}{D_{x+m}} = K_{x+m} + G\cdot\frac{U_{x+m+1}\cdot D_{x+m+1}}{D_{x+m+1}\cdot D_{x+m}}$$

$$G\cdot A_{x+m} = K_{x+m} + G\cdot A_{x+m+1}\cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}. \tag{1:12}$$

- $D_{x+m} = v^{x+m}\cdot l_{x+m}$, Erweiterung um $\frac{v\cdot(1-s_{x+m})}{v\cdot(1-s_{x+m})}$:

$$D_{x+m} = v^{x+m}\cdot l_{x+m} = \frac{v\cdot v^{x+m}\cdot l_{x+m}\cdot(1-s_{x+m})}{v\cdot(1-s_{x+m})} = \frac{v^{x+m+1}\cdot l_{x+m+1}}{v\cdot(1-s_{x+m})} = \frac{D_{x+m+1}}{v\cdot(1-s_{x+m})}$$

$$\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} = v\cdot(1-s_{x+m}). \tag{1:13}$$

- Mit Formel (1:7, p. 12) unter Verwendung der Formeln (1:11, p. 19), (1:12, p. 20) und (1:13, p. 20) und $A_{x+m+1} = \frac{U_{x+m+1}}{D_{x+m+1}}$ und $a_{x+m+1} = \frac{N_{x+m+1}}{D_{x+m+1}}$ ist:

$$\begin{aligned}
V_{x;x+m} &= G\cdot A_{x+m} - P_x\cdot a_{x+m}\\
&= K_{x+m} + G\cdot A_{x+m+1}\cdot\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} - P_x\cdot\left(1 + a_{x+m+1}\cdot\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}\right)\\
&= K_{x+m} + G\cdot A_{x+m+1}\cdot v\cdot(1-s_{x+m}) - P_x\cdot(1 + a_{x+m+1}\cdot v\cdot(1-s_{x+m}))\\
&= K_{x+m} + G\cdot A_{x+m+1}\cdot v\cdot(1-s_{x+m}) - P_x - P_x\cdot a_{x+m+1}\cdot v\cdot(1-s_{x+m})\\
&= K_{x+m} - P_x + \underbrace{(G\cdot A_{x+m+1} - P_x\cdot a_{x+m+1})}_{V_{x;x+m+1}}\cdot\underbrace{v}_{\frac{1}{1+r}}\cdot(1-s_{x+m})
\end{aligned}$$

$$V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1}\cdot\tfrac{1}{1+r}\cdot(1-s_{x+m}). \tag{1:14}$$

- Darstellung der Alterungsrückstellung $V_{x;x+m+1}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m+1$ an Hand der Vorjahresalterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Alter $x+m$:
  - Mit $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1}\cdot\frac{1}{1+r}\cdot(1-s_{x+m})$ gemäß Formel (1:14, p. 20) ist:

    $$V_{x;x+m+1}\cdot\tfrac{1}{1+r}\cdot(1-s_{x+m}) = V_{x;x+m} + P_x - K_{x+m}$$

    $$\Rightarrow V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})]\cdot(1+r)\cdot\frac{1}{(1-s_{x+m})}$$

  - Erweiterung des Bruchs mit l_{x+m}:

    $$V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})]\cdot(1+r)\cdot\frac{l_{x+m}}{l_{x+m}\cdot(1-s_{x+m})}$$

  - AR-Fortschreibung (Darstellung mit Rechnungszins r und Rechnungsmäßig-Lebenden l_ξ) – dazu Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende nach Ausscheideordnung gemäß $l_{x+m+1} = l_{x+m}\cdot(1-s_{x+m})$:

    $$V_{x;x+m+1} = [\underbrace{V_{x;x+m}}_{\text{vorhandene AR}} + \underbrace{(P_x - K_{x+m})}_{\text{Sparprämie}}]\cdot\underbrace{(1+r)}_{\text{Verzinsung}}\cdot\underbrace{\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}}_{\text{Aufteilung auf die Verbliebenen}}.$$

□

- Mit $1+r=\frac{1}{\frac{1}{1+r}}=\frac{1}{v}=\frac{v^{\xi}}{v\cdot v^{\xi}}=\frac{v^{\xi}}{v^{\xi+1}}$ ist $\frac{D_{\xi}}{D_{\xi+1}}=\frac{l_{\xi}\cdot v^{\xi}}{l_{\xi+1}\cdot v^{\xi+1}}=\frac{l_{\xi}}{l_{\xi+1}}\cdot(1+r)$, also:

  $(1+r)\cdot\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}=\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$, d.h.

- AR-Fortschreibung (Darstellung mit diskontierteb Lebende D_{ξ})

$$V_{x;x+m+1} \quad =\left[V_{x;x+m}+\left(P_{x}-K_{x+m}\right)\right]\cdot \underbrace{\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}}_{\text{Verzinsung und Vererbung}} .$$

□■

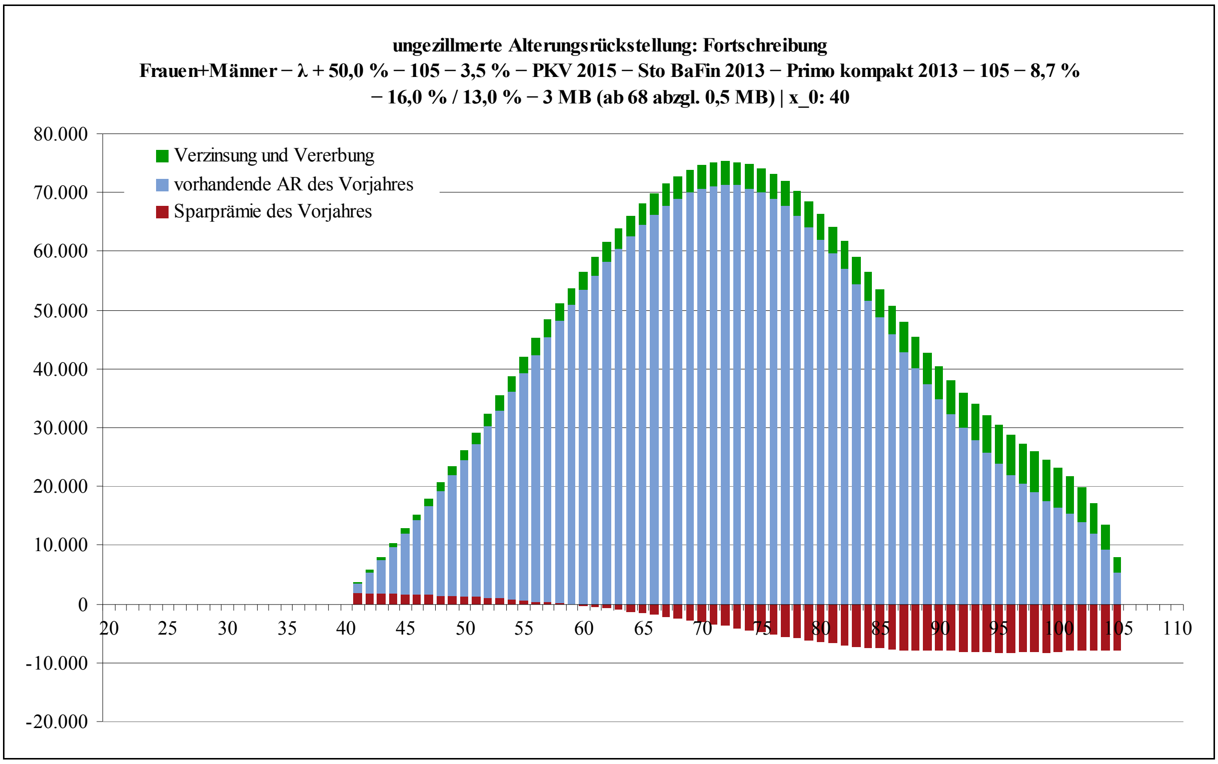
Zahlenbeispiel.

x = 1			P_x	r			
			18,11	3,5%			
x+m+1	V_ x;x+m	K_ x+m+1	P_x - K_x+m	1+r	l_ x+m+1	l_x+m / l_ x+m+1	V_ x;x+m+1
	.	10,00	.	.	100,00	.	0,00
2	0,00	10,00	8,11	1,035	89,00	1,1236	9,43
3	9,43	15,00	8,11	1,035	77,00	1,1558	20,98
4	20,98	25,00	3,11	1,035	68,00	1,1324	28,23
5	28,23	50,00	-6,89	1,035	47,00	1,4468	31,96

Auf Grund von Rundungen bei Zwischenschritten weichen diese Werte von den Werten im Zahlenbeispiel im Abschnitt 1.2.3 ab.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 40.



Komponenten der Zuführung zur Alterungsrückstellung.

Die Ein-Jahres-Zuführung $V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$,

$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = \left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\left(1+r\right) + V_{x;x+m}\cdot r + s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1}$$

zur Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichten Alter $x+m+1$ setzt sich zusammen aus:

- der verzinsten Sparprämie $\left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\left(1+r\right)$ zum Alter $x+m$ (vorschüssig);
- dem Zins $V_{x;x+m}\cdot r$ auf die zu Jahresbeginn vorhandene Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$;
- der sogenannten Vererbung: d.h. dem Anteil an der zu Jahresende frei werdende Alterungsrückstellung $s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1}$ auf Grund von Ausscheiden aus dem Kollektiv.

Herleitung.

- Aus $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1}\cdot\frac{1}{1+r}\cdot\left(1-s_{x+m}\right)$ gemäß Formel (1:14, p. 20) folgt:

  $V_{x;x+m+1}\cdot\left(1-s_{x+m}\right)\cdot\frac{1}{1+r} = V_{x;x+m} + P_x - K_{x+m}$

$$\Rightarrow\; V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} \cdot (1+r) + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)$$

$$\Rightarrow\; V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} \cdot (1+r) + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r) + s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1}$$

$$\Rightarrow\; V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} + V_{x;x+m} \cdot r + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r) + s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1}$$

$\Rightarrow$ Komponenten der AR-Zuführung

$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = \underbrace{(P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)}_{\text{verzinste Sparprämie}} + \underbrace{V_{x;x+m} \cdot r}_{\text{Zins auf vorhandene AR}} + \underbrace{s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte AR}} .$$ ■

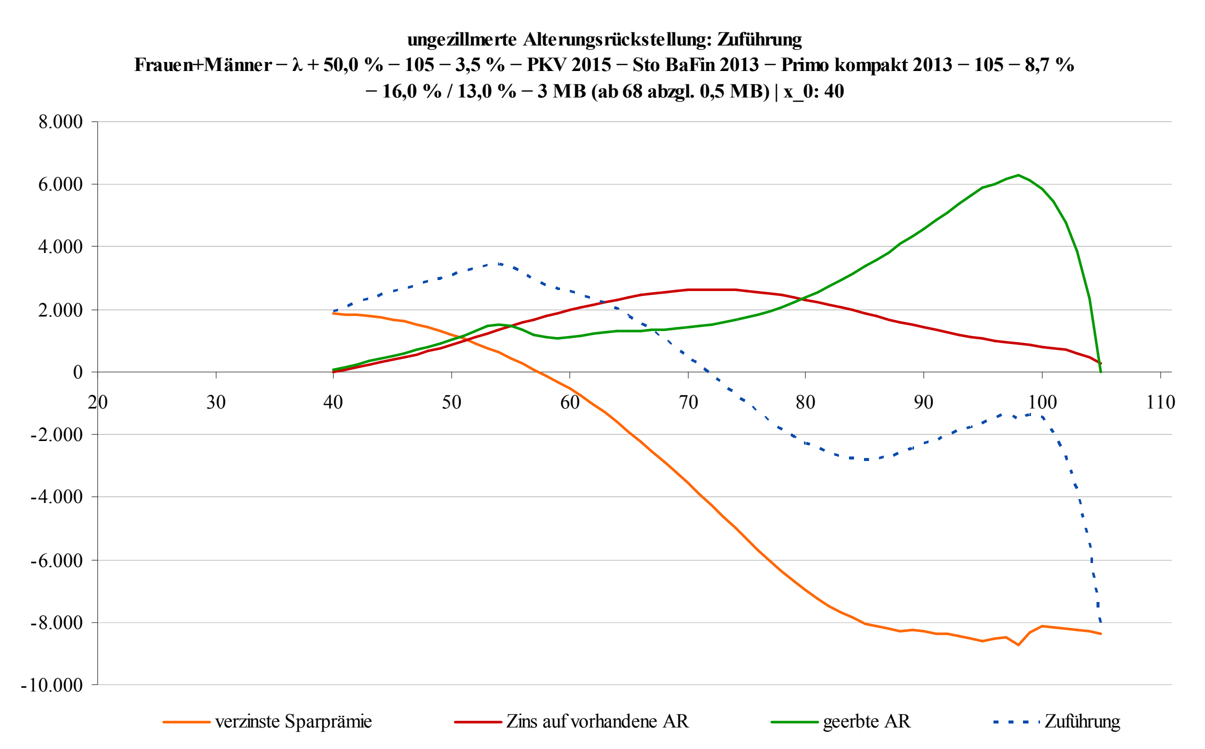
Zahlenbeispiel.

x = 1		P_1	r								
		18,11	3,5%								
x+m+1	K_ x+m+1	P_x - K_x+m	1+r	(P_x - K_x+m) * (1+r)	V_ x;x+m	r	V_x;x+m * r	s_ x+m+1	V_ x;x+m+1	s_x+m+1 * V_x;x+m+1	Summe
	10,00	.	.	.	.	.	.	0,11	0,00	.	0,00
2	10,00	8,11	1,035	8,39	0,00	3,5%	0,00	0,13	9,43	1,04	9,43
3	15,00	8,11	1,035	8,39	9,43	3,5%	0,33	0,12	20,98	2,73	11,45
4	25,00	3,11	1,035	3,22	20,98	3,5%	0,73	0,31	28,23	3,39	7,34
5	50,00	-6,89	1,035	-7,13	28,23	3,5%	0,99	1,00	31,96	9,91	3,77

Auf Grund von Rundungen bei Zwischenschritten weichen diese Werte von den Werten der im Zahlenbeispiel im Abschnitt 1.2.3 ab.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 40.



Aufteilung der Nettoprämie.

Die (unnormierte) ungezillmerte Jahresbruttoprämie P_x,

$$P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$$

zum Alter x setzt sich nach m Jahren zum erreichten Alter $x+m$ zusammen aus:

- dem Risikoanteil K_{x+m} zur Deckung des aktuellen Kopfschadens;
- dem eigenen Sparbeitrag $v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$ für die Zuführung zur Alterungsrückstellung;
- abzüglich des durch Vererbung im m-ten Versicherungsjahr frei werdenden Anteils $s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$ der Alterungsrückstellung – dabei ist auf die einjährige Diskontierung von $V_{x;x+m+1}$ zu achten.

Herleitung.

- Aus $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot (1 - s_{x+m})$ gemäß Formel (1:14, p. 20) folgt mit $\frac{1}{1+r} = v$, Aufteilung der Nettoprämie P_x in Komponenten:

$$P_x = K_{x+m} + V_{x;x+m+1} \cdot v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right) - V_{x;x+m}$$

$$\Rightarrow\ P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$$

$\Rightarrow$ Aufteilung der Nettoprämie

$$P_x = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} + \underbrace{\underbrace{v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}}_{\text{eigener Sparbeitrag}} - \underbrace{s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte AR}}}_{\text{Sparbeitrag}} .$$

■

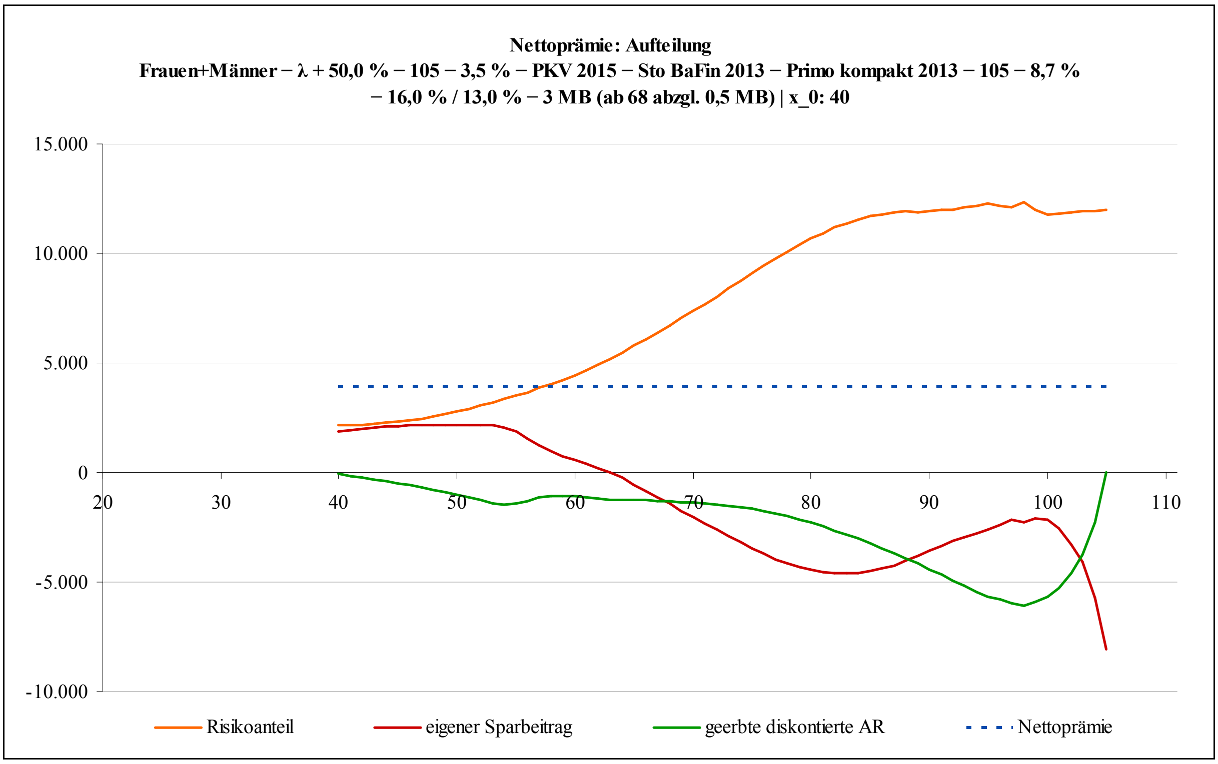
Zahlenbeispiel.

x = 1		r					r			
P_1		3,5%					3,5%			
18,11										
x+m	K_x+m	v	V_ x;x+m+1	V_ x;x+m	v * V_x;x+m+1 - V_x;x+m	s_x+m	v	V_ x;x+m+1	s_x+m * v * V_x;x+m+1	Summe
1	10,00	0,9662	9,43	0,00	9,11	0,11	0,9662	9,43	1,00	18,11
2	10,00	0,9662	20,98	9,43	10,84	0,13	0,9662	20,98	2,64	18,20
3	15,00	0,9662	28,23	20,98	6,30	0,12	0,9662	28,23	3,27	18,03
4	25,00	0,9662	31,96	28,23	2,65	0,31	0,9662	31,96	9,57	18,08
5	50,00	0,9662	0,00	31,96	-31,96	1,00	0,9662	0,00	0,00	18,04

Auf Grund von Rundungen bei Zwischenschritten weichen die Summenwerte von der ursprünglichen Nettoprämie ab.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 40. Die geerbte Alterungsrückstellung reduziert die Nettoprämie, daher negativ dargestellt.



Alternative Herleitungen.

- Gemäß der retrospektiven Ermittlung der Alterungsrückstellung zum Alter $x+m$ gemäß Formel (1:4, p. 10) ist:

$$\underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot K_{x+\mu}\cdot(1+r)^{m-\mu}}_{\text{vergangenes aufgezinstes Leistungsvolumen}} + \underbrace{l_{x+m}\cdot V_{x;x+m}}_{\text{vorhandenes AR-Volumen}} = \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot P_x\cdot(1+r)^{m-\mu}}_{\text{vergangenes aufgezinstes Einnahmevolumen}}$$

$$\Rightarrow\ l_{x+m}\cdot V_{x;x+m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot P_x\cdot(1+r)^{m-\mu} - \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot K_{x+\mu}\cdot(1+r)^{m-\mu}$$

$$l_{x+m}\cdot V_{x;x+m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot\left(P_x - K_{x+\mu}\right)\cdot(1+r)^{m-\mu}\quad \text{(zum Alter } x+m\text{)}$$

  - Formulierung der Gleichung zum Bezugsalter $x+m+1$, d.h. $m+1$, statt m:

$$\Rightarrow\ l_{x+(m+1)}\cdot V_{x;x+(m+1)} = \sum_{\mu=0}^{(m+1)-1} l_{x+\mu}\cdot\left(P_x - K_{x+\mu}\right)\cdot(1+r)^{(m+1)-\mu}$$

$$l_{x+m+1}\cdot V_{x;x+m+1} = \sum_{\mu=0}^{m} l_{x+\mu}\cdot\left(P_x - K_{x+\mu}\right)\cdot(1+r)^{m+1-\mu}$$

$$l_{x+m+1}\cdot V_{x;x+m+1} = (1+r)\cdot\sum_{\mu=0}^{m} l_{x+\mu}\cdot\left(P_x - K_{x+\mu}\right)\cdot(1+r)^{m-\mu}$$

- Darstellung der Alterungsrückstellung $V_{x;x+m+1}$ zum erreichten Alter $x+m+1$ an Hand der Vorjahresalterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Alter $x+m$:
  - Aufsplittung der Summe in Summation bis $m-1$ und separat m:

$$l_{x+m+1}\cdot V_{x;x+m+1} = (1+r)\cdot\Big[\underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot\left(P_x - K_{x+\mu}\right)\cdot(1+r)^{m-\mu}}_{l_{x+m}\cdot V_{x;x+m}\text{ (zum Alter x+m)}} + l_{x+m}\cdot\left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\underbrace{(1+r)^{m-m}}_{=(1+r)^0=1}\Big]$$

$$l_{x+m+1} \cdot V_{x;x+m+1} = (1+r) \cdot \left[l_{x+m} \cdot V_{x;x+m} + l_{x+m} \cdot (P_x - K_{x+m}) \right]$$

$\Rightarrow$ AR-Fortschreibung

$$V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m}) \right] \cdot (1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}; \qquad \square$$

mit $(1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}} = \frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$ (wie oben) ist $V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m}) \right] \cdot \frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$. $\square$

- Zuführung zur Alterungsrückstellung: $V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$:
  - Mit $l_{x+m+1} = l_{x+m} \cdot (1 - s_{x+m})$ ist:

$$V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m}) \right] \cdot (1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m} \cdot (1 - s_{x+m})}$$

$$V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m}) \right] \cdot (1+r) \cdot \frac{1}{1 - s_{x+m}}$$

$$\Rightarrow (1 - s_{x+m}) \cdot V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} \cdot (1+r) + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} + V_{x;x+m} \cdot r + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)$$

$\Rightarrow$ Komponenten der AR-Zuführung

$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r) + V_{x;x+m} \cdot r + s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1}. \qquad \square$$

- Aufteilung der Nettoprämie P_x in Komponenten:
  - Mit $1 + r = \frac{1}{v}$ und Multiplikation der Gleichung mit dem Diskontierungsfaktor v ist:

$$v \cdot V_{x;x+m+1} - v \cdot V_{x;x+m} = P_x - K_{x+m} + V_{x;x+m} \cdot v \cdot r + s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$$

$$\Rightarrow P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - v \cdot V_{x;x+m} - V_{x;x+m} \cdot v \cdot r - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$$

$$P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - (\underbrace{v + v \cdot r}_{v \cdot (1+r) = \frac{1+r}{1+r} = 1}) \cdot V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$$

$\Rightarrow$ Aufteilung der Nettoprämie

$$P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}. \qquad \square\blacksquare$$

1.3 Gezillmerte Alterungsrückstellung.

Definition.

- Die normierte gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ gibt für Ursprünglich-x-Jährige im Alter $x+m$ denjenigen Betrag an, der genügt, während der weiteren Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω zusammen mit der laufend jährlich zu entrichtenden normierten gerzillmerten Nettoprämie ${}^{Z}p_x$ (zum Eintrittsalter x) jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ eine veränderliche Rente (Zahlung) in Höhe $k_{x+m+\mu}$ ($\mu \geq 0$) samt Zillmerung zu finanzieren.

1.3.1 Darstellung der gezillmerten Alterungsrückstellung.

Gezillmerte Alterungsrückstellung. (1:15)

normiert	*unnormiert*	
${}^{Z}v_{x;x+m} = A_{x+m} - {}^{Z}p_x \cdot a_{x+m}$ ${}^{Z}v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - {}^{Z}p_x\right) \cdot a_{x+m}$	${}^{Z}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m}$ ${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x\right) \cdot a_{x+m}$	*gez*illmerte Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

$${}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot b_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(b_{x+m} - {}^{Z}b_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m}\cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x}\cdot {}^{Z}b_x\right) - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}V_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot B_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}B_x - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}V_{x;x+m} = \left[\left(B_{x+m} - {}^{Z}B_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m}\cdot B_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x}\cdot {}^{Z}B_x\right) - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{{}^{Z}v_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m\\ \text{gezillmert}}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{v_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k\\ \text{ungezillmert}}}$$

$${}^{Z}V_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{{}^{Z}V_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m\\ \text{gezillmert}}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{V_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k\\ \text{ungezillmert}}}$$

Darstellungen.

- Die normierte *gez*illmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ lässt sich analog zur *ungez*illmerte Alterungsrückstellung als Differenz aus Leistungsbarwert A_{x+m} zum erreichten Alter $x+m$ abzüglich des normierten Barwerts ${}^{Z}p_x \cdot a_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ bezüglich der normierten *gez*illmerten Nettoprämie ${}^{Z}p_x$ zum Eintrittsalter x darstellen:

  $${}^{Z}v_{x;x+m} = A_{x+m} - {}^{Z}p_x \cdot a_{x+m}.$$

- Weiter ergibt sich die Darstellung der normierten *gez*illmerten Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ als Barwert der Differenz zwischen der normierten *ungez*illmerten Nettoprämie p_{x+m} zum erreichtem Alter $x+m$ abzüglich der normierten *gez*illmerten Nettoprämie ${}^{Z}p_{x+m}$ zum Eintrittsalter x:

$${}^{Z}v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - {}^{Z}p_{x}\right)\cdot a_{x+m}\,.$$

- Weiter ergibt sich eine Darstellung der normierten *gez*illmerten Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ als Barwert bezüglich *ungez*illmerter Bruttoprämie b_{x+m} zum erreichtem Alter $x+m$ und der *gez*illmerten Bruttoprämie ${}^{Z}b_{x+m}$ zum Eintrittsalter x, beide Prämien jeweils abzüglich von Zuschlägen:

$${}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot b_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}b_{x} - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}\,.$$

Herleitung.

- Mit dem erweiterten gezillmerten Äquivalenzprinzip $G\cdot A_{x+m} = {}^{Z}P_{x}\cdot a_{x+m} + {}^{Z}V_{x;x+m}$ ist:

$${}^{Z}V_{x;x+m} = G\cdot A_{x+m} - {}^{Z}P_{x}\cdot a_{x+m}\,,$$

mit der Normierung ${}^{Z}v_{x;x+m} = \frac{1}{G}\cdot {}^{Z}V_{x;x+m}$ ist:

$${}^{Z}v_{x;x+m} = A_{x+m} - {}^{Z}p_{x}\cdot a_{x+m}\,. \qquad \square$$

- Gemäß Nettoprämienformel $P_x = G\cdot\frac{A_x}{a_x}$ ist $G\cdot A_{x+m} = P_{x+m}\cdot a_{x+m}$ resp. $A_{x+m} = p_{x+m}\cdot a_{x+m}$ und somit:

$${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_{x}\right)\cdot a_{x+m} \text{ resp.}$$

$${}^{Z}v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - {}^{Z}p_{x}\right)\cdot a_{x+m}\,. \qquad \square$$

- Mit $B_x = \frac{P_x+\Gamma_{j/s}}{1-\Delta_{j/s}}$ und ${}^{Z}B_x = \frac{{}^{Z}P_x+\Gamma_{j/s}}{1-\Delta_{j/s}}$ für (un)gezillmerte Jahresbruttoprämien ($\Rightarrow$ $P_{x+m} = \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot B_x - \Gamma_{j/s\,|\,x+m}$ resp. ${}^{Z}P_x = \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot B_x - \Gamma_{j/s\,|\,x}$, $\Delta_{j/s\,|\,x} = \begin{cases}\Delta_j & \text{für } x<x_s\\ \Delta_s & \text{für } x\ge x_s\end{cases}$, $\Gamma_{j/s\,|\,x} = \begin{cases}\Gamma_j & \text{für } x<x_s\\ \Gamma_s & \text{für } x\ge x_s\end{cases}$) folgt aus ${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_{x}\right)\cdot a_{x+m}$:

$${}^{Z}V_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot B_{x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}B_{x} + \Gamma_{j/s\,|\,x}\right]\cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}V_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot B_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}B_{x} - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

$$\Rightarrow\ {}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot b_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}b_{x} - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}\,.$$

$$\Rightarrow\ {}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(b_{x+m} - {}^{Z}b_{x}\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m}\cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x}\cdot {}^{Z}b_{x}\right) - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

innerhalb der Altersintervalle j resp. s sodann jeweils

- ${}^{Z}V_{x;x+m\,|\,j/s} = \left(B_{x+m} - {}^{Z}B_{x}\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten un/gezillmerten Jahresbruttoprämien B_{ξ}

- ${}^{Z}V_{x;x+m\,|\,j/s} = 12 \cdot \left(\widetilde{B}_{x+m} - {}^{Z}\widetilde{B}_{x}\right) \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten un/gezillmerten Monatsbruttoprämien $\widetilde{B}_{\xi}$ ($\widetilde{B}_{\xi} = \frac{1}{12} \cdot B_{\xi}$)
- ${}^{Z}v_{x;x+m\,|\,j/s} = \left(b_{x+m} - {}^{Z}b_{x}\right) \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot a_{x+m}$ bezüglich der normierten un/gezillmerten Jahresbruttoprämien b_{ξ} ($b_{\xi} = \frac{1}{G} \cdot B_{\xi}$)
- ${}^{Z}v_{x;x+m\,|\,j/s} = 12 \cdot \left(\widetilde{b}_{x+m} - {}^{Z}\widetilde{b}_{x}\right) \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten un/gezillmerten Monatsbruttoprämien $\widetilde{b}_{\xi}$ ($\widetilde{b}_{\xi} = \frac{1}{G} \cdot \widetilde{B}_{\xi}$). □■

Bemerkung.

- Die normierte gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k}$ zum erreichtem Alter $x+m+k$ ergibt sich aus der *ge*zillmerten Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x\,;\,x+m}$ und der *ungez*illmerten Alterungsrückstellung $v_{x+m\,;\,x+m+k}$ zum Grenzalter $x+m$ durch:

$$ {}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{{}^{Z}v_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m\\ \text{gezillmert}}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{v_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k\\ \text{ungezillmert}}} . $$

  - Begründung gemäß Formel (1:15, p. 28):

    Es ist ${}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = p_{x+m+k} \cdot a_{x+m+k} - {}^{Z}p_{x} \cdot a_{x+m+k}$
  - Ergänzung um $\left(-\,p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} + p_{x+m} \cdot a_{x+m+k}\right)$:

$$ {}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = p_{x+m+k} \cdot a_{x+m+k} - p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} + p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} - {}^{Z}p_{x} \cdot a_{x+m+k} $$

$$ {}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = \left(p_{x+m+k} - p_{x+m}\right) \cdot a_{x+m+k} + \left(p_{x+m} - {}^{Z}p_{x}\right) \cdot a_{x+m+k} $$

  - Ergänzung des ersten Terms um $\frac{a_{x+m}}{a_{x+m}}$, Beachtung von ${}^{Z}v_{x\,;\,x+m} = \left(p_{x+m} - {}^{Z}p_{x}\right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:15, p. 28) und $v_{x+m\,;\,x+m+k} = \left(p_{x+m+k} - p_{x+m}\right) \cdot a_{x+m+k}$ gemäß Formel (1:7, p. 12):

$$ {}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{\left(p_{x+m} - {}^{Z}p_{x}\right) \cdot a_{x+m}}_{{}^{Z}v_{x;x+m}} \cdot \frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}} + \underbrace{\left(p_{x+m+k} - p_{x+m}\right) \cdot a_{x+m+k}}_{v_{x+m;x+m+k}} $$

$$ {}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = {}^{Z}v_{x;x+m} \cdot \frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}} + v_{x+m\,;\,x+m+k}\,; $$

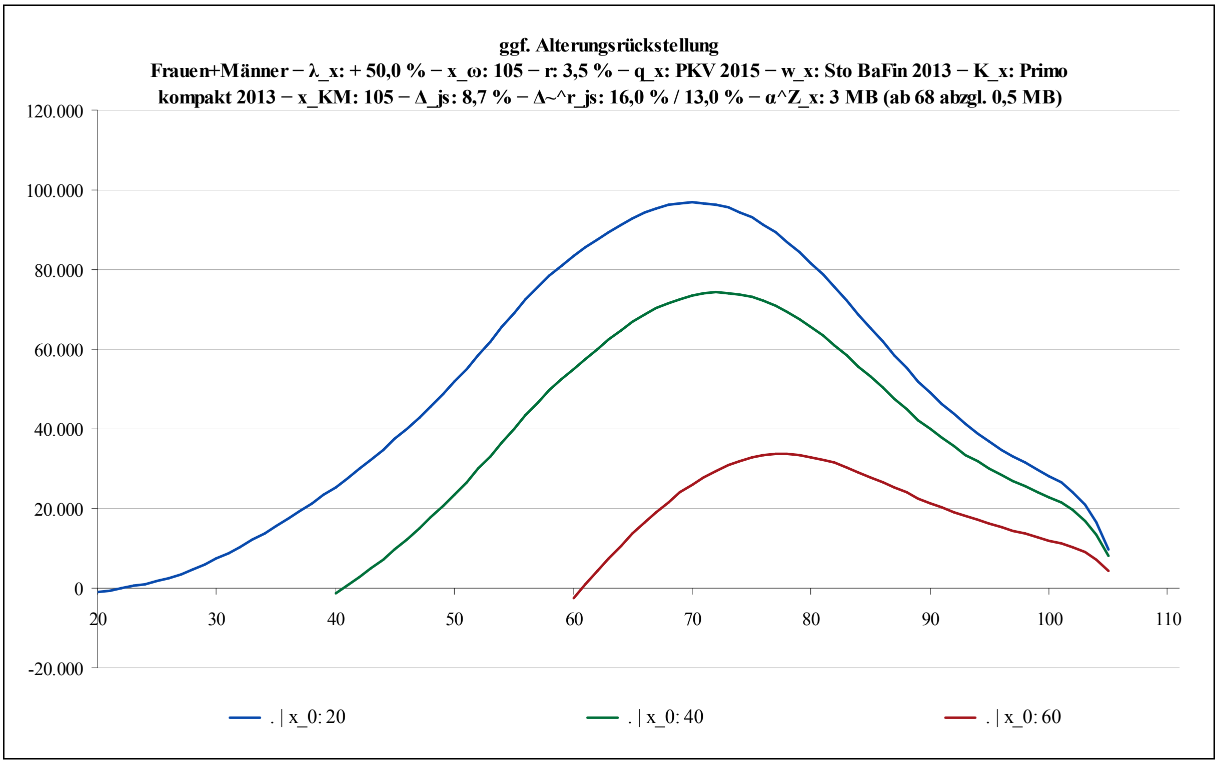
    mit ${}^{Z}V_{\xi\,;\,\mu} = G \cdot {}^{Z}v_{\xi\,;\,\mu}$ ergibt sich die unnormierte Darstellung. ■

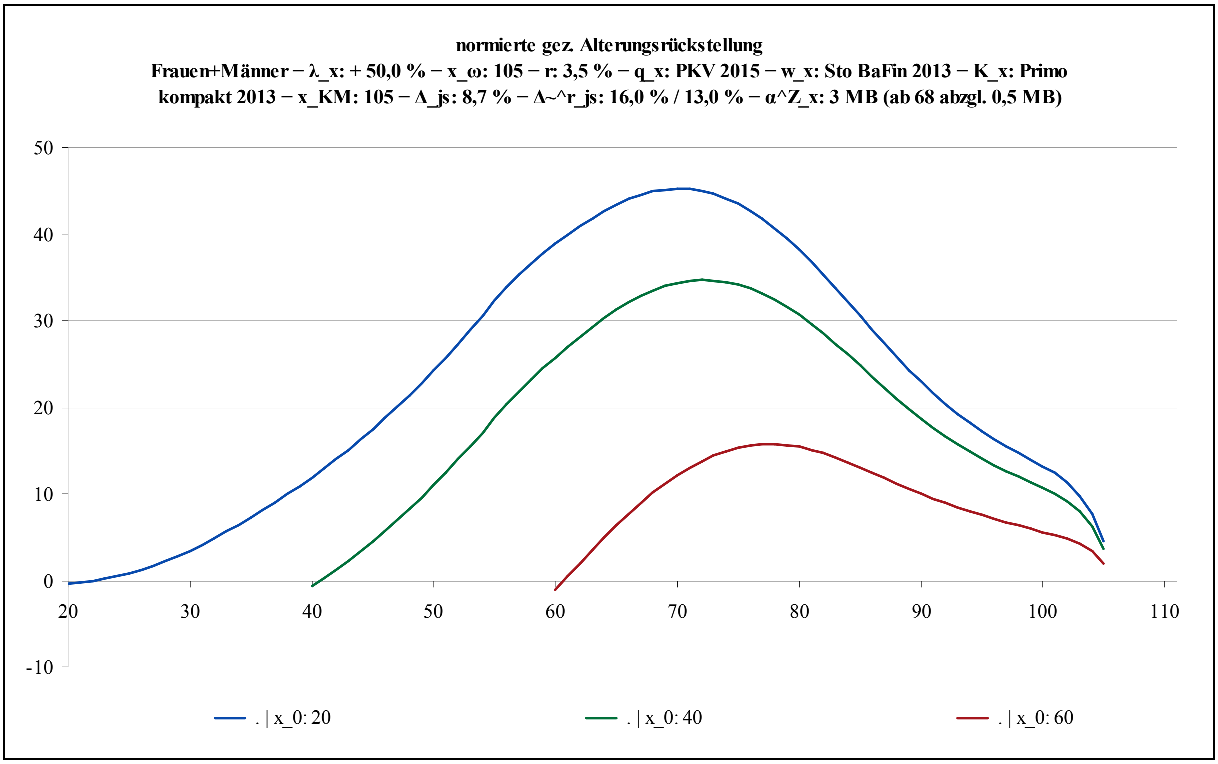
Zahlenbeispiel.

						P^Z_x	19,45	22,99	29,57	37,27	50,00
alpha^Z_x	PZ_x	P^Z_x	GA_x	a_x	V^z_x;x+m	x	1	2	3	4	5
					x+m						
2,00	1,34	19,45	65,19	3,60	1		-4,83	.	.	.	.
2,00	1,81	22,99	64,19	3,03	2		5,26	-5,47	.	.	.
2,00	2,78	29,57	64,82	2,42	3		17,75	9,18	-6,74	.	.
1,00	2,31	37,27	58,39	1,67	4		25,91	20,00	9,01	-3,85	.
0,00	0,00	50,00	50,00	1,00	5		30,55	27,01	20,43	12,73	0,00

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 20, 40 resp. 60.





Bemerkung.

- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m$ beträgt bei der Zillmerung von $\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x$ bezüglich der Anzahl α_x^Z an gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^{Z}\widetilde{B}_x$:

$$ {}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - P_x - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \right) \cdot a_{x+m} . \tag{1:16} $$

- Begründung: Mit Darstellung der gezillmerten Nettoprämie ${}^{Z}P_x = P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}B_x$ ist

$$ \begin{aligned} {}^{Z}V_{x;x+m} &= \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x \right) \cdot a_{x+m} = \left[P_{x+m} - \left(P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}B_x \right) \right] \cdot a_{x+m} \\ &= \left(P_{x+m} - P_x - \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}B_x \right) \cdot a_{x+m} . \end{aligned} $$ ■

- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+0}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m=0$ beträgt $-\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x$ bei der Zillmerung von $\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x$ bezüglich der Anzahl α_x^Z an gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^{Z}\widetilde{B}_x$, d.h. für $m=0$ ist

$$ {}^{Z}V_{x;x+0} = -\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x . \tag{1:17} $$

  - Begründung: Direkt aus Formel (1:16, p. 33): ${}^{Z}V_{x;x+0} = \left(P_{x+0} - P_x - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \right) \cdot a_{x+0} = -\frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_x = -\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x$. ■

- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x_\omega}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter x_ω beträgt $\left(K_{x_\omega} - {}^{Z}P_x \right)$, d.h. es ist $V_{x;x_\omega} = G \cdot A_{x_\omega} - {}^{Z}P_x \cdot a_{x_\omega} = G \cdot k_{x_\omega} - {}^{Z}P_x \cdot 1 = K_{x_\omega} - {}^{Z}P_x$

$$ V_{x;x_\omega} = K_{x_\omega} - {}^{Z}P_x . \tag{1:18} $$

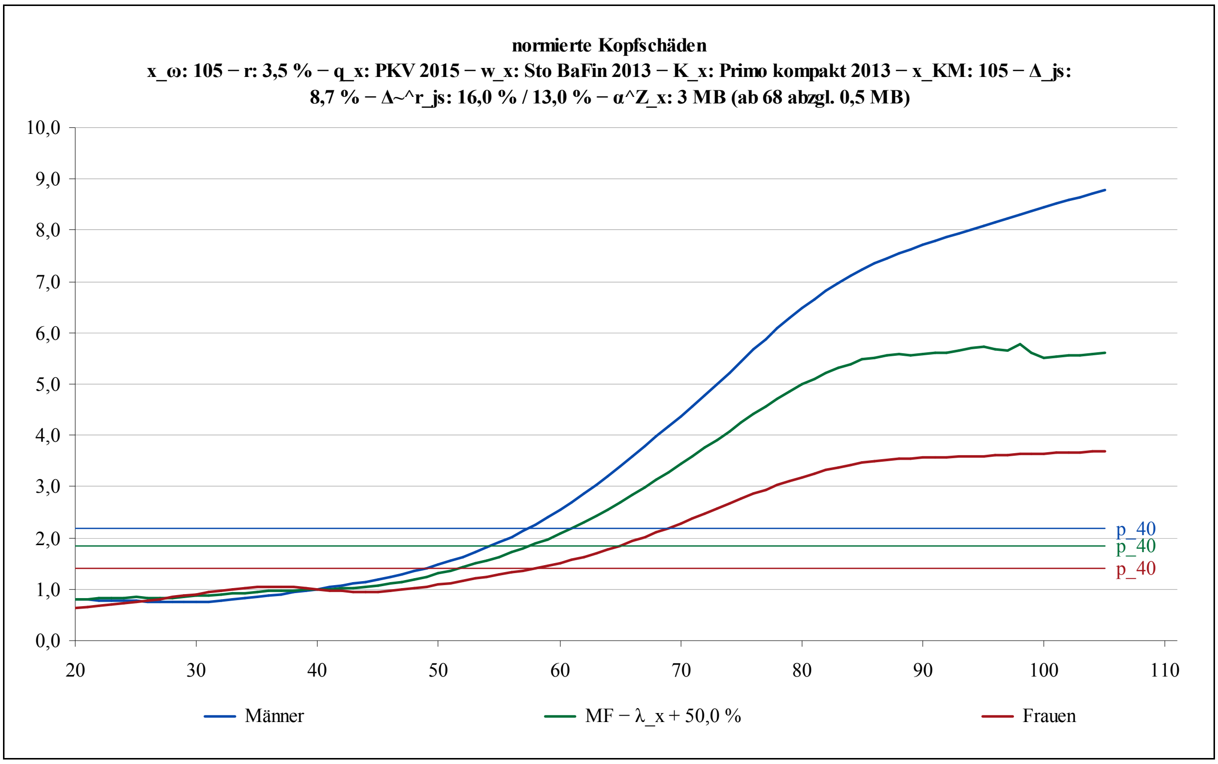
- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ bleibt solange negativ, bis die Zillmerung gedeckt ist, d.h. solange für ein m gilt: $P_{x+m} < {}^{Z}P_x$ (dazu: ${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x \right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:15, p. 28).

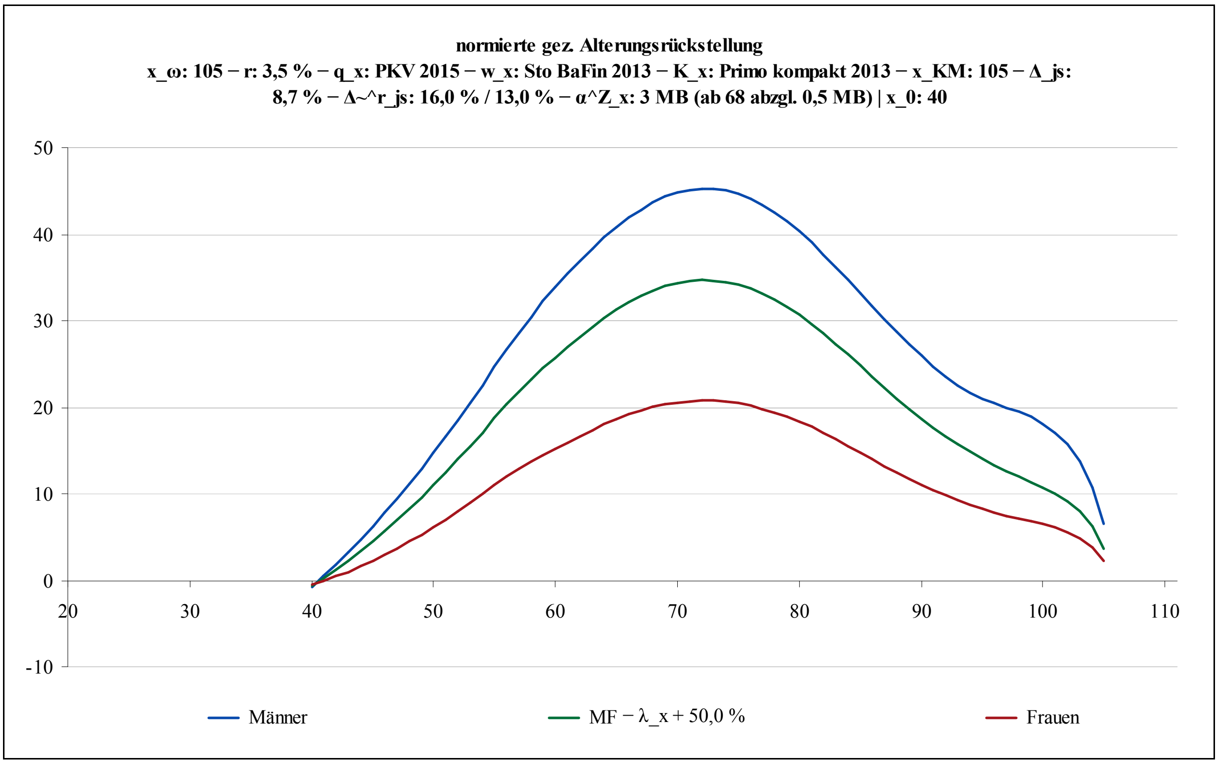
Bemerkung.

- I.d.R. nimmt mit der Profilsteilheit (d.h. mit zunehmender Ausgeprägtheit der Altersabhängigkeit der Kopfschäden) der Aufbau der Alterungsrückstellung zu, da in jüngeren Jahren aus der Prämie größere Teile in die Alterungsrückstellung fließen.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 40.


normierte Kopfschäden
x_ω: 105 – r: 3,5 % – q_x: PKV 2015 – w_x: Sto BaFin 2013 – K_x: Primo kompakt 2013 – x_KM: 105 – Δ_js: 8,7 % – Δ~^r_js: 16,0 % / 13,0 % – α^Z_x: 3 MB (ab 68 abzgl. 0,5 MB)
10,0
9,0
8,0
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
p_40
p_40
p_40
Männer
MF – λ_x + 50,0 %
Frauen


normierte gez. Alterungsrückstellung
x_ω: 105 – r: 3,5 % – q_x: PKV 2015 – w_x: Sto BaFin 2013 – K_x: Primo kompakt 2013 – x_KM: 105 – Δ_js: 8,7 % – Δ~^r_js: 16,0 % / 13,0 % – α^Z_x: 3 MB (ab 68 abzgl. 0,5 MB) | x_0: 40
50
40
30
20
10
0
-10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
Männer
MF – λ_x + 50,0 %
Frauen

1.3.2 Gezillmerte und ungezillmerte Alterungsrückstellung.

Bemerkung.

- Die *gez*illmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ ergibt sich aus der *ungez*illmerten Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ mittels:

$$ {}^{Z}V_{x;x+m} = V_{x;x+m} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} \,. \tag{1:19} $$

  - Mit ${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - P_x - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x}\right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:16, p. 33) ist

$$ {}^{Z}V_{x;x+m} = \underbrace{\left(P_{x+m} - P_x\right) \cdot a_{x+m}}_{V_{x;x+m}} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} = V_{x;x+m} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} \,. \qquad \blacksquare $$

- Die Differenz ${}^{Z}V_{x;x+m} - V_{x;x+m}$ zwischen *gez*illmerter und *ungez*illmerter Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ resp. $V_{x;x+m}$ beträgt

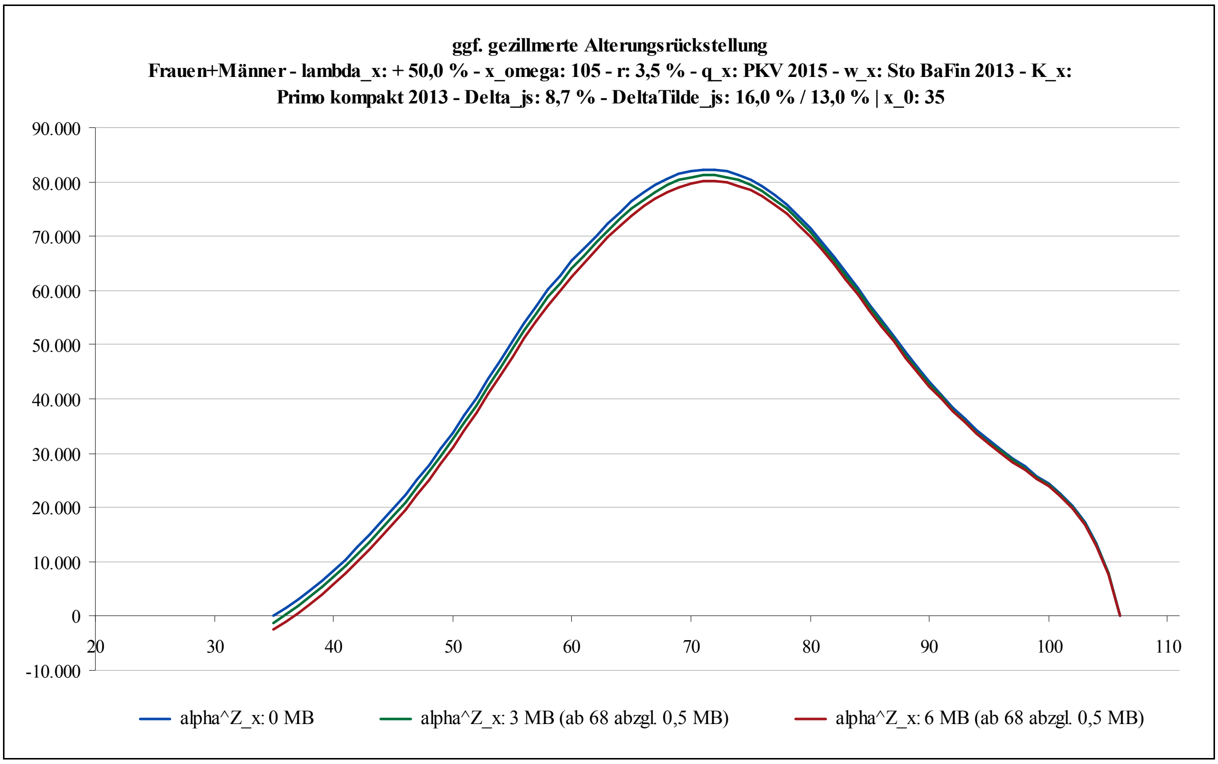
$$ {}^{Z}V_{x;x+m} - V_{x;x+m} = -\frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} = -\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x \cdot \frac{a_{x+m}}{a_x} \,, $$

  so dass die *gez*illmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ stets kleiner oder gleich der *ungez*illmerter Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ ist:

$$ {}^{Z}V_{x;x+m} - V_{x;x+m} = -\frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} \leq 0 \,. $$

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35, bei Zillmerung von 0, 3 resp. 6 Monatsbeiträgen.



1.3.3 Maximal zulässige Zillmerung

§ 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ KalV.

[…]

(3) Unmittelbare Abschlusskosten dürfen durch Zillmerung nur in einer solchen Höhe in die Prämien eingerechnet werden, dass die Gesamtalterungsrückstellung eines Zugangsjahres im Tarif höchstens vier Jahre und jede Einzelalterungsrückstellung nicht länger als fünfzehn Jahre und nicht länger als die Hälfte der tariflich vorgesehenen künftigen Vertragsdauer negativ ist.

[…]

Bemerkung zur Höhe der Zillmerung.

- Ad Gesamtalterungsrückstellung eines Zugangsjahres gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ Absatz 3 KalV:

  Mit der die Anzahl ${}^{NG}L_x$ der neu versicherten Personen eines Jahres hat zu gelten:

  $\forall m \mid m > 4 : \sum_x \left({}^{NG}L_x \cdot {}^{Z}V_{x;x+m} \right) \geq 0$.

  Mit ${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x \right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:15, p. 28), da $a_x \geq 0$:

  $\forall m \mid m > 4 : \sum_x \left({}^{NG}L_x \cdot \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x \right) \right) \geq 0$.

Ist $\forall m \mid m > 4 : {}^{Z}V_{x;x+m} \geq 0$ resp. $P_{x+m} - {}^{Z}P_{x} \geq 0$ für die neugeschäftsmöglichen Alter x, so ist der Nachweis für die Gesamtalterungsrückstellung ohne Bestimmung des konkreten Neuzugangs eines Zugangsjahres erbracht.

- Ad Einzelalterungsrückstellung gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" Absatz 3 KalV:

  Eine gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ darf maximal 15 Jahre oder maximal „Restlaufzeit-Halbe" negativ sein, d.h.

  $\forall x : \forall m \,\Big|\, m > \min\Big(15 \;;\; \tfrac{1}{2} \cdot (x_{\omega} - x) \Big) : \; {}^{Z}V_{x;x+m} \geq 0$ resp.

  $\forall x : \forall m \,\Big|\, m > \min\Big(15 \;;\; \tfrac{1}{2} \cdot (x_{\omega} - x) \Big) : \; P_{x+m} - {}^{Z}P_{x} \geq 0$.

- Bei diesen beiden Vorschriften ist in praxi zu beachten, dass auf Grund von Rundungen bei den Berechnungen unerwünschte rein numerische Effekte (beispielsweise negative Alterungsrückstellungen trotz konstantem Profil) entstehen können, die durch entsprechende Betrachtungen oder Maximierungen ignoriert oder egalisiert werden.

- Ad Beitragsmonotonie / Rückführung der Zillmerung:

  Aus den beiden Vorschriften gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" Absatz 3 KalV, folgt dass zumindest zum Endalter x_{ω} nicht mehr gezillmert werden kann. Dies hat eine Reduzierung der Zillmerbeträge ZB_{x} zur Folge, welche als Anzahl α_{x}^{Z} an gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^{Z}\widetilde{B}_{x}$, ${}^{Z}\widetilde{B}_{x} = \frac{1}{12} \cdot {}^{Z}B_{x}$ zur gezillmerten Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B_{x}$ dargestellt werden: $ZB_{x} = \alpha_{x}^{Z} \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_{x} = \frac{1}{12} \cdot \alpha_{x}^{Z} \cdot {}^{Z}B_{x}$. Eine Reduzierung von α_{x}^{Z} mit fortschreitendem Alter x geht senkend in die gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B_{x}$ ein – ${}^{Z}B_{x}$ darf allerdings mit fortschreitendem Alter x nicht sinken, was ansonsten zu einem Widerspruch zu § 12 „Substitutive Krankenversicherung" Absatz 4 Satz 2 VAG (keine günstigeren Prämien für das Neugeschäft als im Altbestand – nämlich nach einem Alterswechsel) führen würde. Dementsprechend erfolgt die Rückführung von α_{x}^{Z} ab einem gewissen Alter in kleineren Schritten so, dass die wachsende Monotonie von ${}^{Z}B_{x}$ gewährleistet ist.

  Um die maximal mögliche Zillmerung einkalkulieren zu können, muss rückschreitend vorgegangen werden, üblich sind Zillermerabstufungen von 0,5 Monatsbeiträgen.

  - Beim kalkulatorischen Endalter x_{ω} beginnend wird hochzählend das erste Alter x_{Z1}, $x_{Z1} \leq x_{\omega}$ gesucht, für das die Beitragsmonotonie und die KalV-Vorgaben unter $\forall x \mid x \leq x_{Z1} : \alpha_{x}^{Z} := 0{,}5$ nicht verletzt wird.
  - Sodann wird das erste Alter x_{Z2}, $x_{Z2} \leq x_{Z1}$ gesucht, für das die Beitragsmonotonie und die KalV-Vorgaben unter $\forall x \mid x \leq x_{Z2} : \alpha_{x}^{Z} := 1{,}0 = \alpha_{x_{Z1}}^{Z} + 0{,}5$ nicht verletzt wird.
  - Dieses Verfahren der Suche des ersten Alters x_{Zi}, $x_{Zi} \leq x_{Z(i-1)}$ der Monotonie- und KalV-Gewährleistung unter $\forall x \mid x \leq x_{Zi} : \alpha_{x}^{Z} := \alpha_{x_{Z(i-1)}}^{Z} + 0{,}5$ wird solange fortgesetzt bis $\alpha_{x_{Zi}}^{Z}$ den gewünschten Maximalwert resp. x_{Zi} das kalkulatorische Anfangsalter x_{α} erreicht.

1.4 Stornogewinne/-verluste.

Jede Rechungsgrundlage ist gemäß § 2 „Rechnungsgrundlagen“ Absatz 3 KalV mit ausreichenden Sicherheiten zu versehen, so auch die – Vererbung regulierende – Ausscheidetafel $\{s_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$, bestehend aus Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten q_x und w_x ($s_x = q_x + w_x$). Vorsicht heißt in diesem Fall, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten geringer angesetzt sind, dass also voraussichtlich realiter mehr versicherte Personen aus dem Kollektiv ausscheiden als rechnungsmäßig veranschlagt.

Demzufolge wird voraussichtlich die tatsächliche Vererbung höher ausfallen als die rechnungsmäßig angesetzte, dabei wird die bei Ausscheiden aus dem Kollektiv frei werdende Alterungsrückstellung lediglich in rechnungsmäßiger Höhe den Tatsächlich-im-Kollektiv-Verbleibenden zugeführt:

- Bei positiven Alterungsrückstellungen entstehen sogenannte Stornogewinne, die zum Unternehmensüberschuss beitragen.
- Bei negativen Alterungsrückstellungen entstehen sogenannte Stornoverluste, die den Unternehmensüberschuss mindern.

1.5 Bilanz- und Stornorückstellung.

Die Alterungsrückstellungen $V_{x;x+m}$ werden jahresgenau ohne Beachtung der tatsächlichen Vertragslaufzeit der einzelnen Versicherten (in Jahren und Monaten) bestimmt. Da die Bilanzerstellung jedoch zu einem festen Termin erfolgt, lässt § 16 „Alterungsrückstellung“ Satz 2 KalV für die Bilanz zu, die tatsächlich zu bildende Alterungsrückstellung ${}^{Bil}V_{x;x+m}$ an Hand eines Näherungsverfahren zu berechnen, bei dem die Einzelalterungsrückstellungen mit auf- resp. abgerundeten ganzen Versicherungsjahren gemittelt werden: ${}^{Bil}V_{x;x+m} = \frac{1}{2} \cdot \left({}^{Z}V_{x;x+m} + {}^{Z}V_{x;x+m+1}\right)$.

Insbesondere für Neugründungen mit einem übermäßigen Anteil an negativen Alterungsrückstellungen gegenüber positiven Alterungsrückstellungen ist die Regelung in § 25 „Deckungsrückstellung“ Absatz 5 RechVersV von Bedeutung, dass nämlich bei einer negativen Gesamtsumme über alle Alterungsrückstellung diese mit Null in die Bilanz einzustellen ist.

Ist dagegen die Gesamtsumme über alle Alterungsrückstellung positiv, kann in der Bilanz für einen Teil (ca. zehn bis 15 Prozent) der aufsummierten negativen Alterungsrückstellungen eine sogenannte Stornorückstellung gebildet werden. Diese Stornorückstellung reduziert somit den Unternehmensüberschuss des Unternehmens und stellt somit eine Wertberichtigung auf negative Alterungsrückstellungen dar. Dies ist gerechtfertigt, da die Ausscheidewahrscheinlichkeiten s_x i.d.R. von der Tarifzugehörigkeitsdauer abhängig sind; insbesondere ist während den ersten Versicherungsjahren ein höheres Storno feststellbar – zu Vertragszeiten in den auf Grund der Zillmerung die Alterungsrückstellung oftmals noch negativ ist.

1.6 Problem fallender Profile.

Nettoprämie bei fallendem Profil.

- Für ein streng monoton fallendes Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ sind die normierten Nettoprämien p_x mit fortschreitendem Alter x streng monoton fallend, d.h. $\forall x \mid x \in \{x_\alpha, \dots, x_\omega - 1\}$: $\forall m \mid m \in \{1, \dots, x_\omega - x\}$: $p_{x+m} < p_x$:

  $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ streng monoton fallend (1:20)

  $\Rightarrow \forall x \mid x \in \{x_\alpha, \dots, x_\omega - 1\}: \ \forall m \mid m \in \{1, \dots, x_\omega - x\}: \ p_{x+m} < p_x$.

- Begründung: mit $p_x = \frac{U_x}{N_x}$:

  $p_{x+m} < p_x \ \Leftrightarrow \ p_x - p_{x+m} > 0$

  $p_x - p_{x+m}$

  $= \dfrac{U_x}{N_x} - \dfrac{U_{x+m}}{N_{x+m}}$ (gemeinsamer Nenner)

  $$= \frac{1}{N_x \cdot N_{x+m}} \cdot \underbrace{\left(U_x \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot N_x\right)}_{=\sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi \text{ (nachfolgend)}}$$

  $$= \frac{1}{\underbrace{N_x}_{>0} \cdot \underbrace{N_{x+m}}_{>0}} \cdot \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \underbrace{\left(k_\xi - k_\zeta\right)}_{>0,\text{ da } k_\xi \ge k_{x+m-1} > k_\zeta} \cdot \underbrace{D_\zeta}_{>0} \cdot \underbrace{D_\xi}_{>0}$$

$\Rightarrow \ p_x - p_{x+m} > 0$. □

- Ad $U_x \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot N_x = \sum_{\zeta=x+m+1}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi$
  - Mit den Kommutationswerten $D_\xi := l_\xi \cdot v^\xi$, $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$, $O_\xi := D_\xi \cdot k_\xi$ und $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$:

  $U_x = \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi + \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} O_\zeta = \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi + U_{x+m}$

  $N_x = \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi + \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} D_\zeta = \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi + N_{x+m}$

  $U_x \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot N_x$

  $= \left(\sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi + U_{x+m}\right) \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot \left(\sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi + N_{x+m}\right)$

  $= \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi \cdot N_{x+m} + U_{x+m} \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi - U_{x+m} \cdot N_{x+m}$

  $= N_{x+m} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi - U_{x+m} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi$

  - Unterschiedliche Summationsvariablen ζ und ξ:

$$= \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} D_\zeta \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi \cdot D_\xi\right) - \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \left(k_\zeta \cdot D_\zeta\right) \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi$$

$$= \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi \cdot D_\zeta \cdot D_\xi\right) - \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\zeta \cdot D_\zeta \cdot D_\xi\right)$$

$$= \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi \cdot D_\zeta \cdot D_\xi - k_\zeta \cdot D_\zeta \cdot D_\xi\right)$$

$$= \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi$$

$$= \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi + \sum_{\zeta=x}^{x+m-1} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi$$

$$= \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi + \underbrace{\sum_{\zeta=x}^{x+m-1} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} k_\zeta \cdot D_\zeta \cdot D_\xi - \sum_{\zeta=x}^{x+m-1} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} k_\xi \cdot D_\zeta \cdot D_\xi}_{=0 \text{ (einzelne Summanden heben sich gegenseitg auf)}}$$

$$= \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi \,. \qquad \blacksquare$$

- An Stelle der Ungleichung $p_x - p_{x+m} > 0$ für laufende x und m nachzuweisen, genügt es, die Ungleichung $\forall x \mid x \in \{\, x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1 \,\}: p_x - p_{x+1} < 0$ zu zeigen.

Gezillmerte Nettoprämie bei fallendem Profil.

- Für ein streng monoton fallendes Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ sind die gezillmerten Nettoprämien ${}^Z p_x$ mit fortschreitendem Alter x streng monoton fallend, d.h. $\forall x \mid x \in \{\, x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1 \,\}$: $\forall m \mid m \in \{\, 1, \ldots, x_\omega - x \,\}$: ${}^Z p_{x+m} < {}^Z p_x$:

  $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ streng monoton fallend (1:21)

  $\Rightarrow \forall x \mid x \in \{\, x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1 \,\}: \ \forall m \mid m \in \{\, 1, \ldots, x_\omega - x \}: \ {}^Z p_{x+m} < {}^Z p_x \,.$

- Begründung: Mit dem vom normierten Kopfschaden k_x unabhängigen Zillmerfaktor z_x, $z_x = \frac{12 \cdot a_x \cdot (1 - \Delta_{j/s})}{12 \cdot a_x \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \alpha_x^Z}$ und ${}^Z p_x = z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s}$:

  ${}^Z p_{x+m} < {}^Z p_x$

  $\Leftrightarrow {}^Z p_x - {}^Z p_{x+m} > 0$

  $\Leftrightarrow z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s \mid x} - \left[z_{x+m} \cdot p_{x+m} + (z_{x+m} - 1) \cdot \gamma_{j/s \mid x+m}\right] > 0$

  $\Leftrightarrow z_x \cdot p_x - z_{x+m} \cdot p_{x+m} + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s \mid x} - (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s \mid x+m} > 0$

  - mit $p_x - p_{x+m} > 0$ gemäß Formel (1:20, p. 40), $z_x \ge 1$, $z_x - 1 \ge 0$ und $\gamma_{j/s \mid x} \ge \gamma_{j/s \mid x+m}$, da $\gamma_j \ge \gamma_s$:

  $$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{z_x}_{\ge 1} \cdot \underbrace{\left(p_x - p_{x+m}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(z_x - 1\right)}_{\ge 0} \cdot \underbrace{\left(\gamma_{j/s \mid x} - \gamma_{j/s \mid x+m}\right)}_{\ge 0}}_{>0} > 0$$

$\Rightarrow {}^Z p_x - {}^Z p_{x+m} > 0 \,. \qquad \blacksquare$

Gezillmerte Bruttoprämie bei fallendem Profil.

- Für ein streng monoton fallendes Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ sind die gezillmerten Bruttoprämien ${}^Z b_x$ mit fortschreitendem Alter x streng monoton fallend, d.h. $\forall x \mid x \in \{x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1\}$: $\forall m \mid m \in \{1, \ldots, x_\omega - x\}$: ${}^Z b_{x+m} < {}^Z b_x$:

  $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ streng monoton fallend (1:22)

  $\Rightarrow \ \forall x \mid x \in \{x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1\}: \ \forall m \mid m \in \{1, \ldots, x_\omega - x\}: \ {}^Z b_{x+m} < {}^Z b_x$.

- Begründung: mit ${}^Z b_x = \frac{{}^Z p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$:

$$ {}^Z b_x = \frac{{}^Z p_x + \gamma_{j/s\,|\,x}}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x}} \overset{(1)}{>} \frac{{}^Z p_{x+m} + \gamma_{j/s\,|\,x}}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x}} \overset{(2)}{\ge} \frac{{}^Z p_{x+m} + \gamma_{j/s\,|\,x+m}}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x}} \overset{(3)}{\ge} \frac{{}^Z p_{x+m} + \gamma_{j/s\,|\,x+m}}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}} = {}^Z b_{x+m} $$

  (1) ${}^Z p_x > {}^Z p_{x+m}$ gemäß Formel (1:21, p. 41)

  (2) $\gamma_j \ge \gamma_s$, d.h. $\gamma_{j/s\,|\,x} \ge \gamma_{j/s\,|\,x+m}$

  (3) $\Delta_j \ge \Delta_s$, d.h. $\Delta_{j/s\,|\,x} \ge \Delta_{j/s\,|\,x+m} \Rightarrow 1 - \Delta_{j/s\,|\,x} \le 1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m} \Rightarrow \dfrac{1}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x}} \ge \dfrac{1}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}}$. ■

Bemerkung.

- Mit fortschreitendem Alter x darf die gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^Z B_x$ nicht absinken, was ansonsten zu einem Widerspruch zu § 12 „Substitutive Krankenversicherung“ Absatz 4 Satz 2 VAG (keine günstigeren Prämien für das Neugeschäft als im Altbestand) führen würde: Zum Eintrittsalter x ist der konstant bleibende Beitrag ${}^Z B_x$ zu entrichten. Nach einem Jahr ohne Tarifänderung ist weiterhin der Beitrag ${}^Z B_x$ zu entrichten, der allerdings höher als ${}^Z B_{x+1}$ wäre, was bedeutet, dass Bestandsversicherte eine höhere Prämie als Neuversicherte hätte.

Alterungsrückstellung bei fallendem Profil.

- In Abwandlung des Anwartschaftsdeckungsverfahrens (dazu Abschnitt 1.1, p. 4) liegt für streng monoton fallende Kopfschäden K_x auf Grund der Beitragskalkulation nach Art der Lebensversicherung (mit Ansparprozess) die während der Vertragslaufzeit gleichbleibende Nettoprämie P_x
  - in den anfänglichen Altern $x_0 + a$ *unter* den durchschnittlich in Anspruch genommenen Leistungen ($P_{x_0+a} < K_{x_0+a}$),
  - in den späteren Jahren $x_\omega - s$ *über* den durchschnittlich in Anspruch genommenen Leistungen ($P_{x_\omega - s} > K_{x_\omega - s}$);

  was eine kritische nachgelagerte Finanzierung bedeutet.

- Die tarifliche Alterungsrückstellung (AR) kann dabei als *Darlehen* aufgefasst werden,
  - das in den anfänglichen Altern x_0+a die – nicht in Gänze aus dem Beitrag gedeckten – Kopfschäden $K_{x_0+a} - P_{x_0+a}$ finanziert.
  - das in den späteren Vertragsjahren x_0+s durch die – bezüglich der Kopfschäden – überschüssigen Beitragsanteile $P_{x_0+s} - K_{x_0+s}$ getilgt wird.
- In diesem Fall ist die Alterungsrückstellung zu keinem Zeitpunkt positiv.
  - Begründung: $v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - p_x\right)\cdot a_{x+m}$ resp. ${}^Z v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - {}^Z p_x\right)\cdot a_{x+m}$ gemäß Formeln (1:7, p. 12) und (1:15, p. 28) mit $p_x - p_{x+m} > 0$ resp. ${}^Z p_x - {}^Z p_{x+m} > 0$ gemäß Formel (1:20, p. 40) resp. (1:21, p. 41) ergibt $v_{x;x+m} \le 0$ resp. ${}^Z v_{x;x+m} \le 0$. ■
- Beim Ausscheiden aus dem Kollektiv hinterlassen die Abgehenden negative Alterungsrückstellungen, was so interpretiert werden kann, dass sie die Schulden – entstanden durch die Prämien übersteigende Leistungsinanspruchnahme –, nicht beglichen haben. Demgemäß sind bei negativen Alterungsrückstellungen die Ausscheidewahrscheinlichkeiten s_x zu überschätzen (im Gegensatz zur üblichen Sicherheit durch Unterschätzen), d.h. es ist eine höhere Vererbung rechnungsmäßig anzusetzen als zunächst beobachtet, da die negative Vererbung die Beiträge erhöht.

Bemerkung.

- Die Problematik fallender Profile besteht nicht nur bei Profilen, die monoton während aller Jahre fallen, sondern auch für Teilbereiche bei Profilen, die in gewissen Altersbereichen fallen. Zu solchen Altersbereiche gehört beispielsweise das Sinken der Kopfschäden in den Jahren, nachdem die meisten Leistungen wegen Schwangerschaft und Mutterschaft in Anspruch genommen wurden, oder bei Zahntarifen (sowohl Zahnbehandlung als auch Zahnersatz) die Alter ab ca. 70.

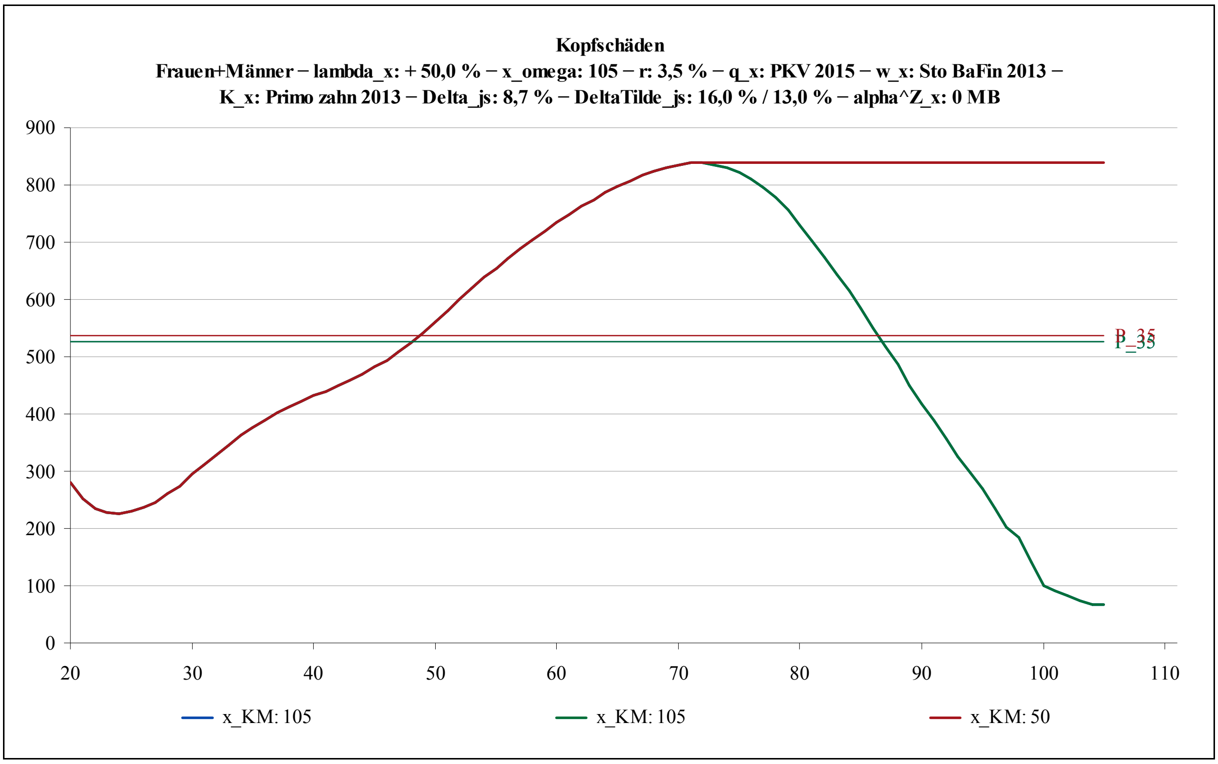
  Das Absinken der Kopfschäden nach den höheren auf Grund der Schwanger-/Mutterschaftsleistungen führt allerdings in den meisten Fällen zu keinen Verwerfungen, da i.d.R. die Kopfschäden in den darauf folgenden Altern so ansteigen, dass das temporären Absinken weder zu einem teilweisen Absinken der Beiträge noch zu negativen Alterungsrückstellungen führt.

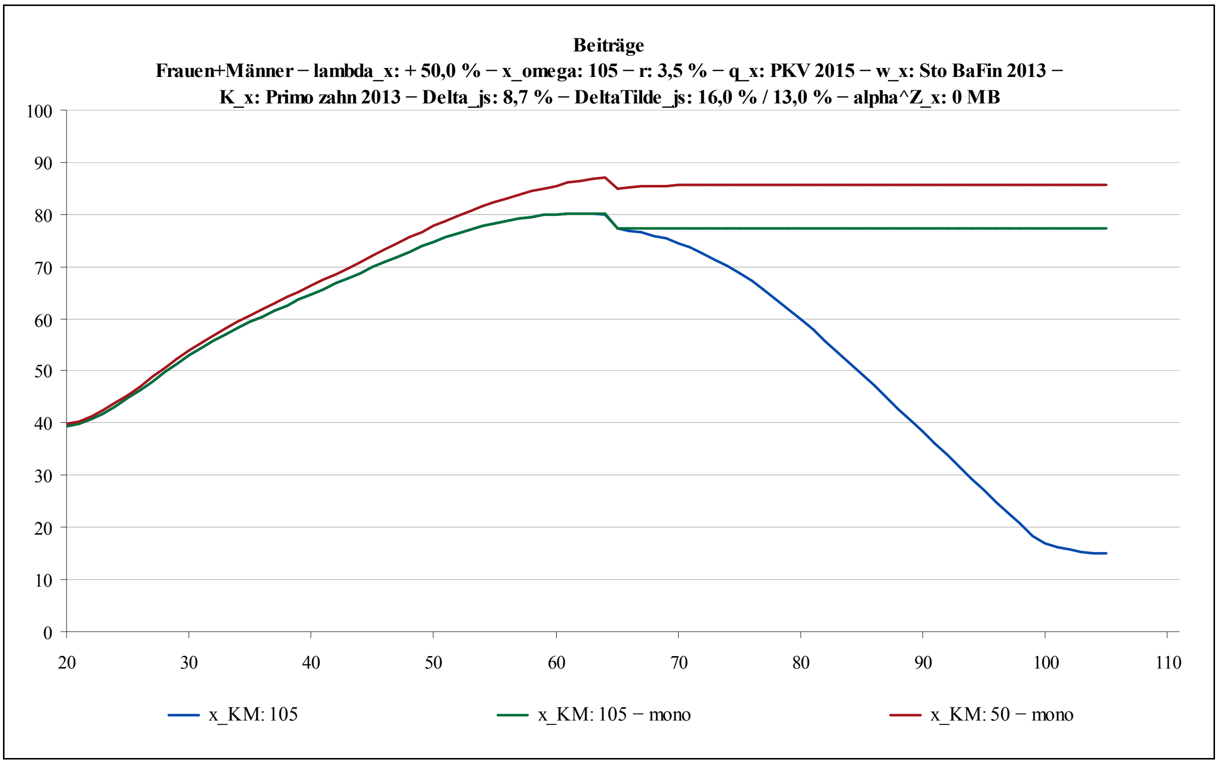
  Da bei Zahntarifen ab einem gewissen Alter (ca. um Alter 70) die Kopfschäden kontinuierlich sinken, besteht ab diesem Alter das Problem fallender Profile. Ein Modell zur Problemlösung sieht vor, die rechnungsmäßigen Kopfschäden auf dem höchsten Wert festzuhalten und mit diesen konstruierten Kopfschäden die Tarifbeiträge zu berechnen, die dann allerdings höher als benötigt ausfallen. Als Ausgleich zur heraufgesetzten Prämie erhalten die Versicherten eine Beitragsrückzahlung in Höhe der altersabhängigen Kopfschadendifferenz bezüglich der hoch gesetzten und notwendigen Kopfschäden. Demgemäß kann die tarifliche Leistung interpretiert als Erstattung der Krankheitskosten plus altersabhängige Beitragsrückzahlung.

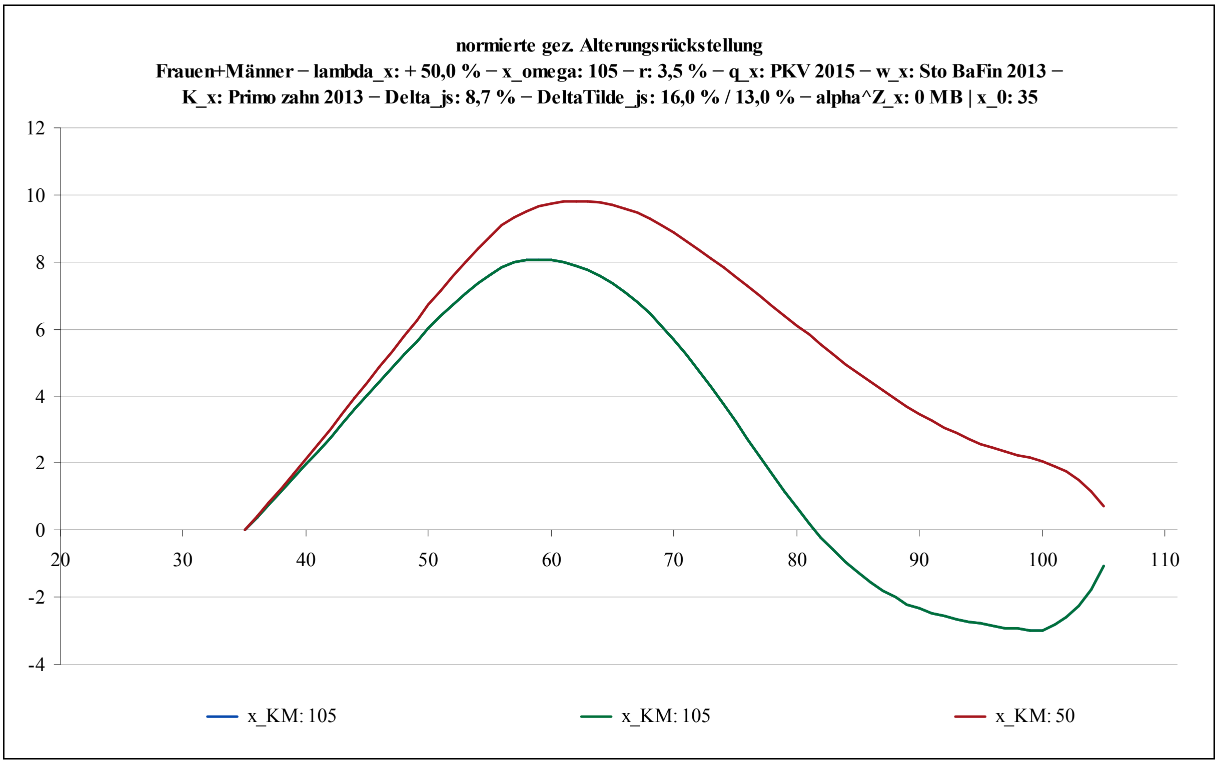
Bei Kompakttarifen mit ambulanten, stationären und zahnärztlichen Leistungen werden die fallenden Zahnleistungen durch das Ansteigen der ambulanten und stationären Leistungen überdeckt, so dass es hier i.d.R. keine Verwerfungen auszugleichen sind.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 3,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen (Anmerkung: fehlende Zillmerung wird durch erhöhte Wartezeit- und Selektionsersparnisse auf Grund summenmäßiger Leistungsbegrenzung in den ersten Versicherungsjahren ausgeglichen); Unterschiede bezüglich Beitragsmonotonisierung resp. Kopfschadenmonotonisierung ab Alter 65 (Alter x_{KM}).







Weiterführendes.

KLAUS ABT, HELFRIED BEER, MICHAEL BORCHERT, EGON KLEIN, STEPHAN RUDOLPH, HERMANN GEORG ZÜCHNER: „Kalkulation von Tarifen mit fallendem Kopfschadenprofil in der Krankenversicherung“, Deutsche Aktuarsvereingung e.V., Köln, 2001.