Die Mathematik der Privaten Krankenversicherung.

Ein Leitfaden für PKV-Aktuarinnen und -Aktuare.

– Teil D: Die tarifliche Alterungsrückstellung –

München, Stand: 26. Juni 2017.

ANDREAS LENCKNER, Aktuar DAV.

Hinweise:

- Entstanden zur Vorlesung an der Ludwig-Maximilians-Universität München (Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik – Mathematisches Institut – Arbeitsgruppe Stochastik und Finanzmathematik) im Sommersemester 2017. Zitate der Rechtsgrundlagen zum damals aktuellen Stand.
- Sofern wegen der Übersichtlichkeit im Text die männliche Form gewählt wurde, beziehen sich die Angaben selbstverständlich auf Angehörige beider Geschlechter.
-
- Haftungsausschluss jeglicher Art: alle Angaben sind ohne Gewähr, so dass keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität übernommen werden kann, insbesondere dienen die Inhalte lediglich der Information und stellen keine Rechtsberatung dar.

Übersicht.

1. Die tarifliche Alterungsrückstellung.

§ 146 „Substitutive Krankenversicherung“ VAG.

(1) Soweit die Krankenversicherung ganz oder teilweise den im gesetzlichen Sozialversicherungssystem vorgesehenen Kranken- oder Pflegeversicherungsschutz ersetzen kann (substitutive Krankenversicherung), darf sie im Inland vorbehaltlich des Absatzes 3 nur nach Art der Lebensversicherung betrieben werden, wobei
[…]
2. die Alterungsrückstellung nach § 341f des Handelsgesetzbuchs zu bilden ist,
[…]

(3) Substitutive Krankenversicherungen mit befristeten Vertragslaufzeiten nach § 195 Absatz 2 und 3 des Versicherungsvertragsgesetzes [Ausbildungs-, Auslands-, Ausländer-, Reise- und Restschuldkrankenversicherungen] sowie Krankentagegeldversicherungen nach Vollendung des 65. Lebensjahres des Versicherten nach § 196 des Versicherungsvertragsgesetzes können ohne Alterungsrückstellung kalkuliert werden.

§ 341f „Deckungsrückstellung“ HGB.

(1) Deckungsrückstellungen sind für die Verpflichtungen aus dem Lebensversicherungs- und dem nach Art der Lebensversicherung betriebenen Versicherungsgeschäft in Höhe ihres versicherungsmathematisch errechneten Wertes einschließlich bereits zugeteilter Überschussanteile mit Ausnahme der verzinslich angesammelten Überschussanteile und nach Abzug des versicherungsmathematisch ermittelten Barwerts der künftigen Beiträge zu bilden (prospektive Methode).
Ist eine Ermittlung des Wertes der künftigen Verpflichtungen und der künftigen Beiträge nicht möglich, hat die Berechnung auf Grund der aufgezinsten Einnahmen und Ausgaben der vorangegangenen Geschäftsjahre zu erfolgen (retrospektive Methode).

(2) Bei der Bildung der Deckungsrückstellung sind auch gegenüber den Versicherten eingegangene Zinssatzverpflichtungen zu berücksichtigen, sofern die derzeitigen oder zu erwartenden Erträge der Vermögenswerte des Unternehmens für die Deckung dieser Verpflichtungen nicht ausreichen.

(3) In der Krankenversicherung, die nach Art der Lebensversicherung betrieben wird, ist als Deckungsrückstellung eine Alterungsrückstellung zu bilden; hierunter fallen auch der Rückstellung bereits zugeführte Beträge aus der Rückstellung für Beitragsrückerstattung sowie Zuschreibungen, die dem Aufbau einer Anwartschaft auf Beitragsermäßigung im Alter dienen.
Bei der Berechnung sind die für die Berechnung der Prämien geltenden aufsichtsrechtlichen Bestimmungen zu berücksichtigen.

§ 1 „Versicherungsmathematische Methoden in der Krankenversicherung" KVAV.
Versicherungsmathematische Methoden zur Berechnung der Prämien und Rückstellungen in der nach Art der Lebensversicherung betriebenen Krankenversicherung sind die nach den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik unter Verwendung der in den §§ 2 und 4 bis 8 näher bezeichneten Rechnungsgrundlagen erfolgenden Berechnungen der Prämien und der Alterungsrückstellungen nach Maßgabe der §§ 3, 10, 11, 13, 14 und 18.

§ 3 „Gleiche Rechnungsgrundlagen" KVAV.
Für die Berechnung der Prämie und der Alterungsrückstellung sind die gleichen Rechnungsgrundlagen zu verwenden.

§ 4 „Rechnungszins" KVAV.
Der Rechnungszins für die Prämienberechnung und die Berechnung der Alterungsrückstellung darf 3,5 Prozent nicht übersteigen.

§ 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" KVAV.
[…]
(3) Unmittelbare Abschlusskosten dürfen durch Zillmerung nur in einer solchen Höhe in die Prämien eingerechnet werden, dass die Gesamtalterungsrückstellung eines Zugangsjahres im Tarif höchstens vier Jahre und jede Einzelalterungsrückstellung nicht länger als 15 Jahre und nicht länger als die Hälfte der tariflich vorgesehenen künftigen Vertragsdauer negativ ist.
[…]
[…]

§ 18 „Alterungsrückstellung" KVAV.
Bei der Berechnung der Alterungsrückstellung nach § 341f des Handelsgesetzbuchs und § 25 Absatz 5 der Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung ist die Summe der Einzelalterungsrückstellungen am Abschlussstichtag unter Berücksichtigung des Alters des Versicherten an diesem Stichtag zu Grunde zu legen.
Zur Berechnung der Alterungsrückstellungen nach Satz 1 ist auch ein Näherungsverfahren zulässig, bei dem das arithmetische Mittel der Einzelalterungsrückstellungen, die sich dadurch ergeben, dass die Versicherungsdauern auf ganze Jahre auf- und abgerundet werden, verwendet wird.

Verordnung über die Rechnungslegung von Versicherungsunternehmen (Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung – RechVersV).
Abschnitt 3. „Vorschriften zu einzelnen Posten der Bilanz“.
Unterabschnitt 2. „Posten der Passivseite“.
§ 25 „Deckungsrückstellung“ RechVersV.

(1) Bei der Berechnung der Deckungsrückstellung sind für die Berücksichtigung der Risiken aus dem Versicherungsvertrag angemessene Sicherheitszuschläge anzusetzen.
Einmalige Abschlusskosten dürfen nach einem angemessenen versicherungsmathematischen Verfahren, insbesondere dem Zillmerungsverfahren, berücksichtigt werden.

[…]

(5) Bei der Berechnung der von den Krankenversicherungsunternehmen zu bildenden Alterungsrückstellung finden die auf Grund des § 160 Nummer 1 des Versicherungsaufsichtsgesetzes erlassenen Vorschriften Anwendung.
Ergibt sich durch Aufrechnung negativer Alterungsrückstellungen gegen positive Alterungsrückstellungen für die Alterungsrückstellung aller vom Krankenversicherungsunternehmen selbst abgeschlossenen Versicherungen eine negative Alterungsrückstellung, so ist diese in der Bilanz mit Null einzustellen.

[…]

1.1 Anwartschaftsdeckungsverfahren.

Für den weiteren Vertragsverlauf nach m Jahren ist das grundständige Äquivalenzprinzip zum Eintrittsalter x auf der Zahlungsseite um die (gezillmerte) tarifliche Alterungsrückstellung ${}^{(Z)}V_{x;x+m}$ zu erweitern zu (dabei bedeutet „zukünftig" einschließlich der Geldflüsse zum erreichten Alter $x+m$).

Erweitertes Äquivalenzprinzip zum Alter.		(1:1)
gesamtes zukünftiges diskontiertes Ausgabenvolumen	=	gesamtes zukünftiges diskontiertes Einnahmenvolumen
	+	vorhandene tarifliche Alterungsrückstellung

Äquivalenzprinzip zum Alter $x+m$ (bei normierten Rechnungsgrundlagen).		
normiert	*unnormiert*	
$A_{x+m} = p_x \cdot a_{x+m} + v_{x;x+m}$	$G \cdot A_{x+m} = P_x \cdot a_{x+m} + V_{x;x+m}$	*ohne Zillmerung*
$A_{x+m} = {}^Z p_x \cdot a_{x+m} + {}^Z v_{x;x+m}$	$G \cdot A_{x+m} = {}^Z P_x \cdot a_{x+m} + {}^Z V_{x;x+m}$	*mit Zillmerung*

Auf Grund der Beitragskalkulation nach Art der Lebensversicherung (mit Ansparprozess) liegt die während der Vertragslaufzeit gleichbleibende Nettoprämie P_x für monoton steigende Kopfschäden K_x

- in den anfänglichen Altern x_0+a über den durchschnittlich in Anspruch genommenen Leistungen ($P_{x_0+a} > K_{x_0+a}$),
- in den späteren Altern x_ω-s unter den durchschnittlich in Anspruch genommenen Leistungen ($P_{x_\omega-s} < K_{x_\omega-s}$);

was eine Konstanz des Beitragsverlaufes bewirkt.

Die tarifliche Alterungsrückstellung [AR] kann dabei als Teil eines kollektiven Sparbuchs von Gleichaltrigen aufgefasst werden,

- dem in den anfänglichen Altern x_0+a die – bezüglich der Kopfschäden – überschüssigen Beitragsanteile $P_{x_0+a} - K_{x_0+a}$ (die sogenannte Sparprämien) zugeführt werden,
- das in den Altern x_ω-s die – nicht in Gänze aus dem Beitrag gedeckten – Kopfschäden $K_{x_\omega-s} - P_{x_\omega-s}$ finanziert.

Dabei wird die Alterungsrückstellung unter Berücksichtigung von Rechnungszins und rechnungsmäßiger Ausscheideordnung geführt.

Die Alterungsrückstellung dient also der Vorsorge, um die in späteren Altern höheren Gesundheitskosten finanzieren zu können.

Bis zur Einführung des Übertragungswertes zum 01.01.2009 blieb allerdings diese Vorsorge auf dasjenige Versicherungsunternehmen beschränkt, bei dem die Versicherung geführt wurde. Bei einem Unternehmenswechsel verblieb nämlich die gesamte vorhandene Alterungsrückstellung beim verlassenen Unternehmen und wurde in voller Höhe dem dort verbliebenen Versichertenkollektiv der Gleichaltrigen zugeführt.

Kollektiveigenschaft der Alterungsrückstellung.

- Als Grundvoraussetzung ist zu beachten, dass die Krankenversicherung im weiteren Sinne eine Risikoversicherung ist und kein individueller Sparvertrag (wie zum Beispiel eine Lebensversicherung mit Leistungen im Erlebensfall). Unter dieser Prämisse wird im Folgenden die unter Aktuaren weitverbreitete gängige Meinung dargestellt, dass eine pauschale Individualisierung der Alterungsrückstellung nicht sachgerecht sei. In der Literatur gibt es viele dem diametral widersprechende Äußerungen, auch juristische Aspekte sind dabei zu beachten. Je nach Versicherungsart (Lebens-, Renten-, Berufsunfähigkeit-, Pflegerentenversicherungen etc., die von Lebensversicherungsgesellschaften betrieben werden) gibt es unterschiedliche Betrachtungsweisen der Deckungsrückstellung, dabei auch die Aufteilung des Kollektivs in Beitragszahlende und Leistungsempfangende mit unterschiedlichen Zuweisungen von Deckungsrückstellungen.
- So wie die Prämie für ein Kollektiv gleicher Risiken (per definitionem nach Tarif, Alter, Gesundheitszustand zu Versicherungsbeginn, ggf. Geschlechts) bestimmt wird, bezieht sich auch die Alterungsrückstellung auf das Kollektiv gleicher Risiken. Die Höhe der Gesamtalterungsrückstellung für das Kollektiv gleicher Risiken ist unabhängig von der Gesamtalterungsrückstellung jedes anderen Alters ggf. jedes anderen Geschlechts. Dies resultiert unmittelbar aus dem Äquivalenzprinzip.
- Die Nettoprämie ist – unter Zusammenfassung einer Vielzahl von unterschiedlichsten Versicherungsfällen mit statistischen und berechenbaren Gesetzmäßigkeiten – alleinig für das Kollektiv gleicher Risiken in seiner Gesamtheit bemessen, für die Individuen selbst bleibt sie ohne Aussagekraft. Für jeden einzelnen Versicherten dieses Alters entspricht nämlich der zukünftige persönliche Schadenverlauf i.d.R. nicht den jeweiligen altersgemäßen angesetzten rechnungsmäßigen Kopfschäden, die an Hand der durchschnittlichen Schäden im Kollektiv (unter Beachtung des Gesetzes der großen Zahlen) angesetzt werden.
- Die Kollektiveigenschaft der Nettoprämie überträgt sich direkt auf die Alterungsrückstellung. Auch die individuelle Alterungsrückstellung ist per se eine rein stochastische kollektive Größe, nämlich die Differenz

zwischen dem Barwert der zukünftigen erwarteten Versicherungsleistungen und dem Barwert der zukünftigen erwarteten Prämieneinnahmen bezüglich des betreffenden Kollektivs. Das gesamte Kollektiv gleicher Risiken bildet gemeinsam die Gesamtalterungsrückstellung und benötigt diese auch im Laufe der Zeit.

- In der Krankenversicherung ist die Gesamtalterungsrückstellung somit im engen Sinne kaum auf die einzelnen Verträge aufteilbar. Es findet nämlich kein Ansparen auf eine bestimmte individuelle Leistung statt, ferner ist die Versicherungsleistung in der Krankenversicherung zweidimensional: sie hängt zum einen vom Zeitpunkt sowie der Häufigkeit und zum anderen von der Höhe der Schäden ab. Allerdings wird beim Tarifwechsel dieser Grundsatz aufgeweicht: hier wird nämlich der dem Wechsler zugeordnete Anteil der Gesamtalterungsrückstellung dem Kollektiv des abgebenden Tarifs entzogen und sodann dem Kollektiv des aufnehmenden Tarifs zugeführt.
- Der auf einzelne versicherte Personen rein rechnerisch entfallende Anteil der altersbezogenen kollektiven Gesamtalterungsrückstellung gleicher Risiken gibt auch nicht wieder, wie sich das betreffende individuelle Risiko gestaltet resp. gestaltet hat.
- Dies sei an zwei Beispielen verdeutlicht:
    - Eine gesündere versicherte Person hätte retrospektiv betrachtet eine höhere Alterungsrückstellung, da sie kaum Leistungen in Anspruch genommen, d.h. sie hätte mehr ansparen können. Prospektiv betrachtet, würde für sie dagegen voraussichtlich eine geringere Alterungsrückstellung genügen, da sie vermutlich auch zukünftig weniger Leistungen in Anspruch nehmen wird.
    - Eine kränkere versicherte Person hätte retrospektiv betrachtet eine geringere Alterungsrückstellung, da sie viele Leistungen in Anspruch genommen, d.h. sie hätte weniger ansparen können. Prospektiv betrachtet, würde für sie dagegen voraussichtlich eine höhere Alterungsrückstellung benötigt, da sie vermutlich auch zukünftig viele Leistungen in Anspruch nehmen wird.
    - An Hand dieser beiden Versicherungsverläufe, denen kalkulatorisch der gleiche Anteil an der Alterungsrückstellung zugeschrieben wird, wird sichtbar, dass nur für das Kollektiv in Gänze die Alterungsrückstellung richtig bemessen ist.
- Bei geschlechts*unabh*ängig kalkulierten Tarifen entfällt die angegebene Differenzierung nach dem Geschlecht.

Bemerkungen.

- § 146 „Substitutive Krankenversicherung" Absatz 3 VAG ermöglicht, dass substitutive Krankenversicherungen mit befristeten Vertragslaufzeiten, dazu gehören ggf. Ausbildungs-, Auslands-, Ausländer-, Reise- und Restschuldkrankenversicherungen sowie befristete Krankentagegeldversicherungen, ohne Alterungsrückstellung kalkuliert werden können.

- In § 4 „Rechnungszins" KVAV wird explizit darauf hingewiesen, dass der Rechnungszins auch bei der Berechnung der Alterungsrückstellung 3,5 Prozent nicht übersteigen darf, allerdings ist er gemäß § 3 „Gleiche Rechnungsgrundlagen" KVAV in gleicher Höhe wie bei der Prämienkalkulation anzusetzen. Dieser Hinweis ist u.a. vor dem Hintergrund zu sehen, dass es neben der üblichen tariflichen Alterungsrückstellung – die Gegenstand dieses Kapitels ist – weitere Alterungsrückstellungen gibt, die für die Versicherten geführt werden, beispielsweise diejenigen, die durch den gesetzlichen Zuschlag oder durch Beitragsentlastungstarife aufgebaut werden oder durch Zuschreibungen erfolgen.

  In der Lebensversicherung ist es dagegen gestattet, Beiträge und Alterungsrückstellungen mit unterschiedlichen Rechnungszinssätzen berechnen, der gesetzlich vorgegebene Höchstrechnungszinssatz derzeit in Höhe von 0,9 Prozent bezieht sich nur auf die Beitragskalkulation.

1.2 Ungezillmerte tarifliche Alterungsrückstellung.

Definition.

- Die unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ gibt für Ursprünglich-x-Jährige im Alter $x+m$ denjenigen Betrag an, der genügt, während der weiteren Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω zusammen mit der laufend jährlich zu entrichtenden unnormierten Nettoprämie P_x (zum Eintrittsalter x) jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ eine veränderliche Rente (Zahlung) in Höhe $K_{x+m+\mu}$ ($\mu \geq 0$) zu finanzieren, dabei ist der Betrag zu Jahresanfang zu stellen.

Hinweis.

- Die Bezeichnung „$v_{x;x+m}$" (stets mit Index) für die normierte Alterungsrückstellung ist nicht mit der Bezeichnung „v" (i.d.R. ohne Index, gelegentlich mit Exponent) für den Diskontierungsfaktor zu verwechseln.

1.2.1 Prospektive Ermittlung der ungezillmerten tariflichen Alterungsrückstellung.

Prospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung.	(1:2)
$^{prosp}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$	prospektiv ermittelte ungezillmerte Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

Definition und Berechnung.

- Die prospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung $^{prosp}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ gibt den Fehlbetrag aus dem gesamten zukünftigen diskontierten Ausgabenvolumen bezüglich des erreichten Alter $x+m$ abzüglich des gesamten zukünftigen diskontierten Einnahmenvolumens an Nettoprämien bezüglich des erreichten Alter $x+m$ an. Prospektiv heißt dabei zukunftsbezogen, dabei bedeutet „zukünftig" einschließlich der Geldflüsse zum Alter $x+m$.
- Die normierte prospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung $^{prosp}v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ lässt sich als Differenz aus Leistungsbarwert A_{x+m} zum erreichten Alter $x+m$ abzüglich des normierten Nettoprämienbarwerts $p_x \cdot a_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ bezüglich der normierten Nettoprämie p_x zum Eintrittsalter x darstellen:

  $$^{prosp}v_{x;x+m} = A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m}.$$

Herleitung

- Die gesamte vorhandene tarifliche Alterungsrückstellung $l_{x+m} \cdot {}^{prosp}V_{x;x+m}$ des Kollektivs nach m Jahren ergibt sich demnach aus der Differenz des gesamten restlichen zukünftigen diskontierten Leistungsvolumens abzüglich des gesamten restlichen zukünftigen diskontierten Einnahmenvolumens, bezogen jeweils auf das erreichte Alter $x+m$.

			zukünftige erwartete Versicherungsleistungen		zukünftige erwartete Prämieneinnahmen	
Jahr	Dis-kont.	Anzahl VP	mittlere Leistung	diskontiertes Leistungs-volumen	Einzel-zahlung	diskontiertes Zahlungs-volumen
		l_{x+m}				${}^{prosp}V_{x;x+m}$
—	—	—	—	—	—	—
t_0+m+0	v^{m+0}	l_{x+m+0}	K_{x+m+0}	$l_{x+m+0} \cdot K_{x+m+0} \cdot v^{m+0}$	P_x	$l_{x+m+0} \cdot P_x \cdot v^{m+0}$
t_0+m+1	v^{m+1}	l_{x+m+1}	K_{x+m+1}	$l_{x+m+1} \cdot K_{x+m+1} \cdot v^{m+1}$	P_x	$l_{x+m+1} \cdot P_x \cdot v^{m+1}$
t_0+m+2	v^{m+2}	l_{x+m+2}	K_{x+m+1}	$l_{x+m+2} \cdot K_{x+m+2} \cdot v^{m+2}$	P_x	$l_{x+m+2} \cdot P_x \cdot v^{m+2}$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
$t_0+m+\mu$	$v^{m+\mu}$	$l_{x+m+\mu}$	$K_{x+m+\mu}$	$l_{x+m+\mu} \cdot K_{x+m+\mu} \cdot v^{m+\mu}$	P_x	$l_{x+m+\mu} \cdot P_x \cdot v^{m+\mu}$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
Kollektivsumme bezüglich Barwerte zum Bezugsjahr t_0+m				$l_{x+m} \cdot GA_{x+m}$ °)		$l_{x+m} \cdot P_x a_{x+m}$ °)

°) unnormierte Barwerte GA_{x+m}, $P_x a_{x+m}$ je versicherter Person [VP]

mit: Diskontierungsfaktor v, $v = \frac{1}{1+r}$ zum Rechnungszins r
Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende l_x
rechnungsmäßige unnormierte Kopfschäden $K_x = G \cdot k_x$ mit Grundkopfschaden G und normierten Kopfschäden k_x
kalkulatorisches Endalter x_ω

- Gemäß erweitertem Äquivalenzprinzip, Formel (1:1, p. 6) für das Jahr t_0+m+0: $l_{x+m} \cdot GA_{x+m} = l_{x+m} \cdot P_x a_{x+m} + l_{x+m} \cdot {}^{prosp}V_{x;x+m}$ ist mit $GA_{x+m} = G \cdot A_{x+m}$, $P_x a_{x+m} = P_x \cdot a_{x+m}$ (wie beim grundständigem Äquivalenzprinzip hergeleitet) unter Beachtung des kalkulatorischen Endalters x_ω demnach

$$l_{x+m} \cdot G \cdot A_{x+m} = l_{x+m} \cdot P_x \cdot a_{x+m} + l_{x+m} \cdot {}^{prosp}V_{x;x+m} \quad (m \geq 0,\ x+m \leq x_\omega),$$

dabei bezeichnet ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ diejenige unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung, die für Ursprünglich-x-Jährige nach m Jahren benötigt wird, um die restlichen zukünftigen Versicherungsleistungen – unter Beachtung des gesamten restlichen zukünftigen diskontierten Einnahmenvolumens – zu finanzieren. Die prospektive unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ ergibt sich somit zu

$${}^{prosp}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}.$$

■

1.2.2 Retrospektive Ermittlung der ungezillmerten tariflichen Alterungsrückstellung.

Retrospektive ungezillmerte Alterungsrückstellung.	(1:3)
$^{retro}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$	retrospektiv ermittelte ungezillmerte tarifliche Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

Definition und Berechnung.

- Die retrospektive ungezillmerte tarifliche Alterungsrückstellung $^{retro}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ gibt den Überschussbetrag aus dem gesamten vergangenem aufgezinsten Ausgabenvolumen bezüglich des erreichten Alter $x+m$ abzüglich des gesamten vergangenen aufgezinsten Einnahmenvolumens an Nettoprämien bezüglich des erreichten Alter $x+m$ an. Retrospektiv heißt dabei zukunftsbezogen, dabei bedeutet „vergangenen" ohne die Geldflüsse zum Alter $x+m$.

Herleitung.

- Die gesamte vorhandene tarifliche Alterungsrückstellung $l_{x+m} \cdot {}^{retro}V_{x;x+m}$ des Kollektivs nach m Jahren ergibt sich aus der Differenz des gesamten vergangenen aufgezinsten Leistungsvolumens abzüglich des gesamten vergangenen aufgezinsten Einnahmenvolumens, bezogen jeweils auf das erreichte Alter $x+m$.

			vergangene aufgezinste Versicherungsleistungen		vergangene aufgezinste Einnahmen	
Jahr	Aufzinsung °)	Anzahl VP	mittl. Leistung	aufgezinstes Leistungsvolumen	Einzelzahl.	aufgezinstes Zahlungsvolumen
$t_0{+}0$	$(1{+}r)^{m-0}$	l_{x+0}	K_{x+0}	$l_{x+0}{\cdot}K_{x+0}{\cdot}(1{+}r)^{m-0}$	P_x	$l_{x+0}{\cdot}P_x{\cdot}(1{+}r)^{m-0}$
$t_0{+}1$	$(1{+}r)^{m-1}$	l_{x+1}	K_{x+1}	$l_{x+1}{\cdot}K_{x+1}{\cdot}(1{+}r)^{m-1}$	P_x	$l_{x+1}{\cdot}P_x{\cdot}(1{+}r)^{m-1}$
$t_0{+}2$	$(1{+}r)^{m-2}$	l_{x+2}	K_{x+2}	$l_{x+2}{\cdot}K_{x+2}{\cdot}(1{+}r)^{m-2}$	P_x	$l_{x+2}{\cdot}P_x{\cdot}(1{+}r)^{m-2}$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
$t_0{+}\mu$	$(1{+}r)^{m-\mu}$	$l_{x+\mu}$	$K_{x+\mu}$	$l_{x+\mu}{\cdot}K_{x+\mu}{\cdot}(1{+}r)^{m-\mu}$	P_x	$l_{x+\mu}{\cdot}P_x{\cdot}(1{+}r)^{m-\mu}$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$
$t_0{+}m{-}1$	$(1{+}r)^{m-(m-1)}$	l_{x+m-1}	K_{x+m-1}	$l_{x+m-1}{\cdot}K_{x+m-1}{\cdot}(1{+}r)^{m-(m-1)}$	P_x	$l_{x+m-1}{\cdot}P_x{\cdot}(1{+}r)^{m-(m-1)}$
$t_0{+}m{-}0$	—	—	—	—	—	—
Kollektivsumme bezüglich Barwerte zum Bezugsjahr $t_0{+}m$				$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}{\cdot}K_{x+\mu}{\cdot}(1{+}r)^{m-\mu}$		$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}{\cdot}P_x{\cdot}(1{+}r)^{m-\mu}$
		l_{x+m}		${}^{retro}V_{x;x+m}$		

°) Anzahl der Aufzinsungsjahre vom Jahr $t_0+\mu$ zum Bezugsjahr t_0+m:
$t_0+m-(t_0+\mu)=m-\mu$

mit: Rechnungszins r
Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende l_x
rechnungsmäßige normierte Kopfschäden $K_x = G\cdot k_x$ mit Grundkopfschaden G und normierten Kopfschäden k_x

- Gemäß erweitertem Äquivalenzprinzip (Formel (1:1, p. 6)) ist demnach:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot K_{x+\mu}\cdot(1+r)^{m-\mu} + l_{x+m}\cdot {}^{retro}V_{x;x+m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot P_x\cdot(1+r)^{m-\mu}, \qquad (1:4)$$

dabei bezeichnet ${}^{retro}V_{x;x+m}$ diejenige unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung, die im Laufe der m Jahren nach Versicherungsbeginn zum Alter x angesammelt wurde.

- Ziel: Darstellung gemäß prospektiver Alterungsrückstellung gemäß Formel (1:3, p. 12)
- Gesamtes vergangenes aufgezinstes Leistungsvolumen:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot K_{x+\mu}\cdot(1+r)^{m-\mu}$$

  - mit $K_x = G\cdot k_x$:

$$= G\cdot\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu}\cdot k_{x+\mu}\cdot(1+r)^{m-\mu}$$

  - mit $O_x := D_x\cdot k_x$ und Erweiterung um $\frac{v^{x+\mu}}{v^{x+\mu}}$:

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot k_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu} \cdot \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

- mit $\frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu} = \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{1+r}} \right)^{m-\mu} \overset{v=\frac{1}{1+r}}{=} \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \left(\frac{1}{v} \right)^{m-\mu} = \frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot \frac{1}{v^{m-\mu}} = \frac{1}{v^{x+\mu+m-\mu}} = \frac{1}{v^{x+m}}$:

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} \underbrace{l_{x+\mu} \cdot k_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu}}_{=O_{x+\mu}} \cdot \underbrace{\frac{1}{v^{x+\mu}} \cdot (1+r)^{m-\mu}}_{=\frac{1}{v^{x+m}}}$$

$$= G \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} O_{x+\mu} \cdot \frac{1}{v^{x+m}}$$

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} O_{x+\mu}$$

- Umparametrisierung Summe $x+\mu \mid 0 \le \mu \le m\text{-}1 \to \xi \mid x \le \xi \le x+m\text{-}1$:

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_{\xi}$$

- Erweiterung der Summation bis x_{ω}:

$$= G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \left(\underbrace{\sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} O_{\xi}}_{U_x} - \underbrace{\sum_{\xi=x+m}^{x_{\omega}} O_{\xi}}_{U_{x+m}} \right)$$

- mit $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} O_{\xi}$ für die Summe der diskontierten Leistungen:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu} = G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot (U_x - U_{x+m}). \tag{1:5}$$

- Gesamtes vergangenes aufgezinstes Prämienvolumen:

$$\sum_{\mu=0}^{x+m-1} l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu}$$
$$= P_x \cdot \sum_{\mu=0}^{x+m-1} l_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

  - Analog zum gesamtem vergangenen aufgezinsten Leistungsvolumen für die Prämiensumme:

$$\sum_{\mu=0}^{x+m-1} l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu} = P_x \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot (N_x - N_{x+m}). \tag{1:6}$$

- Mit der Gleichheit auf Grund des Äquivalenzprinzips gemäß Formel (1:4, p. 13) und den Formeln (1:5, p. 14) und (1:6, p. 14):

$$\underbrace{G \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \left(U_x - U_{x+m}\right)}_{\text{Summe über alle } l_{x+m}} + \underbrace{l_{x+m} \cdot {}^{retro}V_{x;x+m}}_{\text{Summe über alle } l_{x+m}} = \underbrace{P_x \cdot \frac{1}{v^{x+m}} \cdot \left(N_x - N_{x+m}\right)}_{\text{Summe über alle } l_{x+m}}$$

$$\Rightarrow \; {}^{retro}V_{x;x+m} = P_x \cdot \frac{1}{l_{x+m} \cdot v^{x+m}} \cdot \left(N_x - N_{x+m}\right) - G \cdot \frac{1}{l_{x+m} \cdot v^{x+m}} \cdot \left(U_x - U_{x+m}\right)$$

- mit $D_x := v^x \cdot l_x$

$${}^{retro}V_{x;x+m} = \underbrace{\underbrace{P_x}_{=G \cdot \frac{U_x}{N_x}} \cdot \frac{N_x}{D_{x+m}}}_{=G \cdot \frac{U_x}{D_{x+m}}} - P_x \cdot \underbrace{\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}}_{=a_{x+m}} - G \cdot \frac{U_x}{D_{x+m}} + G \cdot \underbrace{\frac{U_{x+m}}{D_{x+m}}}_{=A_{x+m}}$$

$${}^{retro}V_{x;x+m} = \underbrace{\frac{G \cdot U_x - G \cdot U_x}{D_{x+m}}}_{=0} - P_x \cdot a_{x+m} + G \cdot A_{x+m}$$

$${}^{retro}V_{x;x+m} = 0 + G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m} \,.$$

- Die prospektive unnormierte ungezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ ergibt sich demnach zu

$${}^{retro}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m} \,.$$ ■

1.2.3 Darstellung der ungezillmerten Alterungsrückstellung.

Ungezillmerte Alterungsrückstellung. (1:7)

normiert *unnormiert*

$$v_{x;x+m} = A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m} \qquad V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$
$$v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - p_x\right) \cdot a_{x+m} \qquad V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - P_x\right) \cdot a_{x+m}$$

ungezillmerte Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

$$v_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot b_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$$v_{x;x+m} = \left[\left(b_{x+m} - b_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m} \cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x} \cdot b_x\right) - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$$V_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot B_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot B_x - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$$V_{x;x+m} = \left[\left(B_{x+m} - B_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m} \cdot B_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x} \cdot B_x\right) - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$$v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{v_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{v_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k}}$$

$$V_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{V_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{V_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k}}$$

Gleichheit von prospektiv und retrospektiv ermittelter ungezillmerten Alterungsrückstellung.

- Gemäß Formeln (1:2, p. 10):

  $${}^{prosp}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

  und (1:3, p. 12):

  $${}^{retro}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

  gilt die Übereinstimmung von prospektiv und retrospektiv ermittelter ungezillmerter Alterungsrückstellung ${}^{prosp}V_{x;x+m}$ resp. ${}^{retro}V_{x;x+m}$, so dass sich allgemein die Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ für Versicherte zum Eintrittsalter x nach m Jahren, d.h. zum erreichten Alter $x+m$ gemäß

  $$V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

  bemisst. ■

Darstellungen.

- Die normierte ungezillmerte Alterungsrückstellung $v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ lässt sich als Differenz aus Leistungsbarwert A_{x+m} zum erreichten Alter $x+m$ abzüglich des normierten Prämienbarwerts $p_x \cdot a_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ bezüglich der normierten Nettoprämie p_x zum Eintrittsalter x darstellen:

  $$v_{x;x+m} = A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m}.$$

- Weiter ergibt sich die Darstellung der normierten ungezillmerten Alterungsrückstellung $v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ als Barwert der Differenz zwischen der normierten Nettoprämie p_{x+m} zum erreichtem Alter $x+m$ abzüglich der normierten Nettoprämie p_x zum Eintrittsalter x:

  $$v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - p_x\right) \cdot a_{x+m}.$$

- Weiter ergibt sich eine Darstellung der normierten ungezillmerten Alterungsrückstellung $v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ bezüglich ungezillmerter Bruttoprämie $b_{x(+m)}$ als Barwert der Differenz zwischen der ungezillmerter Bruttoprämie b_{x+m} zum erreichtem Alter $x+m$ abzüglich der ungezillmerter Bruttoprämie b_x zum Eintrittsalter x – jeweils abzüglich von Zuschlägen:

  $$v_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot b_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m},$$

  für $\Delta_{j/s} = \Delta_{j/s\,|\,x+m} = \Delta_{j/s\,|\,x}$ und $\gamma_{j/s\,|\,x+m} = \gamma_{j/s\,|\,x}$ ist speziell $v_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot b_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot b_x\right] \cdot a_{x+m}$.

Herleitung.

- Mit der Nettoprämienformel $p_x = \frac{A_x}{a_x}$, d.h. $\begin{cases} A_{x+m} &= p_{x+m} \cdot a_{x+m} \\ G \cdot A_{x+m} &= P_{x+m} \cdot a_{x+m} \end{cases}$ folgt aus $\begin{cases} v_{x;x+m} &= A_{x+m} - p_x \cdot a_{x+m} \\ V_{x;x+m} &= G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m} \end{cases}$:

  $$\begin{cases} v_{x;x+m} &= \left(p_{x+m} - p_x\right) \cdot a_{x+m} \\ V_{x;x+m} &= \left(P_{x+m} - P_x\right) \cdot a_{x+m} \end{cases}.$$ □

- Mit der Beitragsformel $B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$ für ungezillmerte Jahresbruttoprämien, d.h. $\begin{cases} P_x &= \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot B_x - \Gamma_{j/s\,|\,x} \\ P_{x+m} &= \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot B_{x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x+m} \end{cases}$ mit $\Delta_{j/s\,|\,x} = \begin{cases} \Delta_j & \text{für } x < x_s \\ \Delta_s & \text{für } x \geq x_s \end{cases}$, $\Gamma_{j/s\,|\,x} = \begin{cases} \Gamma_j & \text{für } x < x_s \\ \Gamma_s & \text{für } x \geq x_s \end{cases}$ folgt aus $V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - P_x\right) \cdot a_{x+m}$:

$$\Rightarrow V_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot B_{x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot B_x + \Gamma_{j/s\,|\,x}\right]\cdot a_{x+m}$$

$$V_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot B_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot B_x - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

$$\Rightarrow v_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot b_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

$$v_{x;x+m} = \left[\left(b_{x+m} - b_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m}\cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x}\cdot b_x\right) - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

innerhalb der Altersintervalle j resp. s sodann jeweils

- $V_{x;x+m\,|\,j/s} = \left(B_{x+m} - B_x\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten ungezillmerten Jahresbruttoprämien B_ξ
- $V_{x;x+m\,|\,j/s} = 12\cdot\left(\tilde{B}_{x+m} - \tilde{B}_x\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten ungezillmerten Monatsbruttoprämien $\tilde{B}_\xi$ ($\tilde{B}_\xi = \frac{1}{12}\cdot B_\xi$)
- $v_{x;x+m\,|\,j/s} = \left(b_{x+m} - b_x\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der normierten ungezillmerten Jahresbruttoprämien b_ξ ($b_\xi = \frac{1}{G}\cdot B_\xi$)
- $v_{x;x+m\,|\,j/s} = 12\cdot\left(\tilde{b}_{x+m} - \tilde{b}_x\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten ungezillmerten Monatsbruttoprämien $\tilde{b}_\xi$ ($\tilde{b}_\xi = \frac{1}{G}\cdot\tilde{B}_\xi$). ■

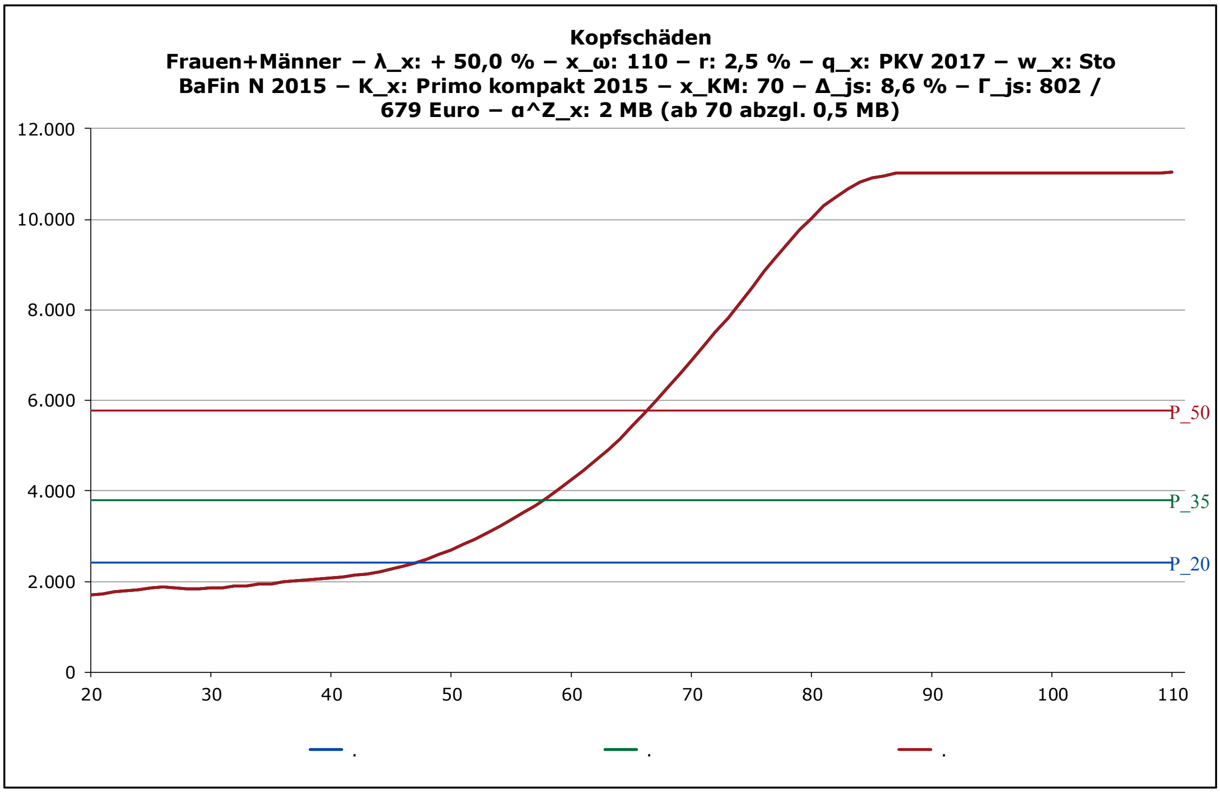
Zahlenbeispiel.

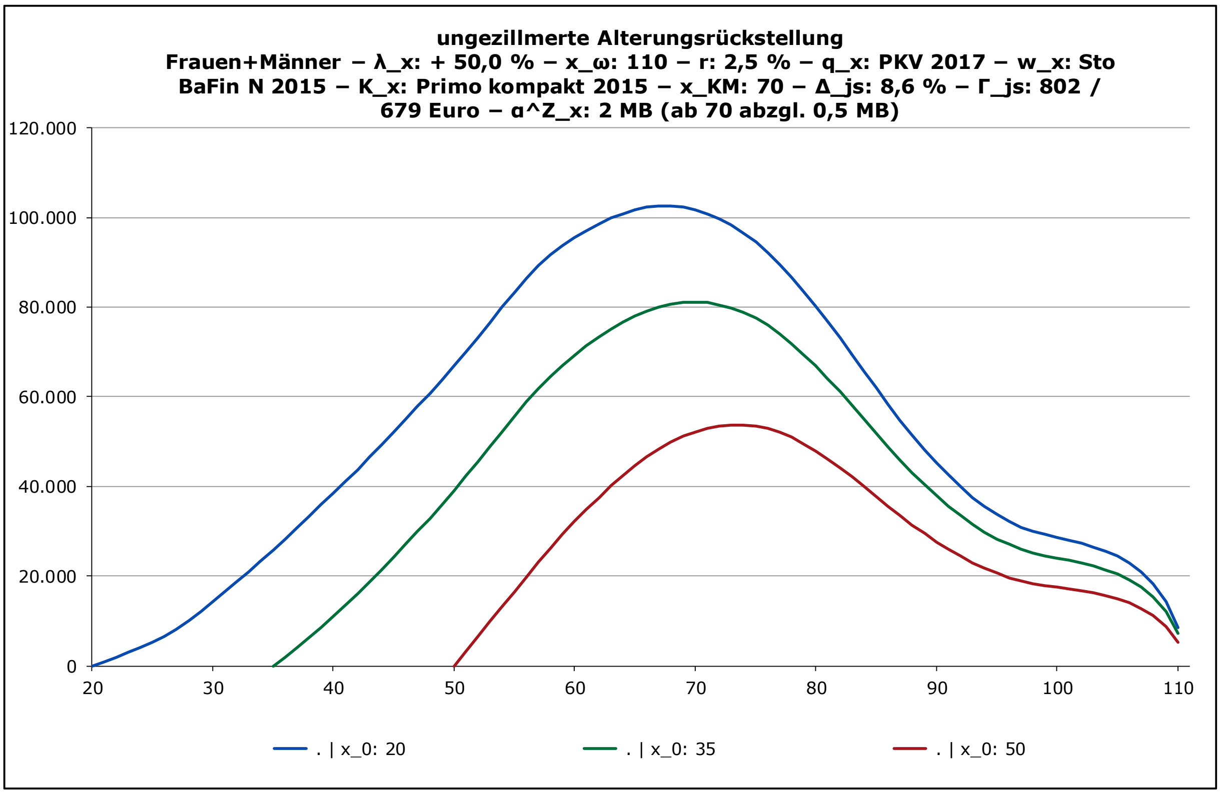
			P_x	18,48	21,54	26,86	34,98	50,00
GA_x+m	a_x+m	V_x;x+m	x	1	2	3	4	5
		x+m						
70,04	3,79	1		0,00	.	.	.	.
67,63	3,14	2		9,60	-0,01	.	.	.
66,35	2,47	3		20,70	13,15	0,01	.	.
58,41	1,67	4		27,55	22,44	13,55	-0,01	.
50,00	1,00	5		31,52	28,46	23,14	15,02	0,00

In der Diagonalen müssten algebraisch Nullen errechnet werden, dazu nachstehende Formel (1:8, p. 20), wovon allerdings die numerischen Ergebnisse auf Grund von Rundungen in den Zwischenschritten abweichen können.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 20, 35 resp. 50.


Kopfschäden
Frauen+Männer – λ_x: + 50,0 % – x_ω: 110 – r: 2,5 % – q_x: PKV 2017 – w_x: Sto BaFin N 2015 – K_x: Primo kompakt 2015 – x_KM: 70 – Δ_js: 8,6 % – Γ_js: 802 / 679 Euro – α^Z_x: 2 MB (ab 70 abzgl. 0,5 MB)
12.000
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
0
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
P_50
P_35
P_20
.
.
.


ungezillmerte Alterungsrückstellung
Frauen+Männer – λ_x: + 50,0 % – x_ω: 110 – r: 2,5 % – q_x: PKV 2017 – w_x: Sto BaFin N 2015 – K_x: Primo kompakt 2015 – x_KM: 70 – Δ_js: 8,6 % – Γ_js: 802 / 679 Euro – α^Z_x: 2 MB (ab 70 abzgl. 0,5 MB)
120.000
100.000
80.000
60.000
40.000
20.000
0
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
. | x_0: 20
. | x_0: 35
. | x_0: 50

Bemerkung.

- Die ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x+0}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m=0$ beträgt Null, d.h. für $m=0$ ist $V_{x;x+0} = (P_{x+0} - P_x) \cdot a_{x+0} = 0 \cdot a_{x+0} = 0$:

  $$V_{x;x+0} = 0. \tag{1:8}$$

- Die ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x_\omega}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter x_ω beträgt $(K_{x_\omega} - P_x)$, d.h. es ist $V_{x;x_\omega} = G \cdot A_{x_\omega} - P_x \cdot a_{x_\omega} = G \cdot k_{x_\omega} - P_x \cdot 1 = K_{x_\omega} - P_x$

  $$V_{x;x_\omega} = K_{x_\omega} - P_x. \tag{1:9}$$

- Sei das Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ ab dem Alter x_K konstant, d.h. $\forall \xi \mid \xi \ge x_K : k_\xi = k_{x_K}$, sodann wird für das Eintrittsalter x_K im weiteren Verlauf keine tarifliche Alterungsrückstellung aufgebaut, d.h. $\forall \mu \mid \mu \ge 0 : V_{x_K;x_K+\mu} = 0$.

  - Begründung: Da für diesen Altersbereich die Nettoprämie konstant ist, d.h. $\forall \mu \mid \mu \ge 0 : p_{x_K+\mu} = k_{x_K}$ gilt mit der Darstellung $v_{x;x+\mu} = (p_{x+\mu} - p_x) \cdot a_{x+\mu}$ gemäß Formel (1:7, p. 16) für die Alterungsrückstellung: $v_{x_K;x_K+\mu} = (k_{x_K} - k_{x_K}) \cdot a_{x_K+\mu} = 0$. ■

- Die ungezillmerte Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ ist bei monoton steigendem Profil und nichtnegativem Rechnungszins stets positiv.

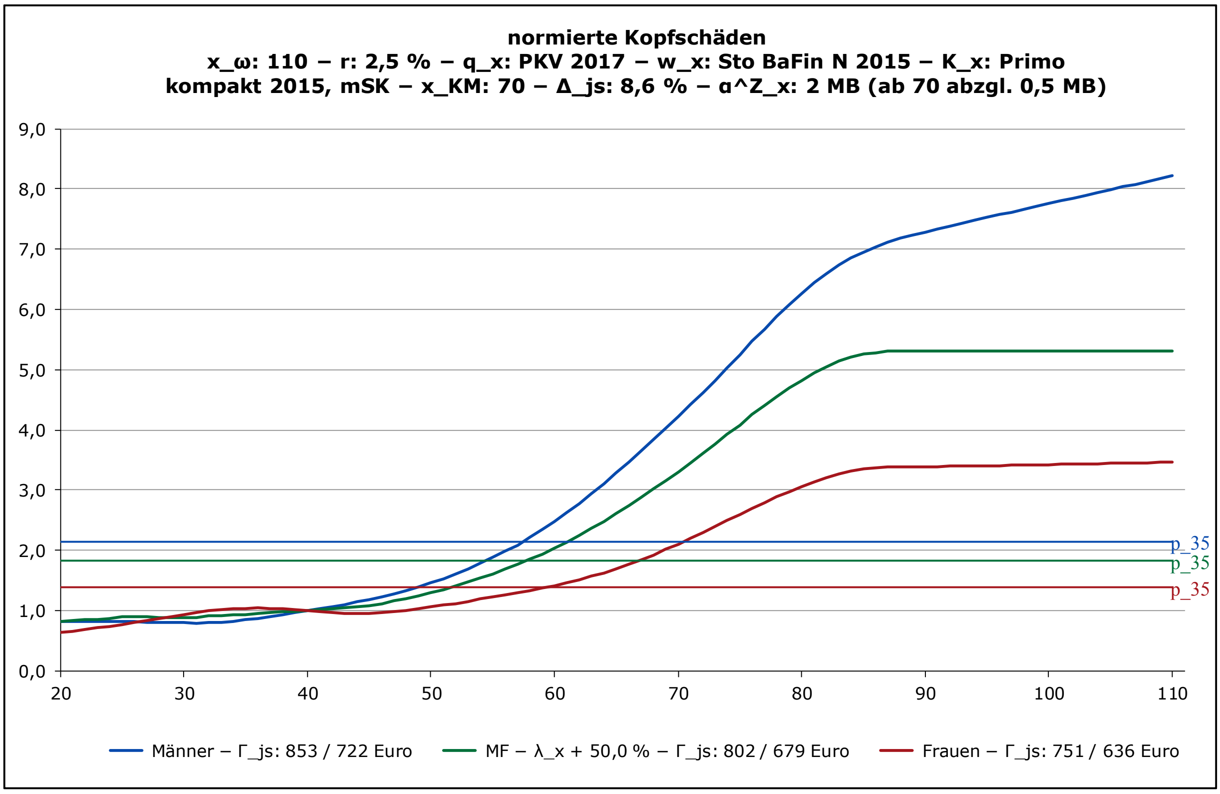
  - Begründung: Ist das Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ monoton steigend, d.h. $\forall x, x<x_\omega : k_{x+1} \ge k_x$ und $v \ge 0$, so ist die Folge der normierten Nettoprämien $\{p_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ monoton steigend: $\forall x, x<x_\omega : p_{x+1} \ge p_x$. Mit $v_{x;x+m} = (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:7, p. 16) ist somit $\forall x, x<x_\omega : v_{x;x+m} \ge 0$.

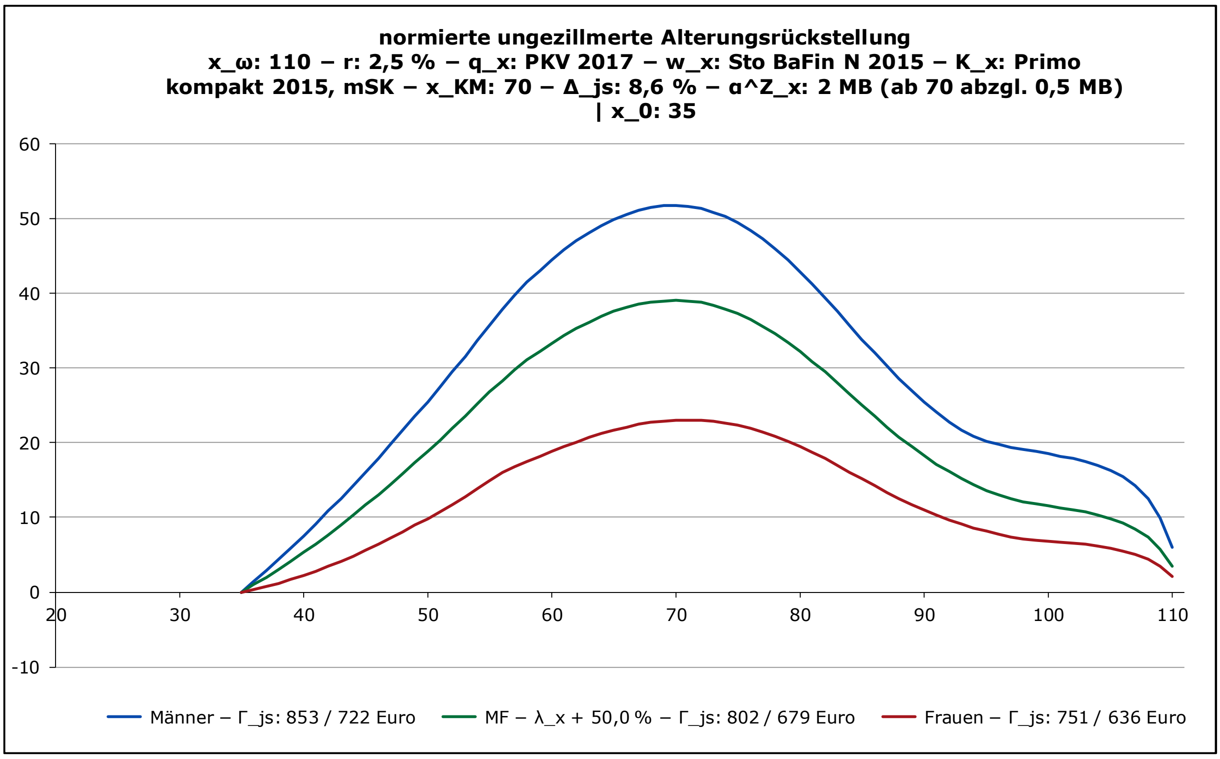
Bemerkung.

- I.d.R. nimmt mit der Profilsteilheit (d.h. mit zunehmender Ausgeprägtheit der Altersabhängigkeit der Kopfschäden) der Aufbau der Alterungsrückstellung zu, da in jüngeren Jahren aus der Prämie größere Teile in die Alterungsrückstellung fließen.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz (mSK: Leistungen wegen Schwangerschaft und Mutterschaft bei Frauen), 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35.





Aufteilung der Alterungsrückstellung in zwei Bereiche.

- Die normierte ungezillmerte Alterungsrückstellung $v_{x\,;\,x+m+k}$ zum erreichtem Alter $x+m+k$ ergibt sich aus den ungezillmerten Alterungsrückstellungen $v_{x\,;\,x+m}$ und $v_{x+m\,;\,x+m+k}$ zum Grenzalter $x+m$ durch:

$$v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{v_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Rabattauszahlung,}\\ \text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{v_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k}} .$$

- Begründung: an Hand von $v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - p_x\right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:7, p. 16) ergeben sich die Darstellungen

$$\begin{cases} v_{x\,;\,x+m+k} &= \left(p_{x+m+k} - p_x\right) \cdot a_{x+m+k} \\ v_{x\,;\,x+m} &= \left(p_{x+m} - p_x\right) \cdot a_{x+m} \\ v_{x+m\,;\,x+m+k} &= \left(p_{x+m+k} - p_{x+m}\right) \cdot a_{x+m+k} \end{cases} .$$

- Für $v_{x\,;\,x+m+k} = \left(p_{x+m+k} - p_x\right) \cdot a_{x+m+k}$ ist

$$v_{x\,;\,x+m+k} = p_{x+m+k} \cdot a_{x+m+k} - p_x \cdot a_{x+m+k}$$

- Ergänzung um $\left(- p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} + p_{x+m} \cdot a_{x+m+k}\right)$:

$$v_{x\,;\,x+m+k} = p_{x+m+k} \cdot a_{x+m+k} - p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} + p_{x+m} \cdot a_{x+m+k} - p_x \cdot a_{x+m+k}$$

$$v_{x\,;\,x+m+k} = \left(p_{x+m+k} - p_{x+m}\right) \cdot a_{x+m+k} + \left(p_{x+m} - p_x\right) \cdot a_{x+m+k}$$

- Ergänzung des zweiten Terms um $\frac{a_{x+m}}{a_{x+m}}$

$$v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{\left(p_{x+m+k} - p_{x+m}\right) \cdot a_{x+m+k}}_{=v_{x+m;x+m+k}} + \underbrace{\left(p_{x+m} - p_x\right) \cdot a_{x+m}}_{=v_{x;x+m}} \cdot \frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}$$

$$v_{x\,;\,x+m+k} = v_{x;x+m} \cdot \frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}} + v_{x+m\,;\,x+m+k} .$$

- Unnormierte Darstellung mit $V_{\xi;\mu} = G \cdot v_{\xi;\mu}$. ■

1.2.4 Fortschreibung und Zuführung zur ungezillmerten Alterungsrückstellung und Aufteilung der Nettoprämie.

Fortschreibung der ungezillmerten Alterungsrückstellung. (1:10)

$$V_{x;x+m+1} = \Big[\underbrace{V_{x;x+m}}_{\text{vorh. AR}} + \underbrace{\left(P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{Sparprämie}} \Big] \cdot \underbrace{\left(1 + r\right)}_{\text{Verzinsung}} \cdot \underbrace{\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}}_{\substack{\text{Aufteilung auf}\\ \text{die Verbliebenen}}}$$

$$V_{x;x+m+1} = \Big[\underbrace{V_{x;x+m}}_{\text{vorh. AR}} + \underbrace{\left(P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{Sparprämie}} \Big] \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}}$$

Fortschreibung der Alterungsrückstellung $V_{x:x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ um ein Jahr

Zuführung zur ungezillmerten Alterungsrückstellung.

$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = \underbrace{(P_x - K_{x+m})\cdot(1+r)}_{\text{verzinste Sparprämie}} + \underbrace{V_{x;x+m}\cdot r}_{\text{Zins auf vorhande. AR}} + \underbrace{s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte AR}}$$

Ein-Jahres-Zuführung zur Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichten Alter $x+m+1$

Aufteilung der (ungezillmerten) Nettoprämie.

$$P_x = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} + \underbrace{v\cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}}_{\text{eigener Anteil an Sparbeitrag}} - \underbrace{s_{x+m}\cdot v\cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte AR}}$$

Aufteilung der (unnormierten) ungezillmerten Jahresbruttoprämie P_x zum Alter x nach m Jahren zum erreichten Alter $x+m$

Bemerkung.

- In diesem Abschnitt wird der kollektive Gemeinschaftsanspruch auf die Alterungsrückstellung zum besseren Verständnis der Fortschreibung, Zuführung und Aufteilung teilweise ignoriert, korrekterweise sollten die Darstellungen oftmals mit den Rechnungsmäßig-Lebenden l_x versehen werden.
- Die Sparprämie $P_x - K_{x+m}$ ist i.d.R. in den anfänglichen Altern x_0+a positiv und wird in späteren Jahren $x_\omega - s$ negativ.

Einjährige Fortschreibung der Alterungsrückstellung.

Die Alterungsrückstellung $V_{x;x+m+1}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m+1$ ergibt sich aus der vorjährigen Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Alter $x+m$ zu

$$V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})\right]\cdot(1+r)\cdot\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}} = \left[V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})\right]\cdot\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}},$$

d.h. die einjährige Fortschreibung der Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zu $V_{x;x+m+1}$ erfolgt durch:

- Addition von vorhandener Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ und Sparprämie $P_x - K_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$: $V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})$;

- Darstellung mittels Rechnungszins r und Rechnungsmäßig-Lebenden l_x :
  - Verzinsung dieser Summe mit dem Aufzinsungsfaktor $1+r$: $\left[V_{x;x+m}+\left(P_x-K_{x+m}\right)\right]\cdot(1+r)$,
  - Aufteilung dieser verzinsten Summe unter den Dann-Rechnungsmäßig-Verbliebenen l_{x+m+1} : $\left[V_{x;x+m}+\left(P_x-K_{x+m}\right)\right]\cdot(1+r)\cdot\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}$;
- Darstellung mittels diskontierten Lebenden D_ξ :
  - resp. Verzinsung und Vererbung $\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$ dieser Summe aus vorhandener Alterungsrückstellung und Sparprämie: $\left[V_{x;x+m}+\left(P_x-K_{x+m}\right)\right]\cdot\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$.

Herleitung.

- Vorbereitung: Mit Ausscheideordnung $l_{x+1}=l_x\cdot(1-s_x)$ und Kommutationswerten $D_x:=l_x\cdot v^x$, $N_x:=\sum_{\xi=x}^{x_\omega}D_\xi$, $O_x:=l_x\cdot v^x\cdot k_x=D_x\cdot k_x$, $U_x:=\sum_{\xi=x}^{x_\omega}O_\xi$ und $a_x=\frac{N_x}{D_x}$ und $A_x=\frac{U_x}{D_x}$ ist:
  - $a_{x+m}=\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}=\frac{\sum_{\xi=x+m}^{x_\omega}D_\xi}{D_{x+m}}=\frac{D_{x+m}+\sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega}D_\xi}{D_{x+m}}=$

$$\frac{D_{x+m}}{D_{x+m}}+\frac{\sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega}D_\xi}{D_{x+m}}=1+\frac{N_{x+m+1}}{D_{x+m}}=1+\frac{N_{x+m+1}\cdot D_{x+m+1}}{D_{x+m+1}\cdot D_{x+m}}=1+a_{x+m+1}\cdot\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}$$

$$a_{x+m}=1+a_{x+m+1}\cdot\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}. \qquad (1:11)$$

  - $G\cdot A_{x+m}=G\cdot\frac{U_{x+m}}{D_{x+m}}=G\cdot\frac{\sum_{\xi=x+m}^{x_\omega}O_\xi}{D_{x+m}}=G\cdot\frac{O_{x+m}+\sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega}O_\xi}{D_{x+m}}=$

$$G\cdot\frac{O_{x+m}}{D_{x+m}}+G\cdot\frac{\sum_{\xi=x+m+1}^{x_\omega}O_\xi}{D_{x+m}}=G\cdot\frac{D_{x+m}\cdot k_{x+m}}{D_{x+m}}+G\cdot\frac{U_{x+m+1}}{D_{x+m}}=$$

$$G\cdot k_{x+m}+G\cdot\frac{U_{x+m+1}\cdot D_{x+m+1}}{D_{x+m+1}\cdot D_{x+m}}=K_{x+m}+G\cdot A_{x+m+1}\cdot\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}$$

$$G\cdot A_{x+m}=K_{x+m}+G\cdot A_{x+m+1}\cdot\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}. \qquad (1:12)$$

  - $D_{x+m}=l_{x+m}\cdot v^{x+m}$, Erweiterung um $\frac{v\cdot(1-s_{x+m})}{v\cdot(1-s_{x+m})}$:

$$D_{x+m}=\frac{l_{x+m}\cdot v^{x+m}\cdot v\cdot(1-s_{x+m})}{v\cdot(1-s_{x+m})}=\frac{v^{x+m+1}\cdot l_{x+m+1}}{v\cdot(1-s_{x+m})}=\frac{D_{x+m+1}}{v\cdot(1-s_{x+m})}$$

$$\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} = v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right) \ . \qquad (1{:}13)$$

- Mit Formel (1:7, p. 16) unter Verwendung der Formeln (1:11, p. 24), (1:12, p. 24) und (1:13, p. 25) und $A_{x+m+1} = \frac{U_{x+m+1}}{D_{x+m+1}}$ und $a_{x+m+1} = \frac{N_{x+m+1}}{D_{x+m+1}}$ ist:

$$\begin{aligned}
V_{x;x+m} &= G \cdot A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m} \\
&= K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} - P_x \cdot \left(1 + a_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}\right) \\
&= K_{x+m} - P_x + \underbrace{\left(G \cdot A_{x+m+1} - P_x \cdot a_{x+m+1}\right)}_{=V_{x;x+m+1}} \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}}_{=v \cdot (1-s_{x+m})} \\
&= K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \underbrace{v}_{=\frac{1}{1+r}} \cdot \left(1 - s_{x+m}\right)
\end{aligned}$$

$$V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \tfrac{1}{1+r} \cdot \left(1 - s_{x+m}\right). \qquad (1{:}14)$$

- Darstellung der Alterungsrückstellung $V_{x;x+m+1}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m+1$ an Hand der Vorjahresalterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Alter $x+m$:
  - Mit $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \left(1 - s_{x+m}\right)$ gemäß Formel (1:14, p. 25) ist durch Umstellung der Formel:

    $$V_{x;x+m+1} \cdot \tfrac{1}{1+r} \cdot \left(1 - s_{x+m}\right) = V_{x;x+m} + P_x - K_{x+m}$$

    $$\Rightarrow V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot \left(1 + r\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - s_{x+m}\right)}$$

  - Erweiterung des Bruchs mit l_{x+m}:

    $$V_{x;x+m+1} = \left[V_{x;x+m} + \left(P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot \left(1 + r\right) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m} \cdot \left(1 - s_{x+m}\right)}$$

  - AR-Fortschreibung (Darstellung mit Rechnungszins r und Rechnungsmäßig-Lebenden l_ξ) – dazu Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende nach Ausscheideordnung gemäß $l_{x+m+1} = l_{x+m} \cdot \left(1 - s_{x+m}\right)$:

    $$V_{x;x+m+1} = \Big[\underbrace{V_{x;x+m}}_{\text{vorhandene AR}} + \underbrace{\left(P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{Sparprämie}} \Big] \cdot \underbrace{\left(1 + r\right)}_{\text{Verzinsung}} \cdot \underbrace{\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}}_{\text{Aufteilung auf die Verbliebenen}} \ . \qquad \square$$

  - Mit $1 + r = \frac{1}{\frac{1}{1+r}} = \frac{1}{v} = \frac{v^\xi}{v \cdot v^\xi} = \frac{v^\xi}{v^{\xi+1}}$ ist $\frac{D_\xi}{D_{\xi+1}} = \frac{l_\xi \cdot v^\xi}{l_{\xi+1} \cdot v^{\xi+1}} = \frac{l_\xi}{l_{\xi+1}} \cdot \left(1 + r\right)$, also: $\left(1 + r\right) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}} = \frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$, d.h.

- AR-Fortschreibung (Darstellung mit diskontierten Lebende D_ξ)

$$V_{x;x+m+1} = \Big[\underbrace{V_{x;x+m}}_{\text{vorhandene AR}} + \underbrace{\left(P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{Sparprämie}} \Big] \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}}_{\text{Verzinsung und Vererbung}} .$$ □■

Zahlenbeispiel.

x = 1			P_1	r				v			
			18,48	2,5%				0,9756			
x+m+1	V_ x;x+m	K_x+m+1	P_x - K_x+m	1+r	l_x+m+1	l_x+m / l_x+m+1	V_ x;x+m+1	v^x	D_x+m+1	D_x+m / D_x+m+1	V_ x;x+m+1
1	.	10,00	.	.	100	.	0,00	0,9756	97,56	.	0,00
2	0,00	10,00	8,48	1,025	91	1,0989	9,55	0,9518	86,61	1,1264	9,55
3	9,55	15,00	8,48	1,025	81	1,1235	20,76	0,9286	75,22	1,1514	20,76
4	20,76	25,00	3,48	1,025	73	1,1096	27,57	0,9059	66,13	1,1375	27,57
5	27,57	50,00	-6,52	1,025	50	1,4600	31,50	0,8838	44,19	1,4965	31,50
Abweichungen auf Grund von Rundungen (algebraische Gleichheit)											

Komponenten der Zuführung zur Alterungsrückstellung.

Die Ein-Jahres-Zuführung $V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$,

$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = \left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\left(1+r\right) + V_{x;x+m}\cdot r + s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1}$$

zur Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichten Alter $x+m+1$ setzt sich zusammen aus:

- der verzinsten Sparprämie $\left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\left(1+r\right)$ zum Alter $x+m$ (vorschüssig);
- dem Zins $V_{x;x+m}\cdot r$ auf die zu Jahresbeginn vorhandene Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$;
- der sogenannten Vererbung: d.h. dem Anteil an der zu Jahresende frei werdenden Alterungsrückstellung $s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1}$ auf Grund von Ausscheiden aus dem Kollektiv.

Herleitung.

- Aus $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1}\cdot\frac{1}{1+r}\cdot\left(1 - s_{x+m}\right)$ gemäß Formel (1:14, p. 25) folgt durch Umstellung der Formel:

$$V_{x;x+m+1}\cdot\left(1-s_{x+m}\right)\cdot\tfrac{1}{1+r} = V_{x;x+m} + P_x - K_{x+m}$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} - s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m}\cdot\left(1+r\right) + \left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\left(1+r\right)$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m}\cdot\left(1+r\right) + \left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\left(1+r\right) + s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1}$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} + V_{x;x+m}\cdot r + \left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\left(1+r\right) + s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1}$$

$\Rightarrow$ Komponenten der AR-Zuführung

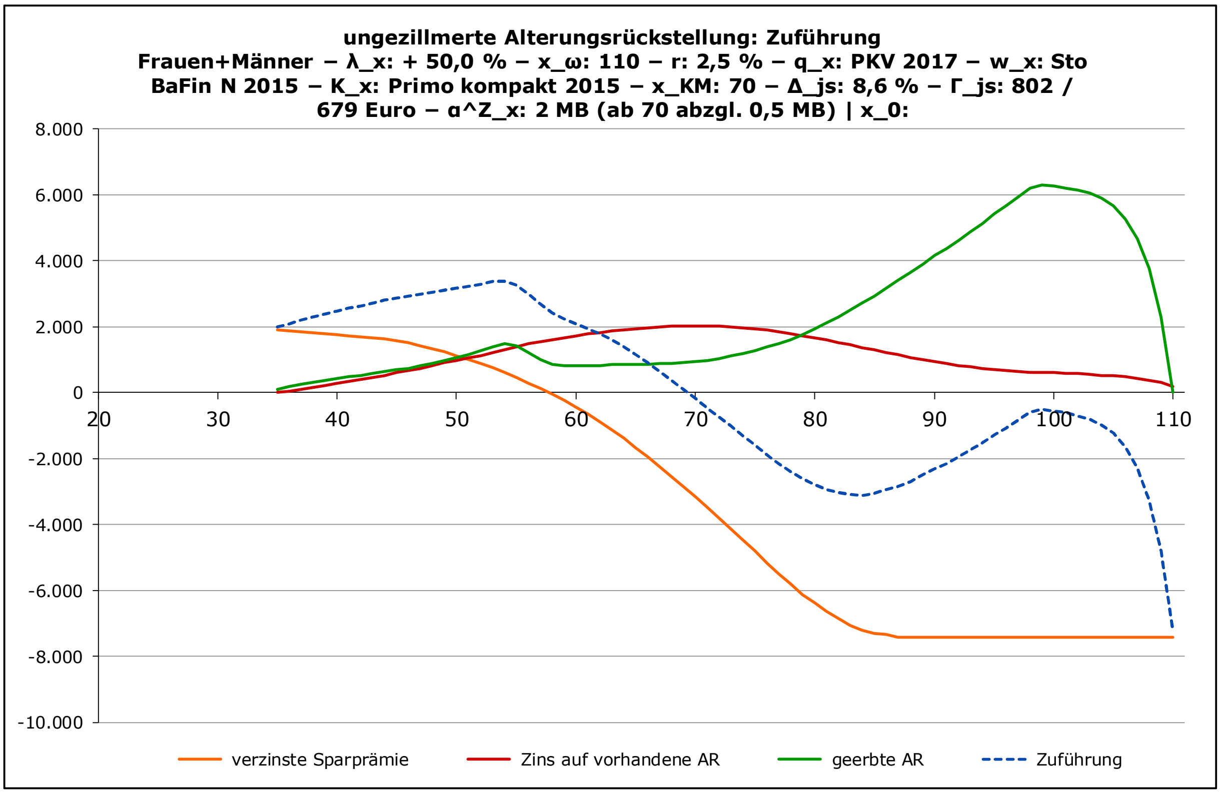
$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = \underbrace{\left(P_x - K_{x+m}\right)\cdot\left(1+r\right)}_{\text{verzinste Sparprämie}} + \underbrace{V_{x;x+m}\cdot r}_{\text{Zins auf vorhandene AR}} + \underbrace{s_{x+m}\cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte AR}}. \qquad \blacksquare$$

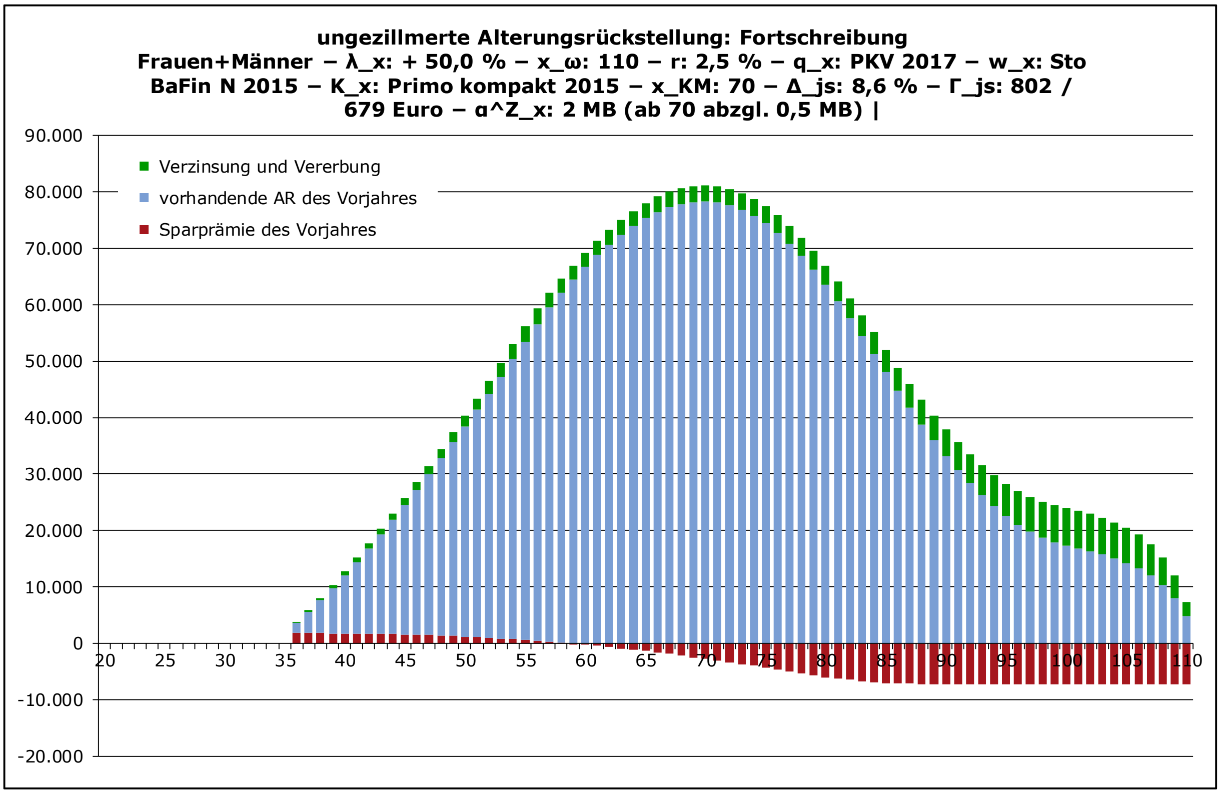
Zahlenbeispiel.

x = 1		P_1 18,48	r 2,5%								
x+m+1	K_x+m+1	P_x - K_x+m	1+r	(P_x - K_x+m) * (1+r)	V_ x;x+m	r	V_x;x+m * r	s_ x+m+1	V_ x;x+m+1	s_x+m+1 * V_x;x+m+1	Summe
1	10,00	.	.	.	.	.	.	0,09	0,00	.	0,00
2	10,00	8,48	1,025	8,69	0,00	2,5%	0,00	0,11	9,55	0,86	9,55
3	15,00	8,48	1,025	8,69	9,55	2,5%	0,24	0,10	20,76	2,28	11,21
4	25,00	3,48	1,025	3,57	20,76	2,5%	0,52	0,32	27,57	2,76	6,85
5	50,00	-6,52	1,025	-6,68	27,57	2,5%	0,69	1,00	31,50	10,08	4,09
Abweichungen auf Grund von Rundungen (algebraische Gleichheit)											

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35.





Bemerkung: Bei negativer Sparprämie wird die vorhandene AR an deren negativem Fußpunkt aufgesetzt. Ab Mitte 80 ist das Profil quasi konstant, so dass sodann auch die Sparprämie quasi konstant ist.

Aufteilung der Nettoprämie.

Die (unnormierte) ungezillmerte Jahresbruttoprämie P_x,

$$P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$$

zum Alter x setzt sich nach m Jahren zum erreichten Alter $x+m$ zusammen aus:

- dem Risikoanteil K_{x+m} zur Deckung des aktuellen Kopfschadens;
- dem eigenen Anteil an dem Sparbeitrag $v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$ für die Zuführung zur Alterungsrückstellung;
- abzüglich des durch Vererbung im m-ten Versicherungsjahr frei werdenden Anteils $s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$ der Alterungsrückstellung – dabei ist auf die einjährige Diskontierung von $V_{x;x+m+1}$ zu achten.

Herleitung.

- Aus $V_{x;x+m} = K_{x+m} - P_x + V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \left(1 - s_{x+m}\right)$ gemäß Formel (1:14, p. 25) folgt mit $\frac{1}{1+r} = v$, Aufteilung der Nettoprämie P_x in Komponenten:

$$P_x = K_{x+m} + V_{x;x+m+1} \cdot v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right) - V_{x;x+m}$$

$$\Rightarrow P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$$

$\Rightarrow$ Aufteilung der Nettoprämie

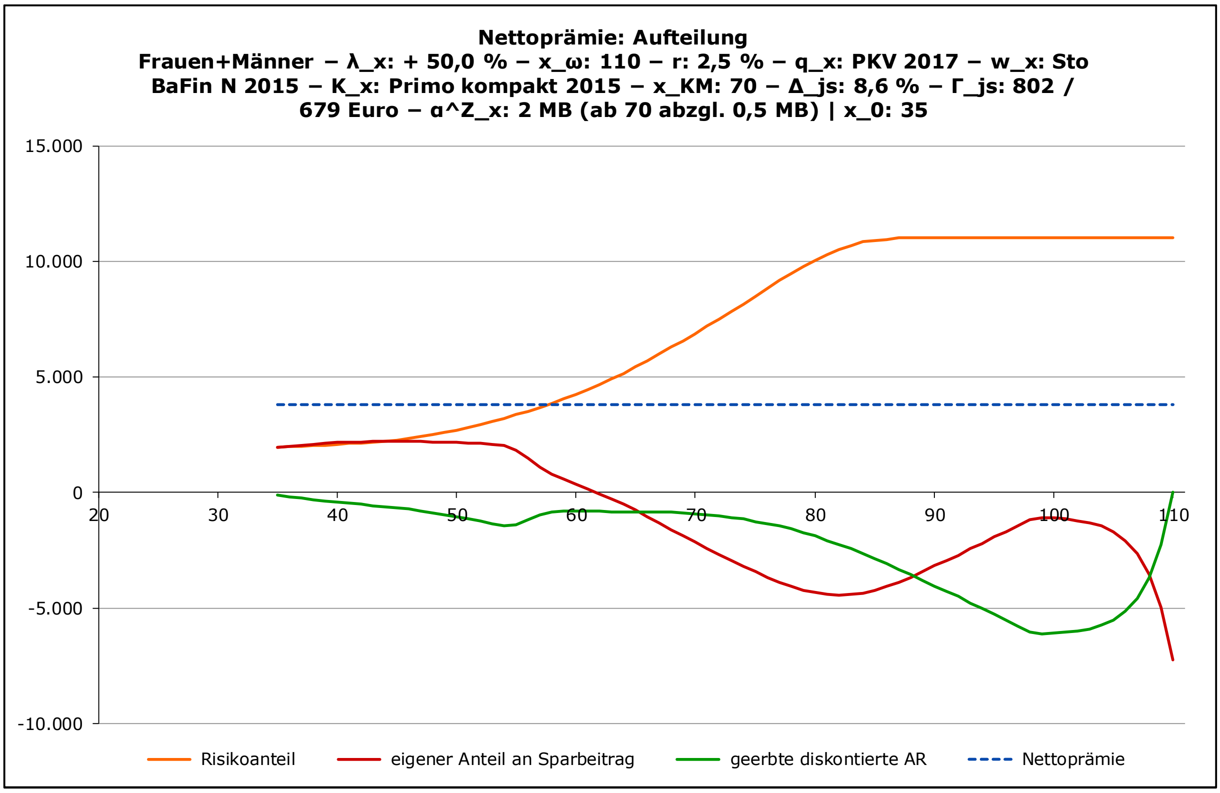
$$P_x = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} \underbrace{\underbrace{+ v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}}_{\text{eigener Anteil an Sparbeitrag}} \underbrace{- s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte AR}}}_{\text{Sparbeitrag}} .$$ ■

Zahlenbeispiel.

x = 1		r 2,5%					r 2,5%			
x+m	K_x+m	v	V_x;x+m+1	V_x;x+m	v * V_x;x+m+1 - V_x;x+m	s_x+m	v	V_x;x+m+1	s_x+m * v * V_x;x+m+1	Summe
1	10,00	0,9756	9,55	0,00	9,32	0,09	0,9756	9,55	0,84	18,48
2	10,00	0,9756	20,76	9,55	10,70	0,11	0,9756	20,76	2,23	18,47
3	15,00	0,9756	27,57	20,76	6,14	0,10	0,9756	27,57	2,69	18,45
4	25,00	0,9756	31,50	27,57	3,16	0,32	0,9756	31,50	9,83	18,33
5	50,00	0,9756	0,00	31,50	-31,50	1,00	0,9756	0,00	0,00	18,50
Abweichungen auf Grund von Rundungen (algebraische Gleichheit)										

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35. Die geerbte Alterungsrückstellung reduziert die Nettoprämie, daher ist sie negativ dargestellt.



Alternative Herleitungen.

- Gemäß der retrospektiven Ermittlung der Alterungsrückstellung zum Alter $x+m$ gemäß Formel (1:4, p. 13) ist:

$$\underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}}_{\text{vergangenes aufgezinstes Leistungsvolumen}} + \underbrace{l_{x+m} \cdot V_{x;x+m}}_{\text{vorh. AR-Volumen}} = \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu}}_{\text{vergangenes aufgezinstes Einnahmevolumen}}$$

$$\Rightarrow \quad l_{x+m} \cdot V_{x;x+m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot (1+r)^{m-\mu} - \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

$$l_{x+m} \cdot V_{x;x+m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot (P_x - K_{x+\mu}) \cdot (1+r)^{m-\mu} \quad \text{(zum Alter } x+m\text{)}$$

  - Formulierung der Gleichung zum Bezugsalter $x+m+1$, d.h. $m+1$ an Stelle von m:

$$\Rightarrow \quad l_{x+(m+1)} \cdot V_{x;x+(m+1)} = \sum_{\mu=0}^{(m+1)-1} l_{x+\mu} \cdot (P_x - K_{x+\mu}) \cdot (1+r)^{(m+1)-\mu}$$

$$l_{x+m+1} \cdot V_{x;x+m+1} = \sum_{\mu=0}^{m} l_{x+\mu} \cdot (P_x - K_{x+\mu}) \cdot (1+r)^{m+1-\mu}$$

$$l_{x+m+1} \cdot V_{x;x+m+1} = (1+r) \cdot \sum_{\mu=0}^{m} l_{x+\mu} \cdot (P_x - K_{x+\mu}) \cdot (1+r)^{m-\mu}$$

- Darstellung der Alterungsrückstellung $V_{x;x+m+1}$ zum erreichten Alter $x+m+1$ an Hand der Vorjahresalterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ zum Alter $x+m$:
  - Aufsplittung der Summe in Summation bis m-1 und separat m:

$$l_{x+m+1} \cdot V_{x;x+m+1} = (1+r) \cdot \left[\overbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} l_{x+\mu} \cdot (P_x - K_{x+\mu}) \cdot (1+r)^{m-\mu}}^{= l_{x+m} \cdot V_{x;x+m} \text{ (zum Alter x+m)}} + l_{x+m} \cdot (P_x - K_{x+m}) \cdot \underbrace{(1+r)^{m-m}}_{=(1+r)^0 = 1} \right]$$

$$l_{x+m+1} \cdot V_{x;x+m+1} = (1+r) \cdot [l_{x+m} \cdot V_{x;x+m} + l_{x+m} \cdot (P_x - K_{x+m})]$$

$\Rightarrow$ AR-Fortschreibung:

$$V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})] \cdot (1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}} ; \qquad \square$$

mit $(1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}} = \frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$ (wie oben) ist

$$V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})] \cdot \frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}} . \qquad \square$$

- Zuführung zur Alterungsrückstellung: $V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m}$ aus AR-Fortschreibung $V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})] \cdot (1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}$ mit $l_{x+m+1} = l_{x+m} \cdot (1 - s_{x+m})$:

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})] \cdot (1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m} \cdot (1 - s_{x+m})}$$

$$V_{x;x+m+1} = [V_{x;x+m} + (P_x - K_{x+m})] \cdot (1+r) \cdot \frac{1}{1 - s_{x+m}}$$

$$\Rightarrow (1 - s_{x+m}) \cdot V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} \cdot (1+r) + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)$$

$$\Rightarrow V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1} = V_{x;x+m} + V_{x;x+m} \cdot r + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r)$$

$\Rightarrow$ Komponenten der AR-Zuführung

$$V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} = (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+r) + V_{x;x+m} \cdot r + s_{x+m} \cdot V_{x;x+m+1} . \qquad \square$$

- Aufteilung der Nettoprämie P_x in Komponenten:
  - Mit $1 + r = \frac{1}{v}$ und Multiplikation der Gleichung mit dem Diskontierungsfaktor v ist:

$$v \cdot V_{x;x+m+1} - v \cdot V_{x;x+m} = P_x - K_{x+m} + V_{x;x+m} \cdot v \cdot r + s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$$

$$\Rightarrow P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - v \cdot V_{x;x+m} - V_{x;x+m} \cdot v \cdot r - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$$

$$P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - (\underbrace{v + v \cdot r}_{v \cdot (1+r) = \frac{1+r}{1+r} = 1}) \cdot V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1}$$

$$P_x = K_{x+m} + v \cdot V_{x;x+m+1} - V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot V_{x;x+m+1} . \qquad \square\blacksquare$$

1.3 Gezillmerte Alterungsrückstellung.

Definition.

- Die normierte gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ gibt für Ursprünglich-x-Jährige im Alter $x+m$ denjenigen Betrag an, der genügt, während der weiteren Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω zusammen mit der laufend jährlich zu entrichtenden normierten gezillmerten Nettoprämie ${}^{Z}p_x$ (zum Eintrittsalter x) jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ eine veränderliche Rente (Zahlung) in Höhe $k_{x+m+\mu}$ ($\mu \geq 0$) samt Zillmerung zu finanzieren, dabei ist der Betrag zu Jahresanfang zu stellen.

1.3.1 Darstellung der gezillmerten Alterungsrückstellung.

Gezillmerte Alterungsrückstellung. (1:15)

normiert	*unnormiert*	
${}^{Z}v_{x;x+m} = A_{x+m} - {}^{Z}p_x \cdot a_{x+m}$ ${}^{Z}v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - {}^{Z}p_x\right) \cdot a_{x+m}$	${}^{Z}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m}$ ${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x\right) \cdot a_{x+m}$	gezillmerte Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$

$${}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot b_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot {}^{Z}b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(b_{x+m} - {}^{Z}b_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m} \cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x} \cdot {}^{Z}b_x\right) - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}V_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot B_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot {}^{Z}B_x - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}V_{x;x+m} = \left[\left(B_{x+m} - {}^{Z}B_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m} \cdot B_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x} \cdot {}^{Z}B_x\right) - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m}$$

$${}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{{}^{Z}v_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m\\ \text{gezillmert}}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{v_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k\\ \text{ungezillmert}}}$$

$${}^{Z}V_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{{}^{Z}V_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m\\ \text{gezillmert}}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{V_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k\\ \text{ungezillmert}}}$$

Darstellungen.

- Die normierte *gez*illmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ lässt sich analog zur *ungez*illmerte Alterungsrückstellung als Differenz aus Leistungsbarwert A_{x+m} zum erreichten Alter $x+m$ abzüglich des normierten Barwerts ${}^{Z}p_x \cdot a_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ bezüglich der normierten *gez*illmerten Nettoprämie ${}^{Z}p_x$ zum Eintrittsalter x darstellen:

  $${}^{Z}v_{x;x+m} = A_{x+m} - {}^{Z}p_x \cdot a_{x+m} .$$

- Weiter ergibt sich die Darstellung der normierten *gez*illmerten Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ als Barwert der Differenz zwischen der normierten *ungez*illmerten Nettoprämie p_{x+m} zum erreichtem Alter $x+m$ abzüglich der normierten *gez*illmerten Nettoprämie ${}^{Z}p_{x+m}$ zum Eintrittsalter x:

  $${}^{Z}v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - {}^{Z}p_x\right) \cdot a_{x+m} .$$

- Weiter ergibt sich eine Darstellung der normierten *gez*illmerten Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ als Barwert bezüglich *ungez*illmerter Bruttoprämie b_{x+m} zum erreichtem Alter $x+m$ und der *gez*illmerten Bruttoprämie ${}^{Z}b_{x+m}$ zum Eintrittsalter x, beide Prämien jeweils abzüglich von Zuschlägen:

  $${}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot b_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot {}^{Z}b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right] \cdot a_{x+m} ,$$

  für $\Delta_{j/s} = \Delta_{j/s\,|\,x+m} = \Delta_{j/s\,|\,x}$ und $\gamma_{j/s\,|\,x+m} = \gamma_{j/s\,|\,x}$ ist speziell $v_{x;x+m} = \left[\left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot b_{x+m} - \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot {}^{Z}b_x\right] \cdot a_{x+m}$.

Herleitung.

- Mit dem erweiterten gezillmerten Äquivalenzprinzip $G \cdot A_{x+m} = {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m} + {}^{Z}V_{x;x+m}$ ist:

  $${}^{Z}V_{x;x+m} = G \cdot A_{x+m} - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m} ,$$

  mit der Normierung ${}^{Z}v_{x;x+m} = \frac{1}{G} \cdot {}^{Z}V_{x;x+m}$ ist:

  $${}^{Z}v_{x;x+m} = A_{x+m} - {}^{Z}p_x \cdot a_{x+m} . \qquad \square$$

- Gemäß Nettoprämienformel $P_x = G \cdot \frac{A_x}{a_x}$ ist $G \cdot A_{x+m} = P_{x+m} \cdot a_{x+m}$ resp. $A_{x+m} = p_{x+m} \cdot a_{x+m}$ und somit:

  $${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x\right) \cdot a_{x+m} \text{ resp.}$$

  $${}^{Z}v_{x;x+m} = \left(p_{x+m} - {}^{Z}p_x\right) \cdot a_{x+m} . \qquad \square$$

- Mit $B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$ und ${}^{Z}B_x = \frac{{}^{Z}P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$ für (un)gezillmerte Jahresbruttoprämien ($\Rightarrow$ $P_{x+m} = \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}\right) \cdot B_x - \Gamma_{j/s\,|\,x+m}$ resp. ${}^{Z}P_x = \left(1 - \Delta_{j/s\,|\,x}\right) \cdot B_x - \Gamma_{j/s\,|\,x}$,

$\Delta_{j/s\,|\,x} = \begin{cases} \Delta_j & \text{für } x < x_s \\ \Delta_s & \text{für } x \geq x_s \end{cases}$, $\quad \Gamma_{j/s\,|\,x} = \begin{cases} \Gamma_j & \text{für } x < x_s \\ \Gamma_s & \text{für } x \geq x_s \end{cases}$) folgt aus ${}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x\right)\cdot a_{x+m}$:

$$^{Z}V_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot B_{x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}B_x + \Gamma_{j/s\,|\,x}\right]\cdot a_{x+m}$$

$$^{Z}V_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot B_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}B_x - \left(\Gamma_{j/s\,|\,x+m} - \Gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

$$\Rightarrow \quad {}^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(1-\Delta_{j/s\,|\,x+m}\right)\cdot b_{x+m} - \left(1-\Delta_{j/s\,|\,x}\right)\cdot {}^{Z}b_x - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}.$$

$\Rightarrow$

$$^{Z}v_{x;x+m} = \left[\left(b_{x+m} - {}^{Z}b_x\right) - \left(\Delta_{j/s\,|\,x+m}\cdot b_{x+m} - \Delta_{j/s\,|\,x}\cdot {}^{Z}b_x\right) - \left(\gamma_{j/s\,|\,x+m} - \gamma_{j/s\,|\,x}\right)\right]\cdot a_{x+m}$$

innerhalb der Altersintervalle j resp. s sodann jeweils

- $^{Z}V_{x;x+m\,|\,j/s} = \left(B_{x+m} - {}^{Z}B_x\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten un/gezillmerten Jahresbruttoprämien B_ξ
- $^{Z}V_{x;x+m\,|\,j/s} = 12\cdot\left(\tilde{B}_{x+m} - {}^{Z}\tilde{B}_x\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten un/gezillmerten Monatsbruttoprämien $\tilde{B}_\xi$ ($\tilde{B}_\xi = \frac{1}{12}\cdot B_\xi$)
- $^{Z}v_{x;x+m\,|\,j/s} = \left(b_{x+m} - {}^{Z}b_x\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der normierten un/gezillmerten Jahresbruttoprämien b_ξ ($b_\xi = \frac{1}{G}\cdot B_\xi$)
- $^{Z}v_{x;x+m\,|\,j/s} = 12\cdot\left(\tilde{b}_{x+m} - {}^{Z}\tilde{b}_x\right)\cdot\left(1-\Delta_{j/s}\right)\cdot a_{x+m}$ bezüglich der unnormierten un/gezillmerten Monatsbruttoprämien $\tilde{b}_\xi$ ($\tilde{b}_\xi = \frac{1}{G}\cdot\tilde{B}_\xi$).

□■

Bemerkung.

- Die normierte gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k}$ zum erreichtem Alter $x+m+k$ ergibt sich aus der *ge*zillmerten Alterungsrückstellung ${}^{Z}v_{x\,;\,x+m}$ und der *unge*zillmerten Alterungsrückstellung $v_{x+m\,;\,x+m+k}$ zum Grenzalter $x+m$ durch:

$$^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = \underbrace{{}^{Z}v_{x;x+m}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x \text{ bis } x+m\\ \text{gezillmert}}} \cdot \underbrace{\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung}}} + \underbrace{v_{x+m\,;\,x+m+k}}_{\substack{\text{aufgebaut in den}\\ \text{Jahren } x+m \text{ bis } x+m+k\\ \text{ungezillmert}}} .$$

  - Begründung gemäß Formel (1:15, p. 32):

    Es ist ${}^{Z}v_{x\,;\,x+m+k} = p_{x+m+k}\cdot a_{x+m+k} - {}^{Z}p_x\cdot a_{x+m+k}$

- Ergänzung um $\left(-p_{x+m}\cdot a_{x+m+k}+p_{x+m}\cdot a_{x+m+k}\right)$:

  $$^{Z}v_{x\,;\,x+m+k}=p_{x+m+k}\cdot a_{x+m+k}-p_{x+m}\cdot a_{x+m+k}+p_{x+m}\cdot a_{x+m+k}-{}^{Z}p_{x}\cdot a_{x+m+k}$$

  $$^{Z}v_{x\,;\,x+m+k}=\left(p_{x+m+k}-p_{x+m}\right)\cdot a_{x+m+k}+\left(p_{x+m}-{}^{Z}p_{x}\right)\cdot a_{x+m+k}$$

- Ergänzung des ersten Terms um $\frac{a_{x+m}}{a_{x+m}}$, Beachtung von $^{Z}v_{x\,;\,x+m}=\left(p_{x+m}-{}^{Z}p_{x}\right)\cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:15, p. 32) und $v_{x+m\,;\,x+m+k}=\left(p_{x+m+k}-p_{x+m}\right)\cdot a_{x+m+k}$ gemäß Formel (1:7, p. 16):

  $$^{Z}v_{x\,;\,x+m+k}=\underbrace{\left(p_{x+m}-{}^{Z}p_{x}\right)\cdot a_{x+m}}_{^{Z}v_{x;x+m}}\cdot\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}+\underbrace{\left(p_{x+m+k}-p_{x+m}\right)\cdot a_{x+m+k}}_{v_{x+m;x+m+k}}$$

  $$^{Z}v_{x\,;\,x+m+k}={}^{Z}v_{x;x+m}\cdot\frac{a_{x+m+k}}{a_{x+m}}+v_{x+m\,;\,x+m+k}\,;$$

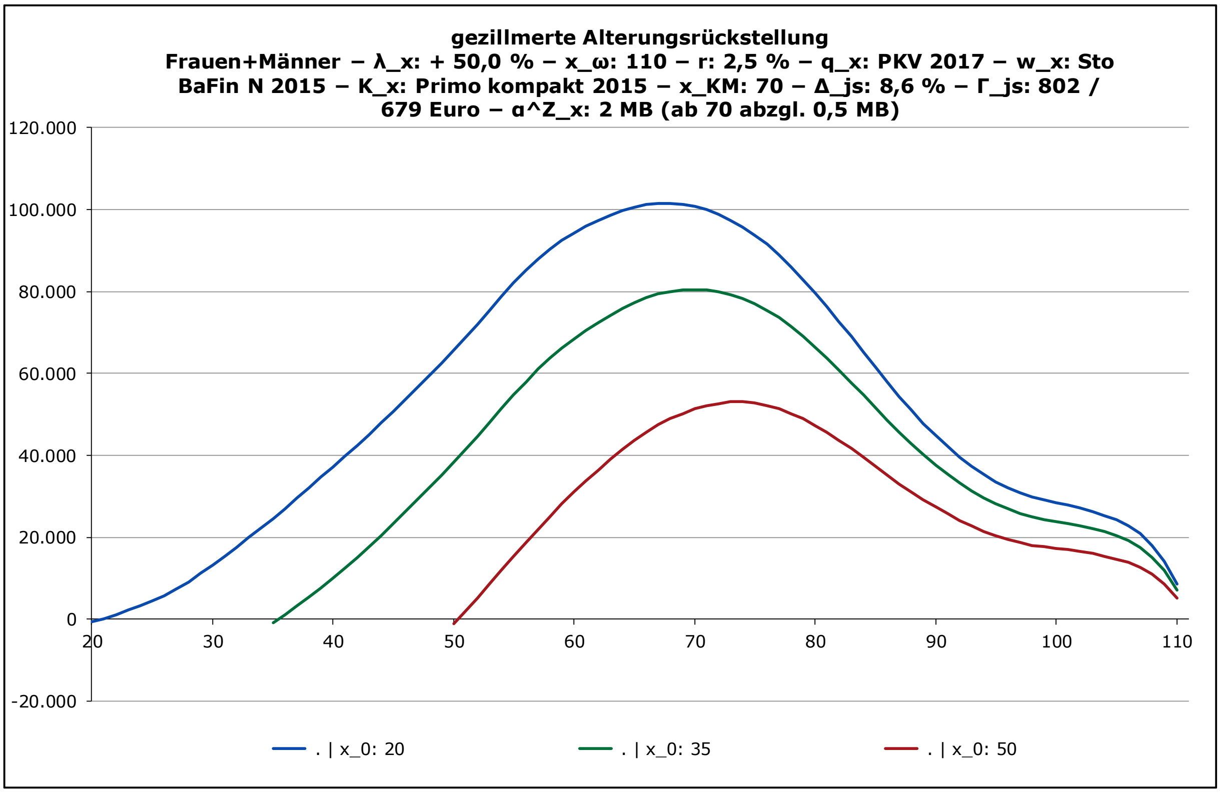
  mit $^{Z}V_{\xi;\mu}=G\cdot{}^{Z}v_{\xi;\mu}$ ergibt sich die unnormierte Darstellung. ■

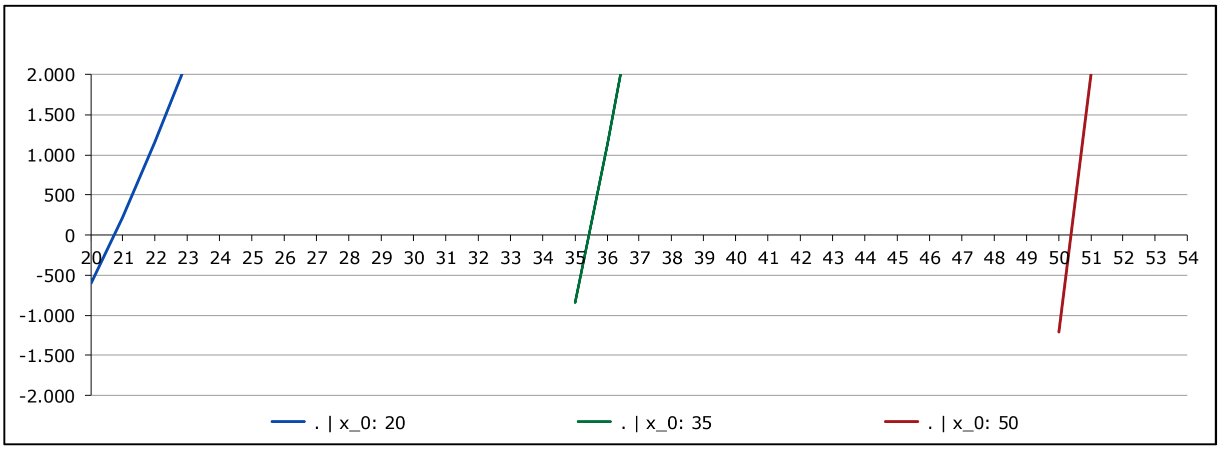
Zahlenbeispiel.

				P^Z_x	19,68	23,16	29,45	37,34	50,00
α^Z_x	GA_x	a_x	^Z_x;x+m	x	1	2	3	4	5
			x+m						
2,00	70,04	3,79	1		-4,55	.	.	.	.
2,00	67,63	3,14	2		5,83	-5,09	.	.	.
2,00	66,35	2,47	3		17,74	9,14	-6,39	.	.
1,00	58,41	1,67	4		25,54	19,73	9,23	-3,95	.
0,00	50,00	1,00	5		30,32	26,84	20,55	12,66	0,00

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 20, 35 resp. 50.





Bemerkung.

- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m$ beträgt bei der Zillmerung von $\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x$ bezüglich der Anzahl α_x^Z an gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^{Z}\widetilde{B}_x$:

$$ {}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - P_x - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \right) \cdot a_{x+m} \,. \tag{1:16} $$

  - Begründung: Mit Darstellung der gezillmerten Nettoprämie ${}^{Z}P_x = P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}B_x$ ist

$$ {}^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^{Z}P_x\right) \cdot a_{x+m} = \left[P_{x+m} - \left(P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}B_x \right) \right] \cdot a_{x+m} $$

$$= \left(P_{x+m} - P_x - \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^Z B_x \right) \cdot a_{x+m} . \qquad \blacksquare$$

- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^Z V_{x;x+0}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter $x+m=0$ beträgt $-\alpha_x^Z \cdot {}^Z\widetilde{B}_x$ bei der Zillmerung von $\alpha_x^Z \cdot {}^Z\widetilde{B}_x$ bezüglich der Anzahl α_x^Z an gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^Z\widetilde{B}_x$, d.h. für $m=0$ ist

  $${}^Z V_{x;x+0} = -\alpha_x^Z \cdot {}^Z\widetilde{B}_x . \qquad (1:17)$$

  - Begründung: Direkt aus Formel (1:16, p. 36): ${}^Z V_{x;x+0} = \left(P_{x+0} - P_x - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^Z B_x}{12 \cdot a_x}\right) \cdot a_{x+0} = -\frac{\alpha_x^Z \cdot {}^Z B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_x = -\alpha_x^Z \cdot {}^Z\widetilde{B}_x$. $\blacksquare$

- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^Z V_{x;x_\omega}$ zum Eintrittsalter und x erreichtem Alter x_ω beträgt $\left(K_{x_\omega} - {}^Z P_x\right)$, d.h. es ist $V_{x;x_\omega} = G \cdot A_{x_\omega} - {}^Z P_x \cdot a_{x_\omega} = G \cdot k_{x_\omega} - {}^Z P_x \cdot 1 = K_{x_\omega} - {}^Z P_x$:

  $$V_{x;x_\omega} = K_{x_\omega} - {}^Z P_x . \qquad (1:18)$$

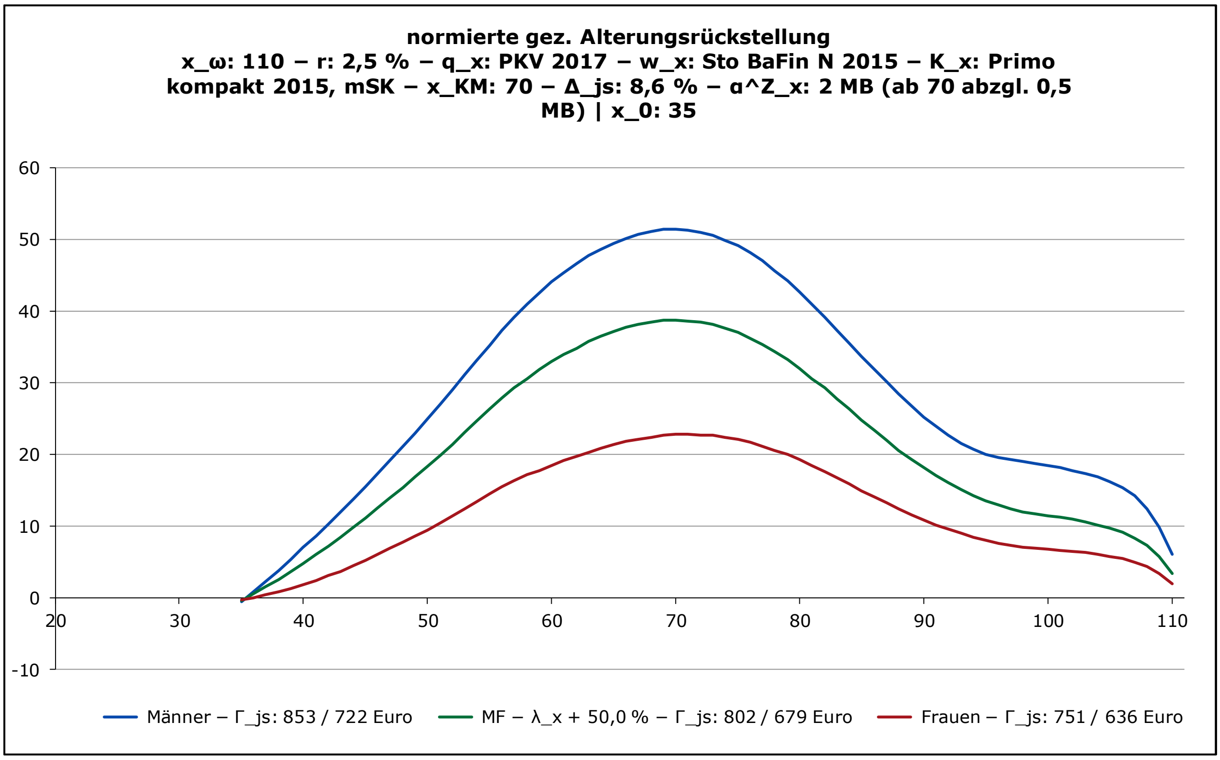
- Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^Z V_{x;x+m}$ bleibt solange negativ, bis die Zillmerung gedeckt ist, d.h. solange für ein m gilt: $P_{x+m} < {}^Z P_x$ (dazu: ${}^Z V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^Z P_x\right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:15, p. 32)).

Bemerkung.

- I.d.R. nimmt mit der Profilsteilheit (d.h. mit zunehmender Ausgeprägtheit der Altersabhängigkeit der Kopfschäden) der Aufbau der Alterungsrückstellung zu, da in jüngeren Jahren aus der Prämie größere Teile in die Alterungsrückstellung fließen.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 40.



1.3.2 Fortschreibung und Zuführung zur gezillmerten Alterungsrückstellung und Aufteilung der gezillmerten Nettoprämie.

Fortschreibung der gezillmerten Alterungsrückstellung.

$$ {}^{Z}V_{x;x+m+1} = \Big[\underbrace{{}^{Z}V_{x;x+m}}_{\text{vorh. gez. AR}} + \underbrace{\left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{gez. Sparprämie}} \Big] \cdot \underbrace{(1+r)}_{\text{Verzinsung}} \cdot \underbrace{\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}}_{\text{Aufteilung auf die Verbliebenen}} $$

$$ {}^{Z}V_{x;x+m+1} = \Big[\underbrace{{}^{Z}V_{x;x+m}}_{\text{vorh. gez. AR}} + \underbrace{\left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{gez. Sparprämie}} \Big] \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}}_{\text{Verzinsung und Vererbung}} $$

Fortschreibung der gezillmerten Alterungsrückstellung $V_{x:x+m}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m$ um ein Jahr

Zuführung zur gezillmerten Alterungsrückstellung.

$$ {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m} = \underbrace{\left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)\cdot(1+r)}_{\text{verzinste gez. Sparprämie}} + \underbrace{{}^{Z}V_{x;x+m} \cdot r}_{\text{Zins auf vorh. gez. AR}} + \underbrace{s_{x+m} \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte gez. AR}} $$

Ein-Jahres-Zuführung zur gezilmmerten Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichten Alter $x+m+1$

Aufteilung der gezillmerten Nettoprämie.

$$ {}^{Z}P_x = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} + \underbrace{v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m}}_{\text{eigener Anteil an gez. Sparbeitrag}} - \underbrace{s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte gez. AR}} $$

Aufteilung der (unnormierten) gezillmerten Jahresbruttoprämie ${}^{Z}P_x$ zum Eintrittsalter x nach m Jahren zum erreichten Alter $x+m$

Dieser Abschnitt steht in Analogie zum Abschnitt 1.2.4, p. 22, der die Fortschreibung und Zuführung zur ungezillmerten Alterungsrückstellung und Aufteilung der (ungezillmerten) Nettoprämie darstellt, und ergibt keine grundlegenden neue Erkenntnisse (alleinig auf die Zillmerung ist an den jeweiligen Stellen zu achten), so dass er kurz gefasst wird (die Erklärungen zur den Herleitungen sind im Abschnitt 1.2.4 an entsprechender Stelle aufgeführt).

Einjährige Fortschreibung der gezillmerten Alterungsrückstellung.

Die gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m+1}$ zum Eintrittsalter x und erreichtem Alter $x+m+1$ ergibt sich aus der vorjährigen gezillmerten Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ zum Alter $x+m$ zu

$$ {}^{Z}V_{x;x+m+1} = \left[{}^{Z}V_{x;x+m} + \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot (1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}} = \left[{}^{Z}V_{x;x+m} + \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot \frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}} $$

,

d.h. die einjährige Fortschreibung der gezillmerten Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ zu ${}^{Z}V_{x;x+m+1}$ erfolgt durch:

- ○ Addition von vorhandener gezillmerter Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$ und gezillmerten Sparprämie ${}^{Z}P_x - K_{x+m}$ zum erreichten Alter $x+m$: ${}^{Z}V_{x;x+m} + \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)$;

- Darstellung mittels Rechnungszins r und Rechnungsmäßig-Lebenden l_x :
  - ○ Verzinsung dieser Summe mit dem Aufzinsungsfaktor $1+r$: $\left[{}^{Z}V_{x;x+m} + \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot (1+r)$,
  - ○ Aufteilung dieser verzinsten Summe unter den Dann-Rechnungsmäßig-Verbliebenen l_{x+m+1}: $\left[{}^{Z}V_{x;x+m} + \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot (1+r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}$;
- Darstellung mittels diskontierten Lebenden D_ξ:

- resp. Verzinsung und Vererbung $\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$ dieser Summe aus vorhandener gezillmerter Alterungsrückstellung und Sparprämie: $\left[{}^{Z}V_{x;x+m} + \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot \frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}$.

Herleitung.

- $$\begin{aligned}
{}^{Z}V_{x;x+m} &= G \cdot A_{x+m} - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m} \\
&= K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} - {}^{Z}P_x \cdot \left(1 + a_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}\right) \\
&= K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot v \cdot (1 - s_{x+m}) - {}^{Z}P_x \cdot (1 + a_{x+m+1} \cdot v \cdot (1 - s_{x+m})) \\
&= K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot v \cdot (1 - s_{x+m}) - {}^{Z}P_x - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m+1} \cdot v \cdot (1 - s_{x+m}) \\
&= K_{x+m} - {}^{Z}P_x + \underbrace{\left(G \cdot A_{x+m+1} - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m+1}\right)}_{{}^{Z}V_{x;x+m+1}} \cdot \underbrace{v}_{\frac{1}{1+r}} \cdot (1 - s_{x+m}) \\
&= K_{x+m} - {}^{Z}P_x + {}^{Z}V_{x;x+m+1} \cdot \tfrac{1}{1+r} \cdot (1 - s_{x+m})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow {}^{Z}V_{x;x+m+1} &= \left[{}^{Z}V_{x;x+m} + \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot (1 + r) \cdot \frac{1}{(1 - s_{x+m})} \\
&= \left[{}^{Z}V_{x;x+m} + \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)\right] \cdot (1 + r) \cdot \frac{l_{x+m}}{l_{x+m} \cdot (1 - s_{x+m})} \\
&= \Big[\underbrace{{}^{Z}V_{x;x+m}}_{\substack{\text{vorhandene} \\ \text{gez. AR}}} + \underbrace{\left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{gez. Sparprämie}} \Big] \cdot \underbrace{(1 + r)}_{\text{Verzinsung}} \cdot \underbrace{\frac{l_{x+m}}{l_{x+m+1}}}_{\substack{\text{Aufteilung auf} \\ \text{die Verbliebenen}}} \\
&= \Big[\underbrace{{}^{Z}V_{x;x+m}}_{\substack{\text{vorhandene} \\ \text{gez. AR}}} + \underbrace{\left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right)}_{\text{gez. Sparprämie}} \Big] \cdot \underbrace{\frac{D_{x+m}}{D_{x+m+1}}}_{\substack{\text{Verzinsung und} \\ \text{Vererbung}}} .
\end{aligned}$$ ■

Komponenten der Zuführung zur gezillmerten Alterungsrückstellung.

Die Ein-Jahres-Zuführung ${}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m}$,

$${}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m} = \left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right) \cdot (1 + r) + {}^{Z}V_{x;x+m} \cdot r + s_{x+m} \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$$

zur gezillmerten Alterungsrückstellung zum Eintrittsalter x und erreichten Alter $x+m+1$ setzt sich zusammen aus:

- der verzinsten gezillmerten Sparprämie $\left({}^{Z}P_x - K_{x+m}\right) \cdot (1 + r)$ zum Alter $x+m$ (vorschüssig);

- dem Zins ${}^{Z}V_{x;x+m} \cdot r$ auf die zu Jahresbeginn vorhandene gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m}$;
- der sogenannten Vererbung: d.h. dem Anteil an der zu Jahresende frei werdende gezillmerten Alterungsrückstellung $s_{x+m} \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$ auf Grund von Ausscheiden aus dem Kollektiv.

Herleitung.

- ${}^{Z}V_{x;x+m} = K_{x+m} - {}^{Z}P_x + {}^{Z}V_{x;x+m+1} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot (1 - s_{x+m})$

$\Rightarrow {}^{Z}V_{x;x+m+1} \cdot (1 - s_{x+m}) \cdot \frac{1}{1+r} = {}^{Z}V_{x;x+m} + {}^{Z}P_x - K_{x+m}$

$\Rightarrow {}^{Z}V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} = {}^{Z}V_{x;x+m} \cdot (1 + r) + ({}^{Z}P_x - K_{x+m}) \cdot (1 + r)$

$\Rightarrow {}^{Z}V_{x;x+m+1} = {}^{Z}V_{x;x+m} \cdot (1 + r) + ({}^{Z}P_x - K_{x+m}) \cdot (1 + r) + s_{x+m} \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$

$\Rightarrow {}^{Z}V_{x;x+m+1} = {}^{Z}V_{x;x+m} + {}^{Z}V_{x;x+m} \cdot r + ({}^{Z}P_x - K_{x+m}) \cdot (1 + r) + s_{x+m} \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$

$\Rightarrow {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m} = \underbrace{({}^{Z}P_x - K_{x+m}) \cdot (1 + r)}_{\text{verzinste gez. Sparprämie}} + \underbrace{{}^{Z}V_{x;x+m} \cdot r}_{\text{Zins auf vorh. gez. AR}} + \underbrace{s_{x+m} \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte gez. AR}}$. ■

Aufteilung der gezillmerten Nettoprämie.

Die (unnormierte) gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}P_x$,

${}^{Z}P_x = K_{x+m} + v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$

zum Alter x setzt sich nach m Jahren zum erreichten Alter $x+m$ zusammen aus:

- dem Risikoanteil K_{x+m} zur Deckung des aktuellen Kopfschadens;
- dem eigenen Anteil an dem gezillmerten Sparbeitrag $v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m}$ für die Zuführung zur gezillmerten Alterungsrückstellung;
- abzüglich des durch Vererbung im m-ten Versicherungsjahr frei werdenden Anteils $s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$ der gezillmerten Alterungsrückstellung – dabei ist auf die einjährige Diskontierung von ${}^{Z}V_{x;x+m+1}$ zu achten.

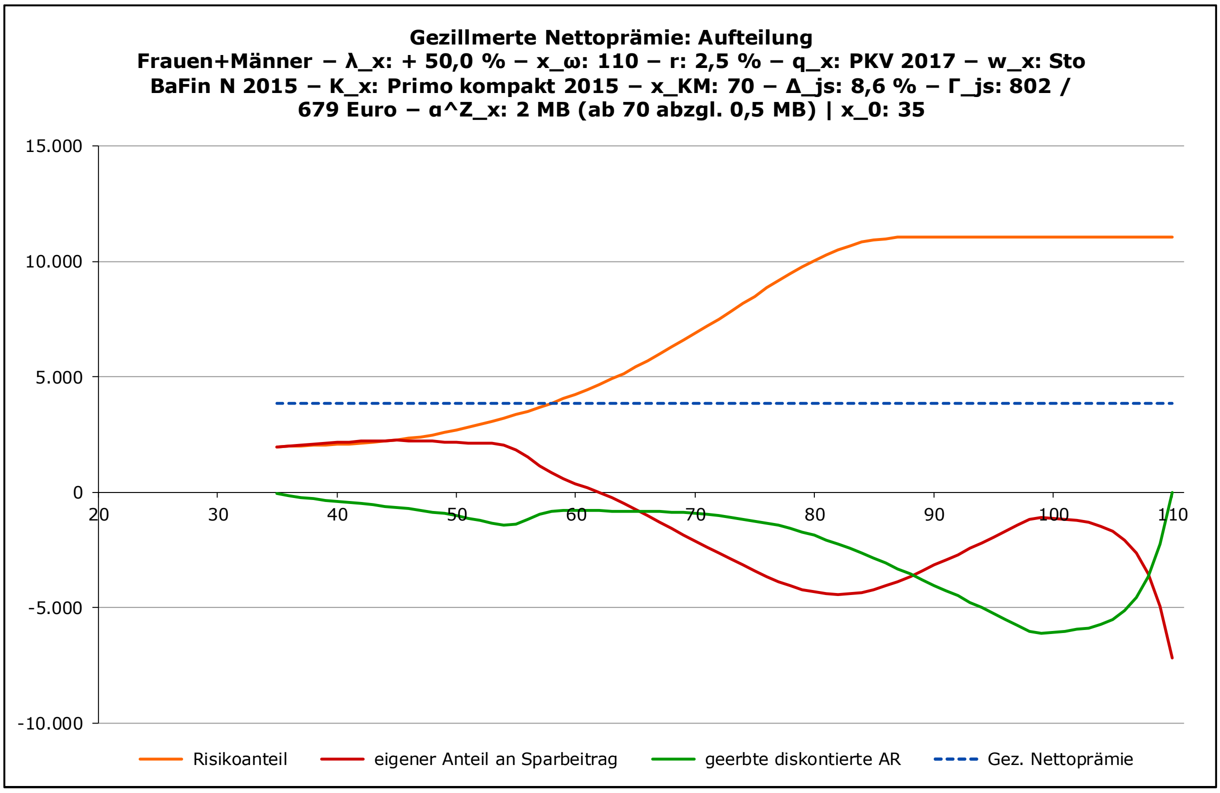
Herleitung.

- $$
\begin{aligned}
{}^{Z}V_{x;x+m} &= G \cdot A_{x+m} - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m} \\
&= \overbrace{K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}}^{G \cdot A_{x+m}} - {}^{Z}P_x \cdot \overbrace{\left(1 + a_{x+m+1} \cdot \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}}\right)}^{a_{x+m}} \\
&= K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right) - {}^{Z}P_x \cdot \left(1 + a_{x+m+1} \cdot v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right)\right) \\
&= K_{x+m} + G \cdot A_{x+m+1} \cdot v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right) - {}^{Z}P_x - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m+1} \cdot v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right) \\
&= K_{x+m} - {}^{Z}P_x + \left(\underbrace{G \cdot A_{x+m+1} - {}^{Z}P_x \cdot a_{x+m+1}}_{{}^{Z}V_{x;x+m+1}}\right) \cdot v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right) \\
&= K_{x+m} - {}^{Z}P_x + {}^{Z}V_{x;x+m+1} \cdot v \cdot \left(1 - s_{x+m}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ {}^{Z}P_x &= K_{x+m} + v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m} \\
&= \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} + \underbrace{\underbrace{v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m}}_{\text{eigener Anteil an gez. Sparbeitrag}} - \underbrace{s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte gez. AR}}}_{\text{gez. Sparbeitrag}}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und erhöhte Zillmerung bei ansonsten durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 20. Die geerbte Alterungsrückstellung reduziert die gezillmerte Nettoprämie, daher ist sie negativ dargestellt.



1.3.3 Maximal zulässige Zillmerung.

§ 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" KVAV.

[…]

(3) Unmittelbare Abschlusskosten dürfen durch Zillmerung nur in einer solchen Höhe in die Prämien eingerechnet werden, dass die Gesamtalterungsrückstellung eines Zugangsjahres im Tarif höchstens vier Jahre und jede Einzelalterungsrückstellung nicht länger als 15 Jahre und nicht länger als die Hälfte der tariflich vorgesehenen künftigen Vertragsdauer negativ ist.

[…]

[…]

Bemerkung zur Höhe der Zillmerung.

- Bei der Beschreibung des Zillmerverfahrens wurde im zweiten Kapitel „Die Beitragskalkulation" darauf hingewiesen, dass in der Grundfassung des Zillmerverfahrens maximal im ersten Versicherungsjahr nur derjenige Anteil der Nettoprämie P_x zur Zillmerung verwendet werden soll, der nicht zur Deckung des aktuellen Kopfschadens K_x benötigt wird. Darüber hinausgehende Beträge werden nämlich nicht mehr im ersten Jahr finanziert, sondern werden auf spätere Versicherungsjahre verlagert, was einer nachgelagerten Finanzierung gleichkommt und zu einer entsprechenden negativen gezillmerten Alterungsrückstellung führt. Damit die gezillmerte Alterungsrückstellung stets positiv ist, hat der Zillmerbetrag ZB_x der Ungleichung $ZB_x \leq {}^ZP_x - K_x$ und damit $ZB_x \leq P_{x+1} - K_x$ zu genügen.

- Erläuterung zur Gesamtalterungsrückstellung eines Zugangsjahres gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" Absatz 3 KVAV:

  Mit der die Anzahl ${}^{NG}L_x$ der neu versicherten Personen eines Jahres hat zu gelten:

  $\forall m \mid m > 4 : \sum_x \left({}^{NG}L_x \cdot {}^ZV_{x;x+m}\right) \geq 0$.

  Mit ${}^ZV_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - {}^ZP_x\right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:15, p. 32), da $a_x \geq 0$:

  $\forall m \mid m > 4 : \sum_x \left({}^{NG}L_x \cdot \left(P_{x+m} - {}^ZP_x\right)\right) \geq 0$.

  Ist $\forall m \mid m > 4 : {}^ZV_{x;x+m} \geq 0$ resp. $P_{x+m} - {}^ZP_x \geq 0$ für die neugeschäftsmöglichen Alter x, so ist der Nachweis für die Gesamtalterungsrückstellung ohne Bestimmung des konkreten Neuzugangs eines Zugangsjahres erbracht.

- Erläuterung zur Einzelalterungsrückstellung gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" Absatz 3 KVAV:

  Eine gezillmerte Alterungsrückstellung ${}^ZV_{x;x+m}$ darf maximal 15 Jahre oder maximal „Restlaufzeit-Halbe" negativ sein, d.h.

  $\forall x : \forall m \,\middle|\, m > \min\left(15 \,;\, \tfrac{1}{2} \cdot (x_\omega - x)\right) : \; {}^ZV_{x;x+m} \geq 0$ resp.

  $\forall x : \forall m \,\middle|\, m > \min\left(15 \,;\, \tfrac{1}{2} \cdot (x_\omega - x)\right) : \; P_{x+m} - {}^ZP_x \geq 0$.

  Bei diesen beiden Vorschriften ist in praxi zu beachten, dass auf Grund von Rundungen bei den Berechnungen unerwünschte rein numerische Effekte (beispielsweise negative Alterungsrückstellungen trotz konstantem Profil) entstehen können, die durch entsprechende Betrachtungen oder Maximierungen ignoriert oder egalisiert werden.

- Ad Beitragsmonotonie / Rückführung der Zillmerung:

  Aus den beiden vorstehenden Vorschriften gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" Absatz 3 KVAV folgt, dass zumindest zum Endalter x_ω nicht mehr gezillmert werden kann. Dies hat eine Reduzierung der Zillmerbeträge ZB_x zur Folge, welche als Anzahl α_x^Z an gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^Z\widetilde{B}_x$, ${}^Z\widetilde{B}_x = \frac{1}{12} \cdot {}^ZB_x$ zur gezillmerten Jahresbruttoprämie ${}^ZB_x$ dargestellt werden: $ZB_x = \alpha_x^Z \cdot {}^Z\widetilde{B}_x = \frac{1}{12} \cdot \alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x$.

  Eine Reduzierung von α_x^Z mit fortschreitendem Alter x geht senkend in die gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^ZB_x$ ein – ${}^ZB_x$ darf allerdings mit fortschreitendem Alter x nicht sinken, was ansonsten zu einem Widerspruch zu § 146 „Substitutive Krankenversicherung" Absatz 2 Satz 2 VAG (keine günstigeren Prämien für das Neugeschäft als im Altbestand – nämlich nach einem Alterswechsel) führen würde. Dementsprechend erfolgt die Rückführung von α_x^Z ab einem gewissen Alter in kleineren Schritten so, dass die wachsende Monotonie von ${}^ZB_x$ gewährleistet ist.

- Um die maximal mögliche Zillmerung einrechnen zu können, wird rückschreitend vorgegangen werden, üblich sind Zillermerabstufungen von 0,5 Monatsbeiträgen.
    - Zu Beginn wird für alle Alter die Zillmerung auf Null gesetzt.
    - Beim kalkulatorischen Endalter x_ω beginnend wird hochzählend das erste Alter x_{Z1}, $x_{Z1} \le x_\omega$ gesucht, für das die Monotonie und die Nichtnegativität unter der Vorgabe $\forall x \mid x \le x_{Z1}: \ \overline{\alpha}_x^Z := 0{,}5$ nicht verletzt wird.
    - Für dieses Alter x_{Z1} wird getestet, wie weit $\overline{\alpha}_{x_{Z1}}^Z$ in 0,5-Schritten erhöht werden kann, ohne die Monotonie und die Nichtnegativität unter der Vorgabe $\forall x \mid x \le x_{Z1}: \alpha_x^Z := \alpha_{x_{Z1}}^Z$ zu verletzen.
    - Sodann wird das erste Alter x_{Z2}, $x_{Z2} \le x_{Z1}$ gesucht, für das die Monotonie und die Nichtnegativität unter der Vorgabe $\forall x \mid x \le x_{Z2}$: $\alpha_x^Z := \alpha_{x_{Z1}}^Z + 0{,}5$ nicht verletzt wird.
    - Für dieses Alter x_{Z2} wird getestet, wie weit $\overline{\alpha}_{x_{Z2}}^Z$ in 0,5-Schritten erhöht werden kann, ohne die Monotonie und die Nichtnegativität unter der Vorgabe $\forall x \mid x \le x_{Z2}: \alpha_x^Z := \alpha_{x_{Z2}}^Z$ zu verletzen.
    - Dieses Verfahren der Suche des ersten Alters x_{Zi}, $x_{Zi} \le x_{Z(i-1)}$ der Monotonie- und Nichtnegativitätsgewährleistung unter der Vorgabe $\forall x \mid x \le x_{Zi}: \ \alpha_x^Z := \alpha_{x_{Z(i-1)}}^Z + 0{,}5$ und anschließender Zillmersatz-Erhöhung wird solange fortgesetzt bis $\alpha_{x_{Zi}}^Z$ den gewünschten Maximalwert resp. x_{Zi} das kalkulatorische Anfangsalter x_α erreicht.

1.4 Gezillmerte und ungezillmerte Alterungsrückstellung.

Gezillmerte und ungezillmerte Alterungsrückstellung. (1:19)

$$^{Z}V_{x;x+m} = V_{x;x+m} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m}$$

Zusammenhang von *gez*illmerter Alterungsrückstellung $^{Z}V_{x:x+m}$ zu *ungez*illmerter Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$

Bemerkung.

- Die *gez*illmerte Alterungsrückstellung $^{Z}V_{x;x+m}$ ergibt sich aus der *ungez*illmerten Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ mittels:

  $$^{Z}V_{x;x+m} = V_{x;x+m} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} .$$

  - Mit $^{Z}V_{x;x+m} = \left(P_{x+m} - P_x - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x}\right) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formel (1:16, p. 36) ist

  $$^{Z}V_{x;x+m} = \underbrace{\left(P_{x+m} - P_x\right) \cdot a_{x+m}}_{V_{x;x+m}} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} = V_{x;x+m} - \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} . \blacksquare$$

- Die Differenz $^{Z}V_{x;x+m} - V_{x;x+m}$ zwischen *gez*illmerter und *ungez*illmerter Alterungsrückstellung $^{Z}V_{x;x+m}$ resp. $V_{x;x+m}$ beträgt

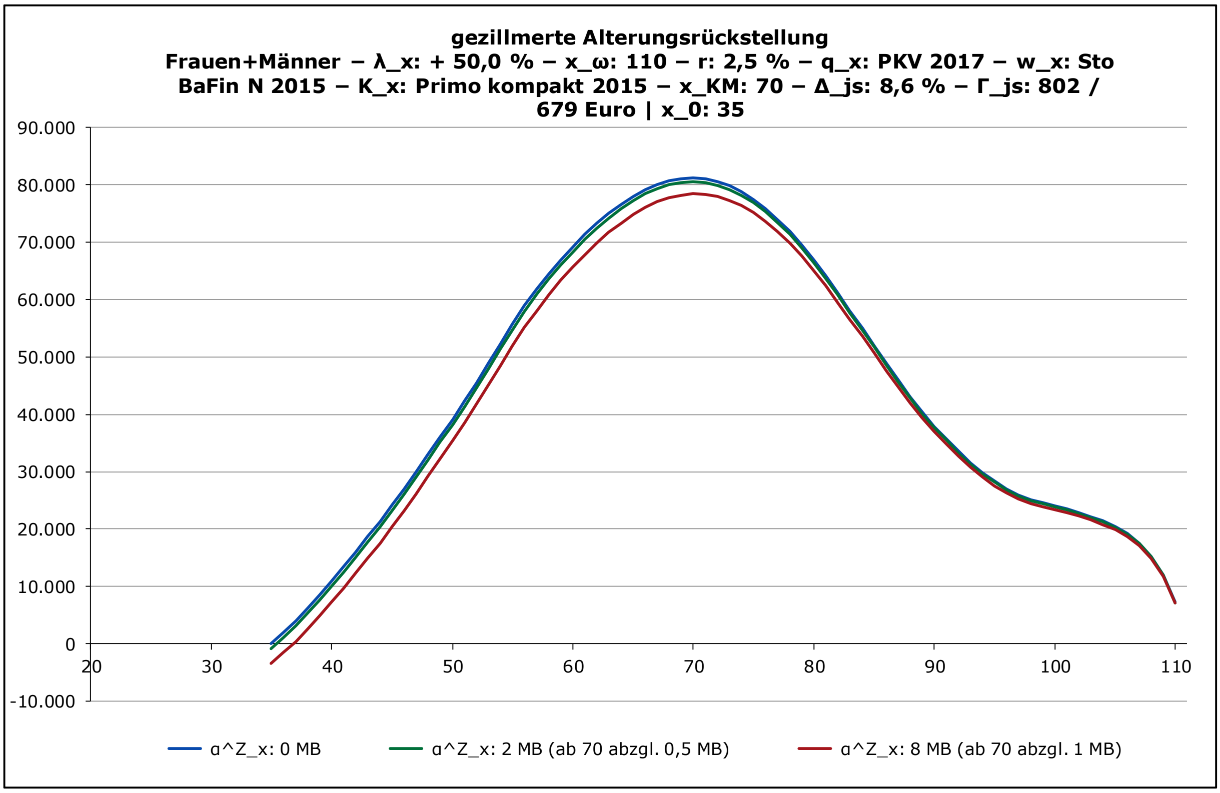
  $$^{Z}V_{x;x+m} - V_{x;x+m} = -\frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} = -\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\tilde{B}_x \cdot \frac{a_{x+m}}{a_x} ,$$

  so dass die *gez*illmerte Alterungsrückstellung $^{Z}V_{x;x+m}$ stets kleiner oder gleich der *ungez*illmerter Alterungsrückstellung $V_{x;x+m}$ ist:

  $$^{Z}V_{x;x+m} - V_{x;x+m} = -\frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} \cdot a_{x+m} \leq 0 .$$

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen; Eintrittsalter 35, bei Zillmerung von 0, 2 resp. 8 Monatsbeiträgen.


gezillmerte Alterungsrückstellung
Frauen+Männer – λ_x: + 50,0 % – x_ω: 110 – r: 2,5 % – q_x: PKV 2017 – w_x: Sto
BaFin N 2015 – K_x: Primo kompakt 2015 – x_KM: 70 – Δ_js: 8,6 % – Γ_js: 802 /
679 Euro | x_0: 35
90.000
80.000
70.000
60.000
50.000
40.000
30.000
20.000
10.000
0
-10.000
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
α^Z_x: 0 MB
α^Z_x: 2 MB (ab 70 abzgl. 0,5 MB)
α^Z_x: 8 MB (ab 70 abzgl. 1 MB)

1.5 Negative Alterungsrückstellung.

1.5.1 Problem fallender Profile.

Nettoprämie bei fallendem Profil.

- Für ein streng monoton fallendes Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ sind die normierten Nettoprämien p_x mit fortschreitendem Alter x streng monoton fallend, d.h. $\forall x \mid x \in \{x_\alpha, \dots, x_\omega - 1\}$: $\forall m \mid m \in \{1, \dots, x_\omega - x\}$: $p_{x+m} < p_x$:

$$\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega} \text{ streng monoton fallend} \tag{1:20}$$

$$\Rightarrow \forall x \mid x \in \{x_\alpha, \dots, x_\omega - 1\}: \ \forall m \mid m \in \{1, \dots, x_\omega - x\}: \ p_{x+m} < p_x .$$

- Begründung: mit $p_x = \frac{U_x}{N_x}$:

$$p_{x+m} < p_x \ \Leftrightarrow \ p_x - p_{x+m} > 0$$

$$p_x - p_{x+m}$$

$$= \frac{U_x}{N_x} - \frac{U_{x+m}}{N_{x+m}} \text{ (gemeinsamer Nenner)}$$

$$= \frac{1}{N_x \cdot N_{x+m}} \cdot \underbrace{\left(U_x \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot N_x\right)}_{=\sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega}\sum_{\xi=x}^{x+m-1}\left(k_\xi - k_\zeta\right)\cdot D_\zeta \cdot D_\xi \text{ (nachfolgend)}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{N_x}_{>0} \cdot \underbrace{N_{x+m}}_{>0}} \cdot \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \underbrace{\left(k_\xi - k_\zeta\right)}_{>0, \text{ da } k_\xi \ge k_{x+m-1} > k_\zeta} \cdot \underbrace{D_\zeta}_{>0} \cdot \underbrace{D_\xi}_{>0}$$

$\Rightarrow$ $p_x - p_{x+m} > 0$. □

- Ad $U_x \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot N_x = \sum_{\zeta=x+m+1}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi$
  - Mit den Kommutationswerten $D_\xi := l_\xi \cdot v^\xi$, $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$, $O_\xi := D_\xi \cdot k_\xi$ und $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$:

$$U_x = \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi + \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} O_\zeta = \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi + U_{x+m}$$

$$N_x = \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi + \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} D_\zeta = \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi + N_{x+m}$$

$$U_x \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot N_x$$

$$= \left(\sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi + U_{x+m}\right) \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot \left(\sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi + N_{x+m}\right)$$

$$= \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi \cdot N_{x+m} + U_{x+m} \cdot N_{x+m} - U_{x+m} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi - U_{x+m} \cdot N_{x+m}$$

$$= N_{x+m} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} O_\xi - U_{x+m} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi$$

  - Unterschiedliche Summationsvariablen ζ und ξ:

$$= \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} D_\zeta \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi \cdot D_\xi\right) - \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \left(k_\zeta \cdot D_\zeta\right) \cdot \sum_{\xi=x}^{x+m-1} D_\xi$$

$$= \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi \cdot D_\zeta \cdot D_\xi\right) - \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\zeta \cdot D_\zeta \cdot D_\xi\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi \cdot D_\zeta \cdot D_\xi - k_\zeta \cdot D_\zeta \cdot D_\xi\right) \\
&= \sum_{\zeta=x}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi \\
&= \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi + \sum_{\zeta=x}^{x+m-1} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi \\
&= \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{\zeta=x}^{x+m-1} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} k_\zeta \cdot D_\zeta \cdot D_\xi - \sum_{\zeta=x}^{x+m-1} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} k_\xi \cdot D_\zeta \cdot D_\xi}_{=0 \text{ (einzelne Summanden heben sich gegenseitg auf)}} \\
&= \sum_{\zeta=x+m}^{x_\omega} \sum_{\xi=x}^{x+m-1} \left(k_\xi - k_\zeta\right) \cdot D_\zeta \cdot D_\xi \,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

- An Stelle der Ungleichung $p_x - p_{x+m} > 0$ für laufende x und m nachzuweisen, genügt es, die Ungleichung $\forall x \mid x \in \{ x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1 \}$: $p_x - p_{x+1} > 0$ zu zeigen.

Gezillmerte Nettoprämie bei fallendem Profil.

- Für ein streng monoton fallendes Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ sind die gezillmerten Nettoprämien ${}^Z p_x$ mit fortschreitendem Alter x streng monoton fallend, d.h. $\forall x \mid x \in \{ x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1 \}$: $\forall m \mid m \in \{ 1, \ldots, x_\omega - x \}$: ${}^Z p_{x+m} < {}^Z p_x$:

  $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ $\forall x \mid x \in \{ x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1 \}$: $\forall m \mid m \in \{ 1, \ldots, x_\omega - x \}$: ${}^Z p_{x+m} < {}^Z p_x$. (1:21)

- Begründung: Mit dem vom normierten Kopfschaden k_x unabhängigen Zillmerfaktor z_x, $z_x = \frac{12 \cdot a_x \cdot (1 - \Delta_{j/s})}{12 \cdot a_x \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \alpha_x^Z}$ und ${}^Z p_x = z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s}$:

$$
\begin{aligned}
& {}^Z p_{x+m} < {}^Z p_x \\
\Leftrightarrow\ & {}^Z p_x - {}^Z p_{x+m} > 0 \\
\Leftrightarrow\ & z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s\,|\,x} - \left[z_{x+m} \cdot p_{x+m} + (z_{x+m} - 1) \cdot \gamma_{j/s\,|\,x+m}\right] > 0 \\
\Leftrightarrow\ & z_x \cdot p_x - z_{x+m} \cdot p_{x+m} + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s\,|\,x} - (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s\,|\,x+m} > 0
\end{aligned}
$$

  - mit $p_x - p_{x+m} > 0$ gemäß Formel (1:20, p. 48), $z_x \ge 1$, $z_x - 1 \ge 0$ und $\gamma_{j/s\,|\,x} \ge \gamma_{j/s\,|\,x+m}$, da $\gamma_j \ge \gamma_s$:

$$
\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{z_x}_{\ge 1} \cdot \underbrace{\left(p_x - p_{x+m}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(z_x - 1\right)}_{\ge 0} \cdot \underbrace{\left(\gamma_{j/s\,|\,x} - \gamma_{j/s\,|\,x+m}\right)}_{\ge 0}}_{>0} > 0
$$

$$
\Rightarrow {}^Z p_x - {}^Z p_{x+m} > 0 \,. \qquad \blacksquare
$$

Gezillmerte Bruttoprämie bei fallendem Profil.

- Für ein streng monoton fallendes Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ sind die gezillmerten Bruttoprämien ${}^Zb_x$ mit fortschreitendem Alter x streng monoton fallend, d.h. $\forall x \mid x \in \{ x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1 \}$: $\forall m \mid m \in \{ 1, \ldots, x_\omega - x \}$: ${}^Zb_{x+m} < {}^Zb_x$:

  $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ $\forall x \mid x \in \{ x_\alpha, \ldots, x_\omega - 1 \}$: $\forall m \mid m \in \{ 1, \ldots, x_\omega - x \}$: ${}^Zb_{x+m} < {}^Zb_x$. (1:22)

- Begründung: mit ${}^Zb_x = \frac{{}^Zp_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$:

$$
{}^Zb_x = \frac{{}^Zp_x + \gamma_{j/s\,|\,x}}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x}} \overset{(1)}{>} \frac{{}^Zp_{x+m} + \gamma_{j/s\,|\,x}}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x}} \overset{(2)}{\ge} \frac{{}^Zp_{x+m} + \gamma_{j/s\,|\,x+m}}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x}} \overset{(3)}{\ge} \frac{{}^Zp_{x+m} + \gamma_{j/s\,|\,x+m}}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}} = {}^Zb_{x+m}
$$

  (1) ${}^Zp_x > {}^Zp_{x+m}$ gemäß Formel (1:21, p. 49)

  (2) $\gamma_j \ge \gamma_s$, d.h. $\gamma_{j/s\,|\,x} \ge \gamma_{j/s\,|\,x+m}$

  (3) $\Delta_j \ge \Delta_s$, d.h. $\Delta_{j/s\,|\,x} \ge \Delta_{j/s\,|\,x+m}$ $\Rightarrow$ $1 - \Delta_{j/s\,|\,x} \le 1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x}} \ge \frac{1}{1 - \Delta_{j/s\,|\,x+m}}$. ■

Bemerkung.

- Mit fortschreitendem Alter x darf die gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^ZB_x$ nicht absinken, was ansonsten zu einem Widerspruch zu § 146 „Substitutive Krankenversicherung" Absatz 2 Satz 2 VAG (keine günstigeren Prämien für das Neugeschäft als im Altbestand) führen würde: Zum Eintrittsalter x ist der konstant bleibende Beitrag ${}^ZB_x$ zu entrichten. Nach einem Jahr ohne Tarifänderung ist weiterhin der Beitrag ${}^ZB_x$ zu entrichten, der allerdings höher als ${}^ZB_{x+1}$ wäre, was bedeutet, dass Bestandsversicherte eine höhere Prämie als Neuversicherte hätte.

Alterungsrückstellung bei fallendem Profil.

- In Abwandlung des Anwartschaftsdeckungsverfahrens (dazu Abschnitt 1.1, p. 6) liegt für streng monoton fallende Kopfschäden K_x auf Grund der Beitragskalkulation nach Art der Lebensversicherung (mit Ansparprozess) die während der Vertragslaufzeit gleichbleibende Nettoprämie P_x
  - in den anfänglichen Altern x_0+a *unter* den durchschnittlich in Anspruch genommenen Leistungen ($P_{x_0+a} < K_{x_0+a}$),
  - in den späteren Jahren $x_\omega - s$ *über* den durchschnittlich in Anspruch genommenen Leistungen ($P_{x_\omega - s} > K_{x_\omega - s}$);

was eine kritische nachgelagerte Finanzierung bedeutet.

- Die tarifliche Alterungsrückstellung [AR] kann dabei als *Darlehen* aufgefasst werden,
  - das in den anfänglichen Altern x_0+a die – nicht in Gänze aus dem Beitrag gedeckten – Kopfschäden $K_{x_0+a} - P_{x_0+a}$ finanziert,
  - das in den späteren Vertragsjahren x_0+s durch die – bezüglich der Kopfschäden – überschüssigen Beitragsanteile $P_{x_0+s} - K_{x_0+s}$ getilgt wird.
- In diesem Fall ist die Alterungsrückstellung zu keinem Zeitpunkt positiv.
  - Begründung: $v_{x;x+m} = (p_{x+m} - p_x) \cdot a_{x+m}$ resp. ${}^Z v_{x;x+m} = (p_{x+m} - {}^Z p_x) \cdot a_{x+m}$ gemäß Formeln (1:7, p. 16) und (1:15, p. 32) mit $p_x - p_{x+m} > 0$ resp. ${}^Z p_x - {}^Z p_{x+m} > 0$ gemäß Formel (1:20, p. 48) resp. (1:21, p. 49) ergibt $v_{x;x+m} \le 0$ resp. ${}^Z v_{x;x+m} \le 0$. ■
- Beim Ausscheiden aus dem Kollektiv hinterlassen die Abgehenden negative Alterungsrückstellungen, was so interpretiert werden kann, dass sie die Schulden – entstanden durch die die Prämien übersteigende Leistungsinanspruchnahme –, nicht beglichen haben. Demgemäß sind bei negativen Alterungsrückstellungen die Ausscheidewahrscheinlichkeiten s_x zu überschätzen (im Gegensatz zur üblichen Sicherheit durch Unterschätzen), d.h. es ist eine höhere Vererbung rechnungsmäßig anzusetzen als zunächst beobachtet, da die negative Vererbung die Beiträge erhöht.

Bemerkung.

- Die Problematik fallender Profile besteht nicht nur bei Profilen, die monoton während aller Jahre fallen, sondern auch für Teilbereiche bei Profilen, die in gewissen Altersbereichen fallen. Zu solchen Altersbereiche gehört beispielsweise das Sinken der Kopfschäden in den Jahren, nachdem die meisten Leistungen wegen Schwangerschaft und Mutterschaft in Anspruch genommen wurden, oder bei Zahntarifen (sowohl Zahnbehandlung als auch Zahnersatz) die Alter ab ca. 70.

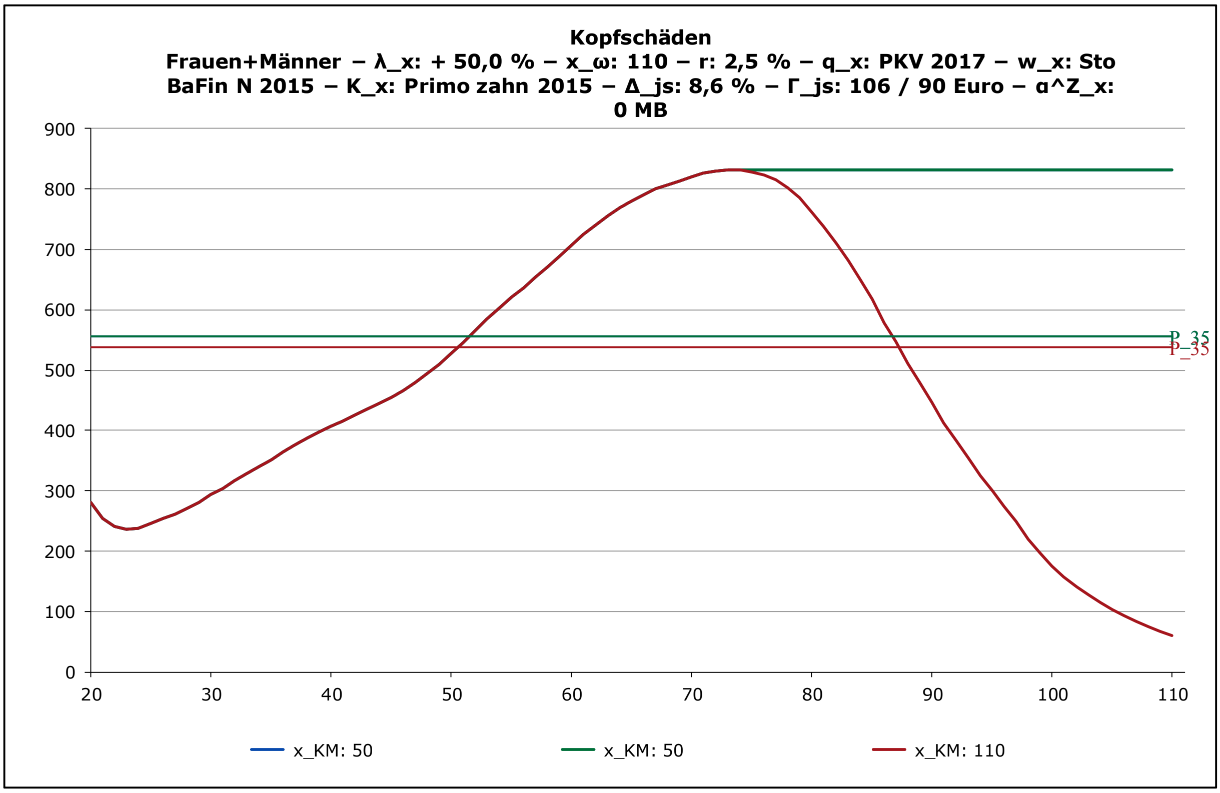
  Das Absinken der Kopfschäden nach den höheren auf Grund der Schwanger-/Mutterschaftsleistungen führt allerdings in den meisten Fällen zu keinen Verwerfungen, da i.d.R. die Kopfschäden in den darauf folgenden Altern so ansteigen, dass das temporären Absinken weder zu einem teilweisen Absinken der Beiträge noch zu negativen Alterungsrückstellungen führt.

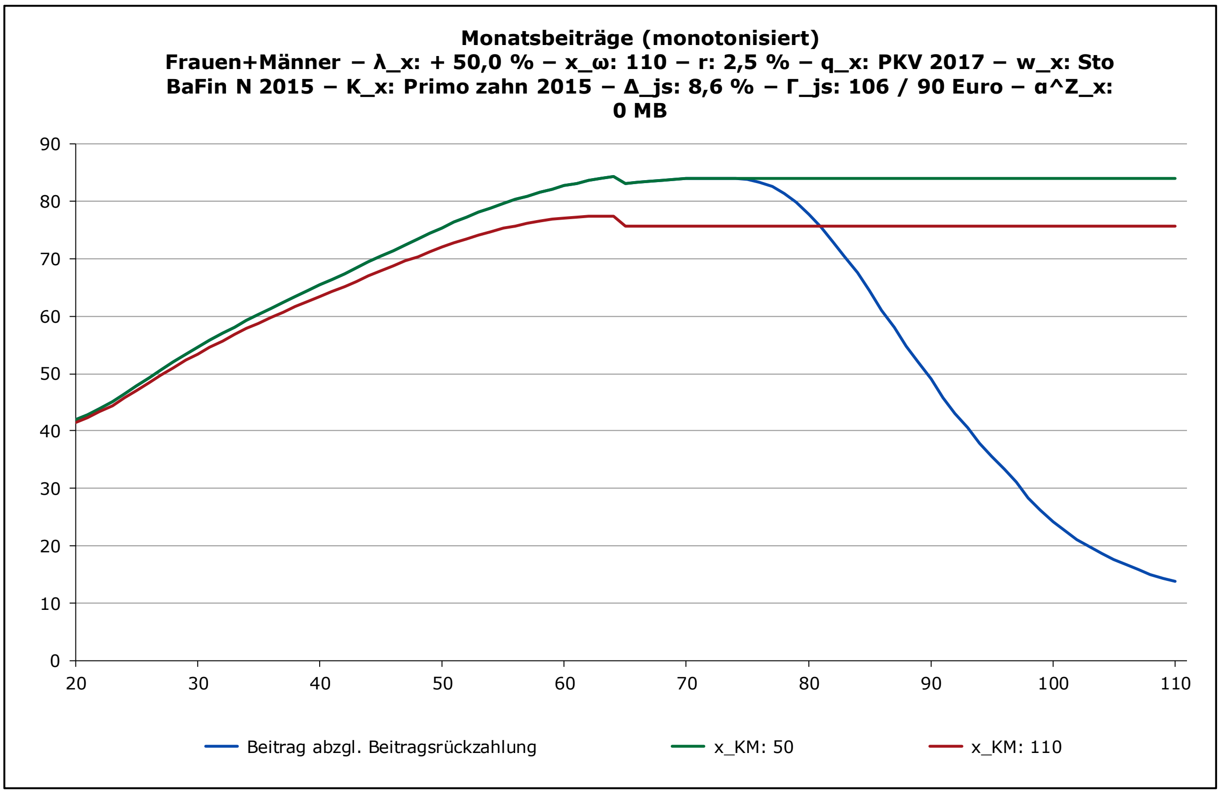
Da bei Zahntarifen ab einem gewissen Alter (ca. um Alter 70) die Kopfschäden kontinuierlich sinken, besteht ab diesem Alter das Problem fallender Profile. Ein Modell zur Problemlösung sieht vor, die rechnungsmäßigen Kopfschäden auf dem höchsten Wert festzuhalten und mit diesen konstruierten Kopfschäden die Tarifbeiträge zu berechnen, die dann allerdings höher als benötigt ausfallen. Als Ausgleich zur heraufgesetzten Prämie erhalten die Versicherten eine Beitragsrückzahlung in Höhe der altersabhängigen Kopfschadendifferenz bezüglich der hoch gesetzten und notwendigen Kopfschäden $\frac{K_x^{hoch} - K_x^{notw}}{1-\Delta_{j/s}}$. Demgemäß kann die tarifliche Leistung als Erstattung der Krankheitskosten plus altersabhängige Beitragsrückzahlung interpretiert werden.

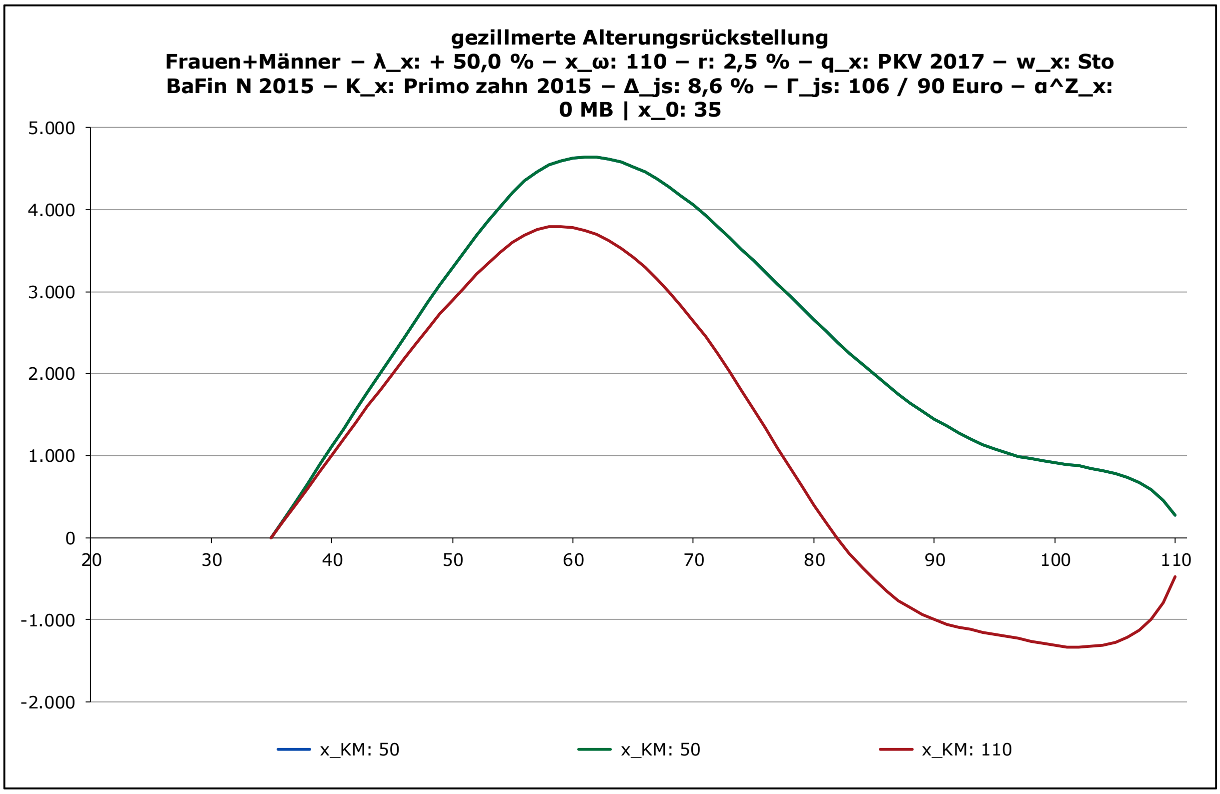
Bei Kompakttarifen mit ambulanten, stationären und zahnärztlichen Leistungen werden die fallenden Zahnleistungen durch das Ansteigen der ambulanten und stationären Leistungen überdeckt, so dass hier i.d.R. keine Verwerfungen auszugleichen sind.

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen (Anmerkung: fehlende Zillmerung wird durch erhöhte Wartezeit- und Selektionsersparnisse auf Grund summenmäßiger Leistungsbegrenzung in den ersten Versicherungsjahren ausgeglichen); Unterschiede bezüglich Beitragsmonotonisierung resp. Kopfschadenmonotonisierung ab Alter 65 (Alter x_{KM}).


Kopfschäden
Frauen+Männer – λ_x: + 50,0 % – x_ω: 110 – r: 2,5 % – q_x: PKV 2017 – w_x: Sto BaFin N 2015 – K_x: Primo zahn 2015 – Δ_js: 8,6 % – Γ_js: 106 / 90 Euro – α^Z_x: 0 MB
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
P_35
P_35
x_KM: 50
x_KM: 50
x_KM: 110


Monatsbeiträge (monotonisiert)
Frauen+Männer – λ_x: + 50,0 % – x_ω: 110 – r: 2,5 % – q_x: PKV 2017 – w_x: Sto BaFin N 2015 – K_x: Primo zahn 2015 – Δ_js: 8,6 % – Γ_js: 106 / 90 Euro – α^Z_x: 0 MB
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
Beitrag abzgl. Beitragsrückzahlung
x_KM: 50
x_KM: 110



Weiterführendes.

KLAUS ABT, HELFRIED BEER, MICHAEL BORCHERT, EGON KLEIN, STEPHAN RUDOLPH, HERMANN GEORG ZÜCHNER: „Kalkulation von Tarifen mit fallendem Kopfschadenprofil in der Krankenversicherung“, Deutsche Aktuarvereingung e.V., Köln, 2001.

1.5.2 Negative Alterungsrückstellungen.

Negative Alterungsrückstellungen sind als Schulden der versicherten Person dem Versicherungskollektiv gegenüber zu deuten.

Sie können auftreten in Bereichen fallender Kopfschäden (dazu Abschnitt 1.5.1, p. 48). Bei kleinen Bereichen fallender Kopfschäden mit anschließendem Ansteigen wird i.d.R. die Alterungs-rückstellung auf Grund des weiteren Ansparprozesses nicht negativ. Für Tarife mit fallenden Kopfschäden ab einem gewissen Alter wurde der DAV-Fachgrundsatz „Kalkulation von Tarifen mit fallendem Kopfschadenprofil in der Krankenversicherung“ erarbeitet. So dass dieser Sachstand hier insgesamt vernachlässigbar ist.

Einen Sonderfall stellt das externe Modell zur Finanzierung des Übertragungswertanspruches nach § 146 „Substitutive Krankenversicherung“ Absatz 1 Nr. 5 VAG dar. Weil hier die Alterungsrückstellung des Basistarifs die Kopfschadenreihe für die Kalkulation bildet und Alterungsrückstellung sich stets ab einem bestimmten Alter wieder abbaut, hat ein solcher Tarifbaustein stets ein fallendes Profil. Die daraus resultierende negative Alterungsrückstellung ist jedoch unproblematisch, weil sie stets in Summe mit der Krankheitskostenvollversicherung zu sehen ist, da der verbindliche Zusatzbaustein des externen Modells ist nicht separat stornierbar ist.

Dagegen führt die Zillmerung häufig zu negativen Alterungsrückstellungen: so wird bei Tarifneuabschluss der Monatsbeitrag gezillmert, bei Tarifwechsel und bei Tagegeldtarifen bei Tagessatz-Erhöhung der Mehrbeitrag, ferner ist bis Alter 45 bei einer Beitragsanpassung die Zillmerung des Mehrbeitrages gesetzlich möglich.

Es gibt sogar Konstellationen, bei denen die Absenkung der rechnungsmäßigen Stornowahrscheinlichkeiten die tariflichen Monatsbeiträge in einigen Altern nicht – wie erwartet – erhöht, sondern senkt.

1.6 Arten von Alterungsrückstellungen.

Es gibt verschiedene Arten von Altersrückstellungen, kurz Rückstellungen. Die Rückstellungen werden dabei nach beitragswirksamen (1. bis 4.) und nichtbeitragswirksamen (5. bis 9.) unterschieden, sie können in den Variationen „portabel" und „nicht portabel" (substitutive Versicherungen mit internem Modell) bzw. „nicht portabel" (substitutive Versicherungen mit externem Modell, sonstige Versicherungen) vorliegen.

1. Tarifliche Alterungsrückstellung, Rückstellung für Umstellungsrabatte (Rückstellungen, die aus dem Kalkulations-Äquivalenzprinzip incl. Tarifänderungen resultieren).

2. Rückstellung für beitragsrelevante Limitierungsrabatte (finanziert aus der unternehmensbezogenen Rückstellung für Beitragsrückerstattung [RfB]).

3. Rückstellung für beitragsrelevante Altersentlastungsrabatte aus Überzins gemäß § 150 „Gutschrift zur Alterungsrückstellung; Direktgutschrift" VAG.

4. Rückstellung für beitragsrelevante Altersentlastungsrabatte aus gesetzlichem Zuschlag gemäß § 149 „Prämienzuschlag in der substitutiven Krankenversicherung" VAG).

5. Rückstellung für zukünftige Altersentlastung aus Überzins gemäß § 150 „Gutschrift zur Alterungsrückstellung; Direktgutschrift" VAG (davon die individuellen Direktgutschriften).

6. Rückstellung für zukünftige Altersentlastung aus gesetzlichem Zuschlag gemäß § 149 „Prämienzuschlag in der substitutiven Krankenversicherung" VAG).

7. Rückstellung aus nicht beitragswirksam angerechneter Rückstellung bei einer Tarifumstellung (sogenannte Parkrückstellung).

8. Rückstellung für Kopfschadenfinanzierungen.

9. Verzinslich geführte Rückstellung (ohne Berücksichtigung der Ausscheideordnung, sogenannte Parkrückstellung).

1.7 Stornogewinne/-verluste, Festlegung von Stornowahrscheinlichkeiten.

1.7.1 Stornogewinne/-verluste.

Jede Rechnungsgrundlage ist gemäß § 2 „Rechnungsgrundlagen" Absatz 3 KVAV mit ausreichenden Sicherheiten zu versehen, so auch die – Vererbung regulierende – Ausscheideordnung $\{s_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$, bestehend aus Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten q_x und w_x ($s_x = q_x + w_x$).

Vorsicht heißt i.d.R. (bei monoton steigendem Profil) in diesem Fall, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten geringer angesetzt sind, dass also voraussichtlich realiter mehr versicherte Personen aus dem Kollektiv ausscheiden als rechnungsmäßig veranschlagt.

Dem zu Folge wird voraussichtlich die tatsächliche Vererbung höher ausfallen als die rechnungsmäßig angesetzte, dabei wird die bei Ausscheiden aus dem Kollektiv frei werdende Alterungsrückstellung lediglich in rechnungsmäßiger Höhe den Tatsächlich-im-Kollektiv-Verbleibenden zugeführt; dabei ist allerdings zu beachten, dass

- bei positiven Alterungsrückstellungen (hier werden „Guthaben" an das Kollektiv vererbt) sogenannte Stornogewinne entstehen, die zum Unternehmensüberschuss beitragen, da mehr Alterungsrückstellung frei wurde, als rechnungsmäßig angesetzt,
- bei negativen Alterungsrückstellungen (hier werden „Schulden" an das Kollektiv vererbt) sogenannte Stornoverluste entstehen, die den Unternehmensüberschuss mindern, da mehr Schulden frei wurden, als rechnungsmäßig angesetzt;

andersherum führt eine geringere rechnungsmäßige als tatsächliche Vererbung

- bei positiven Alterungsrückstellungen zu Stornoverlusten,
- bei negativen Alterungsrückstellungen zu Stornogewinnen.

Das Stornoergebnis, i.e. Summe aus Stornogewinnen und -verlusten, wird in der Gewinn- und Verlustrechnung dem Risikoergebnis zugeordnet.

1.7.2 Grundproblem der Stornowahrscheinlichkeiten.

Die Stornowahrscheinlichkeiten sind nicht nur Tarif, Alter und ggf. Geschlecht abhängig, sondern hochgradig auch von der Vorversicherungsdauer.

Zur Erklärung der Abhängigkeit von der Versicherungsdauer sind die Kündigungsgründe zunächst in objektive und subjektive aufzuteilen (dazu auch

Abschnitt „Stornowahrscheinlichkeiten" im Kapitel der Rechnungsgrundlagen).

Die objektiven Gründe sind von den Versicherungsnehmenden nur in sehr geringem Maße zu steuern, darunter fällt beispielsweise der Wegzug ins Ausland oder bei der substitutiven Versicherung das Eintreten der Versicherungspflicht. Bei den objektiven Gründen ist eher von einer geringeren Abhängigkeit der Stornowahrscheinlichkeiten von der Versicherungsdauer auszugehen.

Als subjektive Gründe werden diejenigen bezeichnet, die von den Versicherungsnehmenden beeinflussbar sind. Dabei kann die Kündigung zu einem Unternehmenswechsel oder bei der nicht-substitutiven Versicherung zur vollständigen Aufgabe des betreffenden Versicherungsschutzes führen. Hier wirkt sich die wirtschaftliche Bedeutung entsprechend auf das Stornoverhalten aus.

Eine nicht-substitutive Versicherung wird eher gekündigt, wenn sie noch nicht so lange besteht. Hier spielen vorherige Inanspruchnahme, die mit der Versicherungsdauer zunimmt, und rein emotionale Gründe wie Kundenbindung, Loyalität eine Rolle.

Ein Wechsel des Versicherungsunternehmens (substitutive und nicht-substitutive Versicherung) wird i.d.R. durchgeführt, wenn dies Vorteile erhoffen lässt, sei es eine Beitragsersparnis, ein besseres Preis-Leistungsverhältnis oder ein passenderes Leistungsversprechen bei dem Unternehmen, das zukünftig den Versicherungsschutz gewährt.

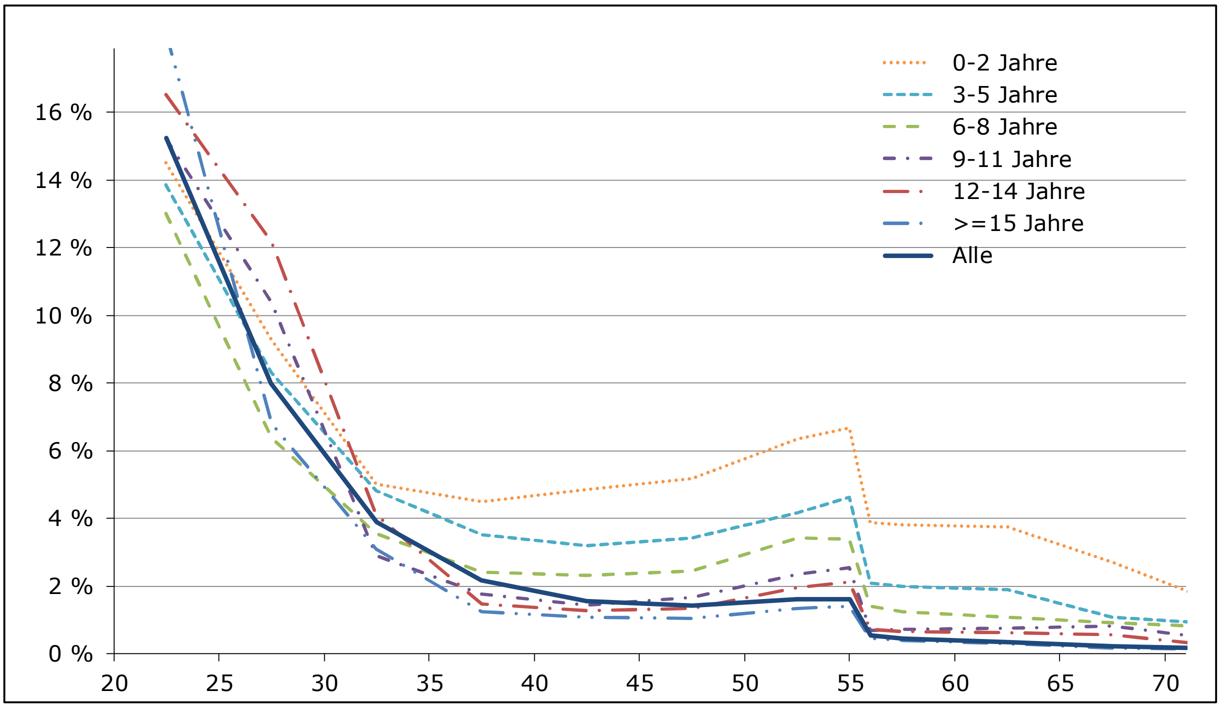
Bei Tarifen ohne Übertragungswertanspruch (substitutive und nicht-substitutive Versicherung) ist der zukünftige Beitrag der Tarifbeitrag zum dann erreichten Alter bei Tarifneuabschluss; fällt dieser geringer aus als der bisher zu zahlende, erscheint ein Wechsel zweckmäßig. Allerdings nimmt mit zunehmender Vertragslaufzeit das erreichte Alter zu und somit auch die Prämie im neuen Unternehmen, so dass mit fortschreitender Zeit demnach ein Wechsel immer unattraktiver wird und somit die Kündigungswahrscheinlichkeit abnimmt.

Bei Tarifen mit Übertragungswertanspruch (substitutive Versicherung) fällt die genannte Differenz zwischen bestehendem Beitrag und Beitrag im aufnehmenden Unternehmen geringer aus, da ein Teil der vorhandenen Alterungsrückstellung prämienmindernd im neuen Tarif eingebracht werden kann. Allerdings wird i.d.R. – auf Grund der „Basistarif-Begrenzung" – nicht die komplette Alterungsrückstellung als Übertragungswert angerechnet, sondern nur ein gewisser Teil davon, so das Einbußen beim Unternehmenswechsel hingenommen werden müssen, die sich im Laufe der Zeit immer mehr ausprägen.

Neben dieser rein technischen Seite kommt noch die Veränderung des Gesundheitszustandes dazu. I.d.R. verschlechtert sich der Gesundheitszustand im Laufe der Zeit, so dass bei Neuabschluss im höheren Alter i.d.R. ein höherer Risikozuschlag fällig wird als der bestehende, was einen Wechsel mit zunehmendem Alter unattraktiver macht.

Zahlenbeispiel.

Systematische Darstellung für Krankheitskostenvollversicherung Männer.



Obwohl die Stornowahrscheinlichkeiten demnach von Tarif, Alter, ggf. Geschlecht und Vorversicherungsdauer abhängig sind, ergibt sich aus den Rechtsgrundlagen, dass nur die Kriterien Tarif, Alter und ggf. Geschlecht bei der Kalkulation berücksichtigt werden dürfen. Daher wird von einer eindimensionalen Kalkulation gesprochen, die für eine Beobachtungseinheit alleinig vom Alter x abhängt. Dagegen wäre es aktuariell genauer eine zweidimensionale Kalkulation in Abhängigkeit vom Alter x und der t-jährigen Versicherungszeit (die sogenannte Kohortenkalkulation) durchzuführen, was jedoch gesetzlich nicht gestattet ist.

Dieses Kalkulationsdimensionsproblem wird im Äquivalenzprinzip $\sum_{\xi \geq x} l_\xi \cdot K_\xi \cdot v^{\xi - x} = \sum_{\xi \geq x} l_\xi \cdot P_x \cdot v^{\xi - x}$ sichtbar.

Wird die Vorversicherungsdauer bei den Rechnungsmäßig-Lebenden $\{l_{x;\mu}\}_{x_\alpha \leq x \leq x_\omega}$ miteinbezogen, ergeben sie sich gemäß $l_{x;1} = l_{x;0} \cdot (1 - s_{x;0})$, wobei

$l_{x;\mu}$ die Anzahl der Rechnungsmäßig-Lebenden zum ursprünglichen Bezugsalter x nach μ Jahren und $(1-s_{x;\mu})$ die Verbleibewahrscheinlichkeit von Ursprünglich-x-Jährigen nach μ Jahren bezeichnet.

Mit diesen zweidimensionalen Werten entwickeln sich die Rechnungsmäßig-Lebenden in Kohorten gemäß den Spalten im Schema:

err. Alter	Eintrittsalter / Alterskohorten bzgl. Eintrittsalter					
	$x{+}0;\tau$	$x{+}1;\tau$	$x{+}2;\tau$	$x{+}3;\tau$	$x{+}4;\tau$	
$x{+}0$	im 1. VJ: $l_{x+0;0}$					
$x{+}1$	im 2. VJ: $l_{x+0;1} = l_{x+0;0}\cdot(1\text{-}s_{x+0;0})$	im 1. VJ: $l_{x+1;0}$				$\}s_{x+0}$
$x{+}2$	im 3. VJ: $l_{x+0;2} = l_{x+0;1}\cdot(1\text{-}s_{x+0;1})$	im 2. VJ: $l_{x+1;1} = l_{x+1;0}\cdot(1\text{-}s_{x+1;0})$	im 1. VJ: $l_{x+2;0}$			$\}s_{x+1}$
$x{+}3$	im 4. VJ: $l_{x+0;3} = l_{x+0;2}\cdot(1\text{-}s_{x+0;2})$	im 3. VJ: $l_{x+1;2} = l_{x+1;1}\cdot(1\text{-}s_{x+1;1})$	im 2. VJ: $l_{x+2;1} = l_{x+2;0}\cdot(1\text{-}s_{x+2;0})$	im 1. VJ: $l_{x+3;0}$		$\}s_{x+2}$
$x{+}4$	im 5. VJ: $l_{x+0;4} = l_{x+0;3}\cdot(1\text{-}s_{x+3;0})$	im 4. VJ: $l_{x+1;3} = l_{x+1;2}\cdot(1\text{-}s_{x+1;2})$	im 3. VJ: $l_{x+2;2} = l_{x+2;1}\cdot(1\text{-}s_{x+2;1})$	im 2. VJ: $l_{x+3;1} = l_{x+3;0}\cdot(1\text{-}s_{x+3;0})$	im 1. VJ: $l_{x+4;0}$	$\}s_{x+3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x{+}\mu$	allgemein: $l_{x+\mu;\tau+1} = l_{x+\mu;\tau}\cdot(1-s_{x+\mu;\tau})$					

VJ: Versicherungsjahr

Allerdings sind die Verbleibewahrscheinlichkeiten nur in Abhängigkeit des Alters x festlegbar, so dass im obigen Schema innerhalb einer Zeile die Werte $s_{x+\mu;\tau}$ für $x+\mu+\tau=\xi$ zu der Ausscheidewahrscheinlichkeit s_ξ führen.

Die Ausscheideordnung ist zweigeteilt, die besteht aus Sterbewahrscheinlichkeiten q_x, die von der BaFin veröffentlicht werden, und aus Stornowahrscheinlichkeiten w_x, die beobachtungseinheitsbezogen festgelegt werden. Da die Sterbewahrscheinlichkeiten q_x zunächst grundsätzlich unverändert übernommen werden, werden im weiteren nur die Stornowahrscheinlichkeiten w_x betrachtet.

In einem ersten Ansatz können die Stornowahrscheinlichkeiten w_x zum Alter x an Hand der Bestände festgelegt werden (so wie im Kapitel der Rechnungsgrundlagen dargestellt):

$^{StTag}\hat{L}(\{j_{x|t}\})$ beobachteter Bestand: Anzahl der x-jährigen versicherten Personen $j_{x|t}$ in einem Kollektiv mit mindestens t-jähriger Versicherungszeit zu Beginn des Beobachtungszeitraumes (Stichtagsbestand)

$^{w}\hat{L}(\{j_{x|t}\})$ beobachteter Abgang: Anzahl derjenigen versicherten Personen aus $\{j_{x|t}\}$ mit Vertragsbeendigung im Beobachtungszeitraum auf Grund Stornierung

$\hat{w}^{VP}_{x|t} := \frac{^{w}\hat{L}(\{j_{x|t}\})}{^{StTag}\hat{L}(\{j_{x|t}\})}$ personenbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit zum Alter x

Werden alle Versicherten zur Grunde gelegt, d.h. $t = 0$ (so wie die BaFin-Meldungen laut § 23 „Mitteilungspflichten von Daten zu den Versicherungsbeständen" Absatz 1, Nummer 1. KVAV auszugestalten sind), ist der Ansatz am wenigsten vorsichtig, da die Versicherungsdauer gar nicht eingeht und frühe Kündigungen übermäßig berücksichtigt werden.

Zahlenbeispiel „Versicherte Personen aller Versicherungsjahre".

	Eintrittsalter / Alterskohorte bzgl. Eintrittsalter x					
err. Alter	1	2	3	4	5	Summe

	Stichtags-Bestand L^StTag_x,τ					
1	1.500					1.500
2	1.361	1.000				2.361
3	1.221	889	500			2.610
4	1.106	799	446	50		2.401
5	754	542	302	33	10	1.641

	davon Abgänge auf Grund Storno L^w_x,τ					
1	124					124
2	99	81				180
3	78	63	39			180
4	31	25	15	2		73
5	0	0	0	0	0	0

	beobachtete Stornowahrscheinlichkeiten					w^VP/alleVJ
1	0,0827					0,0827
2	0,0727	0,0810				0,0762
3	0,0639	0,0709	0,0780			0,0690
4	0,0280	0,0313	0,0336	0,0400		0,0304
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	beob. Storno in Abhängigkeit von Vorversicherungszeit					
	0	1	2	3	4	w^VP/alleVJ
1	0,0827					0,0827
2	0,0810	0,0727				0,0762
3	0,0780	0,0709	0,0639			0,0690
4	0,0400	0,0336	0,0313	0,0280		0,0304
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Um diesen Missstand entgegenzuwirken, ist es üblich, nicht alle versicherten Personen heranzuziehen, sondern nur versicherten Personen mit mindestens dreijähriger Versicherungsdauer, d.h. $t = 3$. Im Folgenden wird dargestellt, dass dieser Ansatz allerdings teilweise noch nicht ausreichend ist.

Zahlenbeispiel „Versicherte Personen ab dem ersten Versicherungsjahr".

	Eintrittsalter / Alterskohorte bzgl. Eintrittsalter x					
err. Alter	1	2	3	4	5	Summe

	Stichtags-Bestand L^StTag_x,τ mit mind. 1-jähriger Vorvers'zeit					
1	.					0
2	1.361	.				1.361
3	1.221	889	.			2.110
4	1.106	799	446	.		2.351
5	754	542	302	33	.	1.631

	davon Abgänge auf Grund Storno L^w_x,τ					
1	.					0
2	99	.				99
3	78	63	.			141
4	31	25	15	.		71
5	0	0	0	0	.	0

	beobachtete Stornowahrscheinlichkeiten					w^VP/ab1VJ
1	.					.
2	0,0727	.				0,0727
3	0,0639	0,0709	.			0,0668
4	0,0280	0,0313	0,0336	.		0,0302
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	.	0,0000

	beob. Storno in Abhängigkeit von Vorversicherungszeit					
	0	1	2	3	4	ab1VJ
1						.
2		0,0727				0,0727
3		0,0709	0,0639			0,0668
4		0,0336	0,0313	0,0280		0,0302
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

1.7.3 Ermittlung von beobachteten Stornowahrscheinlichkeiten.

Damit die Vorversicherungsdauer unter den vorgegebenen Rahmenbedingungen der Eindimensionalität bei den beobachteten Stornowahrscheinlichkeiten berücksichtiget werden kann, eignet sich die Anzahl der versicherten Personen nicht unbedingt, da hierin keine Zeitkomponente objektiv integriert werden kann.

Weiter kommt hinzu, dass bei der Prämienkalkulation die Ausscheidewahrscheinlichkeiten unmittelbar nur in die Rechnungsmäßig-Lebenden eingehen, aber ihre Wirkweise auf die Prämie selbst in der Zerlegung der Nettoprämie ${}^{Z}P_{x}$ gemäß Formel (1:15, p. 32) sichtbar wird:

$$ {}^{Z}P_{x} = \underbrace{K_{x+m}}_{\text{Risikoanteil}} \underbrace{+v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m}}_{\text{eigener Anteil an gez. Sparbeitrag}} \underbrace{-s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}}_{\text{geerbte diskontierte gez. AR}} $$

Die Nettoprämie setzt sich demnach aus den drei Bestandteilen Risiko, eigener Sparbeitrag und geerbte Alterungsrückstellung zusammen, der letzte Term wird dabei maßgeblich von den Ausscheidewahrscheinlichkeiten s_{x}, $s_{x} = q_{x} + w_{x}$ geprägt.

Es ist daher aktuariell sachgerecht, beobachteten Stornowahrscheinlichkeiten nicht an Hand von versicherten Personen zu bestimmen, sondern an Hand derer Alterungsrückstellungen.

Ermittlung alterungsrückstellungsbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit (allgemein).

${}^{StTag}\hat{V}(\{j_{x\|t}\})$	beobachteter Bestand: vorhandene untersuchungsrelevanten Alterungsrückstellung der x-jährigen versicherten Personen $j_{x\|t}$ in einem Kollektiv mit mindestens t-jähriger Versicherungszeit zu Beginn des Beobachtungszeitraumes (stichtagsbezogen)
${}^{w}\hat{V}(\{j_{x\|t}\})$	beobachteter Abgang: frei werdenden untersuchungsrelevanten Alterungsrückstellung derjenigen versicherten Personen aus $\{j_{x\|t}\}$ mit Vertragsbeendigung im Beobachtungszeitraum auf Grund Stornierung
$\hat{w}_{x\|t}^{AR} := \frac{{}^{w}\hat{V}(\{j_{x\|t}\})}{{}^{StTag}\hat{V}(\{j_{x\|t}\})}$	alterungsrückstellungsbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit zum Alter x

Problem negativer Alterungsrückstellungen.

Negative Alterungsrückstellungen können wie im Folgenden dargestellt zu Anomalien führen, Möglichkeiten ihres Auftretens werden in Abschnitt 1.5.2, p. 54 aufgeführt.

Es können sich nämlich rechnerisch Stornowahrscheinlichkeiten $\hat{w}_{x|t}^{AR}$ kleiner 0 Prozent, größer 100 Prozent oder eventuell irreführender Werte zwischen 0 und 100 Prozent ergeben, sofern Zähler oder Nenner negativ sind. Dies sei an einem Beispielsbestand jeweils von fünf versicherten Personen, bei dem jeweils eine Person storniert, also eine personenbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit von 20 Prozent, verdeutlicht:

	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	${}^{StTag}\hat{V}(\{j_\lambda\})$	storn. VP j_λ	${}^{w}\hat{V}(\{j_\lambda\})$	$\hat{w}^{AR}$
a)	+100	+100	+50	-100	-100	50	j_5	-100	-200 Prozent
b)	+100	+100	+50	-100	-100	50	j_1	+100	+200 Prozent
c)	+100	-100	-100	-100	-100	-300	j_5	-100	33 Prozent

Weitere unschöne Effekte negativer Alterungsrückstellungen werden an Hand der Zerlegungsformel (1:15, p. 32)

$$ {}^{Z}P_x = K_{x+m} + v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} $$

der Nettoprämie ${}^{Z}P_x$ bei der Vererbungskomponente $-s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$ sichtbar. Wird nämlich die Stornowahrscheinlichkeit s_{x+m} abgesenkt, was i.d.R. einem vorsichtigerem Ansatz entspricht, wird nämlich bei positiver Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m+1}$ weniger Guthaben vererbt, was zu einer Belastung der Prämien führt, ist dagegen ${}^{Z}V_{x;x+m+1}$ negativ, werden weniger Schulden vererbt, was im Umkehrschluss zu einer Entlastung der Prämien führt. Die negativen Alterungsrückstellungen kehren demnach den Vorsichtsgedanken um, dies kann sich sogar soweit auswirken, dass eine Absenkung der rechnungsmäßigen Stornowahrscheinlichkeiten die tariflichen Monatsbeiträge in einigen Altern nicht – wie erwartet – erhöht, sondern senkt.

Allerdings sind die Stornowahrscheinlichkeiten s_{x+m} gleichermaßen sowohl auf positive als auch auf negative Alterungsrückstellungen anzusetzen, was zu einem Dilemma führt.

Um die genannten Eigenheiten negativer Alterungsrückstellungen zu umghen, ist es zweckmäßig, die Bestimmung der beobachteten Stornowahrscheinlichkeiten alleinig an Hand der versicherten Personen mit positiver Alterungsrückstellungen vorzunehmen. Da dabei allerdings nicht die exakte wirtschaftliche Situation abgebildet wird, ist es angeraten, die angesetzten Stornowahrscheinlichkeiten einer wirtschaftlichen Verprobung gemäß Abschnitt 1.7.4, p. 67 zu unterziehen.

Untersuchungsrelevante Alterungsrückstellungen.

Zuvor wurde beschrieben, dass es aktuariell sachgerecht ist, beobachtete Stornowahrscheinlichkeiten an Hand derer Alterungsrückstellungen zu ermitteln. Daher erfolgt nun eine Beschreibung der relevanten Alterungsrückstellung, dabei sei auch auf Abschnitt 1.6, p. 56 hingewiesen.

Da die Vorversicherungsdauer in der Alterungsrückstellung abgebildet ist, ist eine Elimination von versicherten Personen mit geringer Zugehörigkeit nicht notwendig. Es wird demnach keine Differenzierung bezüglich der Bestandszugehörigkeitsdauer bei der Ermittlung der beobachteten Stornowahrscheinlichkeiten vorgenommen, es bilden i.d.R. demnach alle versicherten Personen die Ermittlungsbasis.

Auf Grund von Verwerfungen, die sich bei negativen Alterungsrückstellungen einstellen können, ist es zweckmäßig, versicherte Personen mit negativen Alterungsrückstellungen für die Ermittlung der beobachteten Stornowahrscheinlichkeiten zu eliminieren.

Je nach beabsichtigter Verwendung der Stornowahrscheinlichkeiten werden die diesbezüglichen Alterungsrückstellungen gemäß Abschnitt 1.6, p. 56 der betreffenden versicherten Personen bei der Storno-Ermittlung zu Grunde gelegt, es ist also auf die Kohärenz von Ermittlung und Verwendung zu achten.

Der Vererbungsterm $-s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$ der Formel ${}^{Z}P_x = K_{x+m} + v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1} - {}^{Z}V_{x;x+m} - s_{x+m} \cdot v \cdot {}^{Z}V_{x;x+m+1}$ der Nettoprämienzerlegung zeigt, dass die Storno-/Ausscheidewahrscheinlichkeit s_{x+m} zum Alter $x+m$ direkt auf die Alterungsrückstellung ${}^{Z}V_{x;x+m+1}$ zum erreichten Alter wirkt. Demgemäß ist die beobachtete Stornowahrscheinlichkeit q_w des Alters x an Hand der Alterungsrückstellungen zum erreichten Alter ${}^{Z}V_{\xi;x+1}$ zu ermitteln, d.h. ${}^{StTag}\hat{V}(\{j_{x|t}\}) = \sum_j {}^{StTag}V_{x+1}(\{j_{x|t}\})$, wobei ${}^{StTag}V_{x+1}(j_{x|t})$ die stichtagsbezogene Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ der versicherten Person $j_{x|t}$ ist.

Ermittlung alterungsrückstellungsbezogener beobachteter Stornowahrscheinlichkeit.

${}^{StTag}V_{x+1}(\{j_{x\|0} \| {}^{StTag}V_{x+1}(j_{x\|0}) > 0\})$	beobachteter Bestand: positive vorhandene zu berücksichtigende Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ der x-jährigen versicherten Personen j_x in einem Kollektiv zu Beginn des Beobachtungszeitraumes (stichtagsbezogen, unabhängig von der Versicherungszeit, d.h. $t=0$)

$^{w}V_{x+1}(\{j_{x|0}|^{StTag}V_{x+1}(j_{x|0})>0\})$ beobachteter Abgang: frei werdenden zu berücksichtigende Alterungsrückstellung derjenigen versicherten Personen aus $\{j_x\}$ mit Vertragsbeendigung im Beobachtungszeitraum auf Grund Stornierung

$\hat{w}^{AR}_{x|t} := \dfrac{^{w}V_{x+1}(\{j_x|^{StTag}V_{x+1}(j_x)>0\})}{^{StTag}V_{x+1}(\{j_x|^{StTag}V_{x+1}(j_x)>0\})}$ alterungsrückstellungsbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit zum Alter x

Da die Ermittlung der alterungsrückstellungsbezogene beobachtete Stornowahrscheinlichkeit nicht über das gesamte Kollektiv erfolgt, sind die daraus abgeleitete Stornowahrscheinlichkeiten einer Wirtschaftlichkeitsverprobung gemäß Abschnitt 1.7.4, p. 67 zu unterziehen.

Zahlenbeispiel „positive Alterungsrückstellung“.

	Eintrittsalter / Alterskohorte bzgl. Eintrittsalter x					
err. Alter	1	2	3	4	5	Summe

	Stichtags-Alterungsrückstellung posAR^StTag_x+1,τ					
1	14.400					14.400
2	56.345	13.150				69.495
3	100.916	39.898	6.775			147.589
4	139.444	68.219	20.641	751		229.055
5	0	0	0	0	0	0

	davon Abgänge auf Grund Storno posAR^w_x,τ					
1	1.190					1.190
2	4.099	1.065				5.164
3	6.447	2.827	528			9.802
4	3.908	2.135	694	30		6.767
5	0	0	0	0	0	0

	beobachtete Stornowahrscheinlichkeiten					w^posAR
1	0,0826					0,0826
2	0,0727	0,0810				0,0743
3	0,0639	0,0709	0,0779			0,0664
4	0,0280	0,0313	0,0336	0,0399		0,0295
5	.	.	.	.	.	.

	beob. Storno in Abhängigkeit von Vorversicherungszeit					
	0	1	2	3	4	abVJ
1	0,0826					0,0826
2	0,0810	0,0727				0,0743
3	0,0779	0,0709	0,0639			0,0664
4	0,0399	0,0336	0,0313	0,0280		0,0295
5						.

1.7.4 Wirtschaftlichkeitsverprobung rechnungsmäßiger Stornowahrscheinlichkeiten.

Das Verfahren zur Festlegung der Stornowahrscheinlichkeiten führt u.U. zu aktuariell gegebenen Modifikationen bei den beobachteten, effektiven oder rechnungsmäßigen Werten. Daher sollten die im Rahmen der Kalkulation ermittelten Stornowahrscheinlichkeiten hinsichtlich ihrer Wirtschaftlichkeit überprüft werden.

Die Wirtschaftlichkeit ist gegeben, sofern die tatsächliche Vererbung höher ausfällt als die rechnungsmäßig angenommene. Dies ist allerdings eine prospektive Abschätzung, die zum Zeitpunkt der Stornofestsetzung noch nicht möglich ist. Eine Wirtschaftlichkeitsüberprüfung eines zukünftig geltenden Stornos kann naturgemäß nur an Hand der Daten zurückliegender Jahre vorgenommen werden. Die Wirtschaftlichkeit sollte jedoch mindestens zusammengefasst für diejenigen Geschäftsjahre erfüllt sein, deren Daten in die Ermittlung der beobachteten Werte eingehen.

Die Wirtschaftlichkeit betrifft die Gesamtheit der diesbezüglichen Geldflüsse im Unternehmen, so dass sie über alle versicherte Personen ohne Elimination negativer Werte ggf. unter Einrechnung nichtbeitragswirksamen Alterungsrückstellungen erstreckt, dabei ist auf die Kohärenz zwischen rechnungsmäßig vererbten und frei werdenden Werten zu achten.

$\{w_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$	zu überprüfende Stornowahrscheinlichkeiten
τ	Beobachtungsjahr
$j_x^\tau \in I$	konkreter Tarifbestand zu Beginn von τ (alle versicherte Personen [VP]): VP j_x^τ zum Alter x der Tarife i desjenigen Tarifkreises I, für den $\{w_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ verwendet werden (d.h. $j_x^\tau \in i$, $i \in I$)
${}^{StTag}\hat{V}_{x+1}(j_x^\tau)$	vorhandene individuelle untersuchungsrelevante Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ der VP j_x^τ zu Beginn von τ (ohne Elimination negativer Werte)
$w_x \cdot {}^{StTag}\hat{V}_{x+1}(j_x^\tau)$	entsprechende rechnungsmäßig vererbte Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ auf Grund Stornierung
${}^{w}\hat{V}_{x+1}(j_x^\tau)$	frei werdende individuelle untersuchungsrelevante Alterungsrückstellung zum Bezugsalter $x+1$ derjenigen VP aus $\{j_x^\tau\}$ mit Vertragsbeendigung in τ auf Grund Stornierung (ohne Elimination negativer Werte)

Der Abgleich kann zunächst je Einzelalter x durchgeführt werden:

$$\forall x \mid x_\alpha \le x \le x_\omega : \overbrace{w_x \cdot \sum_{j_x^\tau \in I} {}^{StTag}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{rechnungsmäßige Vererbung}} \overset{!}{\le} \overbrace{\sum_{j_x \in I} {}^{w}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{tatsächliche Vererbung}} \;;$$

auf Grund von Schwankungen in den Einzelalter-Rohwerten ist eine zusammenfassende Betrachtung für Altersgruppen $\overline{x}$ (z.B. über 5 oder 10) Jahre sachgerecht:

$$\forall \overline{x} \mid \overline{x}_\alpha \leq \overline{x} \leq \overline{x}_\omega: \; \overbrace{\sum\nolimits_{x \in \overline{x}} \sum\nolimits_{j_x^\tau \in I} w_x \cdot {}^{StTag}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{rechnungsmäßige Vererbung}} \overset{!}{\leq} \overbrace{\sum\nolimits_{x \in \overline{x}} \sum\nolimits_{j_x^\tau \in I} {}^{w}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{tatsächliche Vererbung}}$$

auf Grund eines ungleichmäßigen Rohwerte-Verlaufs ist eine zusammenfassende Betrachtung über alle Altersgruppen sachgerecht:

$$\overbrace{\sum\nolimits_{x \in \overline{\overline{x}}} \sum\nolimits_{j_x^\tau \in I} w_x \cdot {}^{StTag}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{rechnungsmäßige Vererbung}} \overset{!}{\leq} \overbrace{\sum\nolimits_{x \in \overline{\overline{x}}} \sum\nolimits_{j_x^\tau \in I} {}^{w}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{tatsächliche Vererbung}}$$

auf Grund von Schwankungen in den einzelnen Jahren (beispielsweise hängt das Stornoverhalten hochgradig von punktuellen Beitragsanpassungen ab) hat weiter zumindest der Abgleich über mehrere Jahre T, $T = \{t_1, \ldots, t_N\}$ (z.B. über diejenigen Jahre, über die die beobachteten Stornowahrscheinlichkeiten ermittelt wurden, z.B. über drei Jahre) positiv auszufallen:

$$\overbrace{\sum\nolimits_{\tau \in \mathrm{T}} \sum\nolimits_{x \in \overline{\overline{x}}} \sum\nolimits_{j_x^\tau \in I} w_x \cdot {}^{StTag}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{rechnungsmäßige Vererbung}} \overset{!}{\leq} \overbrace{\sum\nolimits_{\tau \in \mathrm{T}} \sum\nolimits_{x \in \overline{\overline{x}}} \sum\nolimits_{j_x^\tau \in I} {}^{w}\hat{V}(j_x^\tau)}^{\text{tatsächliche Vererbung}},$$

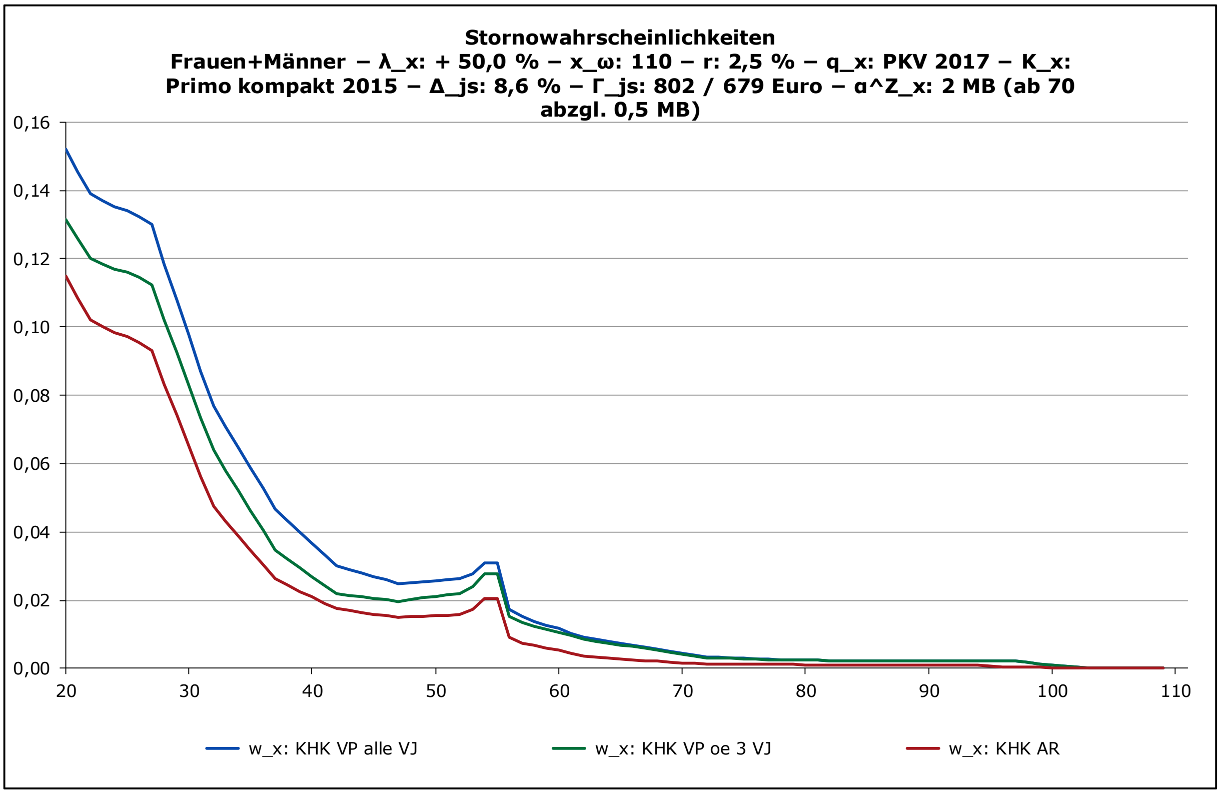
bei globalen Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen ist allerdings zu beachten, dass einzelne Altersbereiche nicht systematisch be- resp. entlastet werden, dass also keine systematische Schieflage hinsichtlich Alterszusammenfassungen entsteht.

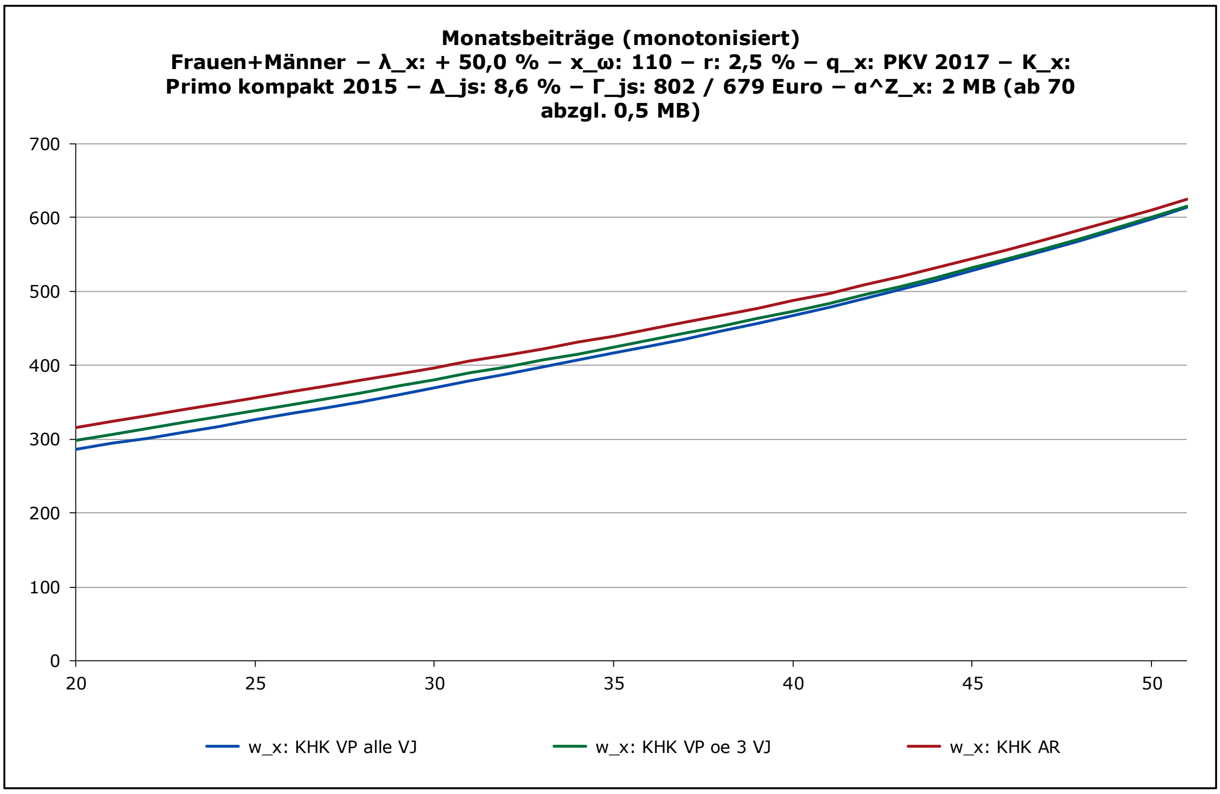
Zahlenbeispiel.

Alter	tats.Vererb.	AR	w^VP/alleVJ	rm.Vererb.	Verb'Erg.	Wirt.	w^VP/ab1VJ	rm.Vererb.	Verb'Erg.	Wirt.	w^AR	rm.Vererb.	Verb'Erg.	Wirt.
1	635	8.745	0,0726	635	+ 0	WAHR	0,0726	635	+ 0	WAHR	0,0725	634	+ 1	WAHR
2	4.654	62.530	0,0767	4.796	- 142	FALSCH	0,0726	4.540	+ 114	WAHR	0,0746	4.665	- 11	FALSCH
3	10.122	151.881	0,0690	10.480	- 358	FALSCH	0,0672	10.206	- 84	FALSCH	0,0667	10.130	- 8	FALSCH
4	7.381	251.300	0,0301	7.564	- 183	FALSCH	0,0299	7.514	- 133	FALSCH	0,0293	7.363	+ 18	WAHR
5	0	0	0,0000	0	+ 0	WAHR	0,0000	0	+ 0	WAHR	0,0000	0	+ 0	WAHR
Summe	22.792	474.456		23.475	- 683	FALSCH		22.895	- 103	FALSCH		22.792	+ 0	WAHR
bzgl. tats.Vererb.					- 3 %	FALSCH			- 0 %	FALSCH			+ 0 %	WAHR

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz, 2,5 Prozent Rechnungszins, aktuelle Sterbewahrscheinlichkeiten und durchschnittlichen Kostenansätzen; Stornowahrscheinlichkeiten: bestimmt an Hand aller versicherter Personen [VP alle VJ], der versicherten Personen mit mindestens dreijähriger Vorversicherungszeit [VP oe 3 VJ], der Alterungsrückstellung aller versicherter Personen [AR].





Weiterführendes.

„Fachgrundsatz der Deutschen Aktuarvereinigung. Festlegung von Stornotafeln. Richtlinie", Deutsche Aktuarvereingung e.V., Köln, in Vorbereitung.

1.8 Bilanz- und Stornorückstellung.

Die Alterungsrückstellungen $V_{x;x+m}$ werden jahresgenau ohne Beachtung der tatsächlichen Vertragslaufzeit der einzelnen Versicherten (in Jahren und Monaten) bestimmt. Da die Bilanzerstellung jedoch zu einem festen Termin erfolgt, lässt § 18 „Alterungsrückstellung" Satz 2 KVAV für die Bilanz zu, die bilanztechnisch tatsächlich zu bildende Alterungsrückstellung ${}^{Bil}V_{x;x+m}$ an Hand eines Näherungsverfahren zu berechnen, bei dem die Einzelalterungsrückstellungen mit auf- resp. abgerundeten ganzen Versicherungsjahren gemittelt werden: ${}^{Bil}V_{x;x+m} = \frac{1}{2} \cdot \left({}^{Z}V_{x;x+m} + {}^{Z}V_{x;x+m+1}\right)$ (die Abrundung steckt schon implizit in der Altersdefinition).

Insbesondere für Neugründungen mit einem übermäßigen Anteil an negativen Alterungsrückstellungen gegenüber positiven Alterungsrückstellungen ist die Regelung in § 25 „Deckungsrückstellung" Absatz 5 RechVersV von Bedeutung, dass nämlich bei einer negativen Gesamtsumme über alle Alterungsrückstellung diese mit Null in die Bilanz einzustellen ist.

Ist dagegen die Gesamtsumme über alle Alterungsrückstellung positiv, kann in der Bilanz für einen Teil (ca. 10 bis 15 Prozent) der aufsummierten negativen Alterungsrückstellungen eine sogenannte Stornorückstellung gemäß § 31 „Sonstige versicherungstechnische Rückstellungen" RechVersV (Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung) gebildet werden. Diese Stornorückstellung reduziert somit den Unternehmensüberschuss des Unternehmens und stellt somit eine Wertberichtigung auf negative Alterungsrückstellungen dar. Dies ist gerechtfertigt, da die Ausscheidewahrscheinlichkeiten s_x i.d.R. von der Tarifzugehörigkeitsdauer abhängig sind; insbesondere ist während den ersten Versicherungsjahren ein höheres Storno feststellbar – zu Vertragszeiten in den auf Grund der Zillmerung die Alterungsrückstellung oftmals noch negativ ist.

Eine Aussage zur Angemessenheit bzw. zur Bildung einer Stornorückstellung kann durch eine Wirtschaftlichkeitsverprobung gemäß Abschnitt 1.7.4, p. 67, die alleinig die Verträge mit negativen Rückstellungen umfasst, getroffen werden.