Die Mathematik der Privaten Krankenversicherung.

Ein Leitfaden für PKV-Aktuarinnen und -Aktuare.

– Teil C: Die Beitragskalkulation –

München, Stand: 18. Juni 2017.

ANDREAS LENCKNER, Aktuar DAV.

Hinweise:

- Entstanden zur Vorlesung an der Ludwig-Maximilians-Universität München (Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik – Mathematisches Institut – Arbeitsgruppe Stochastik und Finanzmathematik) im Sommersemester 2017. Zitate der Rechtsgrundlagen zum damals aktuellen Stand.
- Sofern wegen der Übersichtlichkeit im Text die männliche Form gewählt wurde, beziehen sich die Angaben selbstverständlich auf Angehörige beider Geschlechter.
-
-

Übersicht.

1. Die Beitragskalkulation (Neugeschäftsbeiträge).

§ 146 „Substitutive Krankenversicherung“ VAG.

(1) Soweit die Krankenversicherung ganz oder teilweise den im gesetzlichen Sozialversicherungssystem vorgesehenen Kranken- oder Pflegeversicherungsschutz ersetzen kann (substitutive Krankenversicherung), darf sie im Inland vorbehaltlich des Absatzes 3 nur nach Art der Lebensversicherung betrieben werden, wobei

1. die Prämien auf versicherungsmathematischer Grundlage unter Zugrundelegung von Wahrscheinlichkeitstafeln und anderen einschlägigen statistischen Daten zu berechnen sind, insbesondere unter Berücksichtigung der maßgeblichen Annahmen zur Invaliditäts- und Krankheitsgefahr, zur Sterblichkeit, zur Alters- und Geschlechtsabhängigkeit des Risikos und zur Stornowahrscheinlichkeit sowie unter Berücksichtigung von Sicherheits- und sonstigen Zuschlägen sowie eines Rechnungszinses,
2. die Alterungsrückstellung nach § 341f des Handelsgesetzbuchs zu bilden ist,

[…]

(2) Auf die substitutive Krankenversicherung ist § 138 Absatz 2 [„Gleichbehandlung in der Lebensversicherung“] entsprechend anzuwenden. Die Prämien für das Neugeschäft dürfen nicht niedriger sein als die Prämien, die sich im Altbestand für gleichaltrige Versicherte ohne Berücksichtigung ihrer Alterungsrückstellung ergeben würden.
Satz 2 gilt nicht für einen Prämienunterschied, der sich daraus ergibt, dass die Prämien für das Neugeschäft geschlechtsunabhängig berechnet wurden.

(3) Substitutive Krankenversicherungen mit befristeten Vertragslaufzeiten nach § 195 Absatz 2 und 3 des Versicherungsvertragsgesetzes sowie Krankentagegeldversicherungen nach Vollendung des 65. Lebensjahres des Versicherten nach § 196 des Versicherungsvertragsgesetzes können ohne Alterungsrückstellung kalkuliert werden.

§ 147 „Sonstige Krankenversicherung“ VAG.

Sofern die nicht-substitutive Krankenversicherung nach Art der Lebensversicherung betrieben wird, sind § 146 Absatz 1 Nummer 1 bis 4 und Absatz 2 sowie § 156 entsprechend anzuwenden.

§ 203 „Prämien- und Bedingungsanpassung“ VVG.

(1) Bei einer Krankenversicherung, bei der die Prämie nach Art der Lebensversicherung berechnet wird, kann der Versicherer nur die entsprechend den technischen Berechnungsgrundlagen nach den §§ 146 [„Substitutive Krankenversicherung“], 149 [„Prämienzuschlag in der substitutiven Krankenversicherung“], 150 [„Gutschrift zur Alterungs-

rückstellung; Direktgutschrift"] in Verbindung mit § 160 [„Verordnungsermächtigung"] des Versicherungsaufsichtsgesetzes zu berechnende Prämie verlangen.

[…]

[…]

§ 1 „Versicherungsmathematische Methoden in der Krankenversicherung" KVAV.

Versicherungsmathematische Methoden zur Berechnung der Prämien und Rückstellungen in der nach Art der Lebensversicherung betriebenen Krankenversicherung sind die nach den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik unter Verwendung der in den §§ 2 und 4 bis 8 näher bezeichneten Rechnungsgrundlagen erfolgenden Berechnungen der Prämien und der Alterungsrückstellungen nach Maßgabe der §§ 3, 10, 11, 13, 14 und 18.

§ 10 „Prämienberechnung" KVAV.

(1) Die Prämienberechnung hat nach den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik für jede versicherte Person altersabhängig getrennt für jeden Tarif mit einem dem Grunde und der Höhe nach einheitlichen Leistungsversprechen unter Verwendung der maßgeblichen Rechnungsgrundlagen und einer nach Einzelaltern erstellten Prämienstaffel zu erfolgen.
Jede Beobachtungseinheit eines Tarifs hat das Versicherungsunternehmen getrennt zu kalkulieren.
Es dürfen nur risikogerechte Prämien kalkuliert werden.

(2) Der Teil der Prämie, der zur Finanzierung des Übertragungswerts nach § 14 erforderlich ist, ist für den Vollversicherungsschutz jeder versicherten Person einheitlich zu kalkulieren.

(3) Abweichend von Absatz 1 dürfen Versicherte bis zur Vollendung des 16. Lebensjahres in der Altersgruppe der Kinder, bis zur Vollendung des 21. Lebensjahres in der Altersgruppe der Jugendlichen geführt werden.
Dabei darf die Altersgruppe der Jugendlichen nicht mehr Alter umfassen als die der Kinder.
In Ausbildungstarifen können Eintrittsaltersgruppen gebildet werden, die höchstens fünf Eintrittsalter umfassen.

(4) Planmäßig steigende Prämien dürfen für Versicherte kalkuliert werden, die das 21. Lebensjahr noch nicht vollendet haben, sowie in Ausbildungstarifen bis zum vollendeten 39. Lebensjahr der Versicherten.

(5) Für die Prämienberechnung des Neuzugangs sind die Formeln des Abschnitts A der Anlage 1 oder andere geeignete Formeln, die den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik entsprechen, zu verwenden.

Bemerkung.

- Krankenversicherungstarife können grundsätzlich kalkuliert werden
  - entweder nach Art der Lebensversicherung (nach Art von Leben) mit Bildung einer Alterungsrückstellung (dazu Abschnitt 1.1, p. 9)
  - oder nach Art der Schadenversicherung (nach Art von Schaden) ohne Bildung einer Alterungsrückstellung (dazu Abschnitt 1.3, p. 52).
  - Gemäß § 160 „Verordnungsermächtigung“ VAG haben Krankenversicherungstarife nach Art der Lebensversicherung der Krankenversicherungsaufsichtsverordnung (KVAV) zu genügen.
  - Die substitutive Krankenversicherung ist gemäß § 146 „Substitutive Krankenversicherung“ Absatz 1 VAG nach Art der Lebensversicherung zu betreiben, so dass für diese Tarife die KVAV verbindlich ist.
  - Die meisten weiteren KV-Tarife werden ebenfalls nach Art von Leben kalkuliert, so dass für diese Tarife ebenfalls die KVAV verbindlich ist.
  - Eine Besonderheit stellen die Prämien für Kinder, Jugendliche und Personen in Ausbildung in Tarifen nach Art von Leben dar: gemäß KVAV können sie ohne expliziten Ansparprozess kalkuliert werden (was sich aus § 10 Absatz 3 KVAV ergibt), formal werden jedoch Alterungsrückstellungen aufgebaut, die sich zu Null ergeben. Für diese Personengruppen darf der Beitrag auf Grund des Älterwerdens ansteigen.
  - § 10 „Prämienberechnung“ Absatz 4 KVAV ist zu interpretieren, dass für Tarife, die nach Art von Leben kalkuliert sind, planmäßig steigende Prämien auf Grund des Älterwerdens ausschließlich für Versicherte kalkuliert werden dürfen, die das 21. Lebensjahr resp. in Ausbildungstarifen das 39. Lebensjahr noch nicht vollendet haben.
- § 146 „Substitutive Krankenversicherung“ Absatz 3 VAG regelt, dass substitutive Krankenversicherungen mit befristeten Vertragslaufzeiten, dazu gehören ggf. Ausbildungs-, Auslands-, Ausländer-, Reise- und Restschuldkrankenversicherungen sowie befristete Krankentagegeldversicherungen als Ausnahme ohne Alterungsrückstellung kalkuliert werden können; die anderen Regelungen der KVAV, bleiben davon unberührt.
- Für KV-Tarife nach Art von Schaden (sinnvoll beispielsweise für Zusatztarife mit untergeordneter Altersabhängigkeit der Schäden, wie bei Zahnleistungen) hat die KVAV keine Verbindlichkeit, allerdings sollte sich die Gestaltung der Tarifkalkulation an die Vorgaben der KVAV orientieren.
- § 10 „Prämienberechnung“ Absatz 1 Satz 3 KVAV („Es dürfen nur risikogerechte Prämien kalkuliert werden.“) bedeutet, dass die Prämien weder

zu hoch noch zu niedrig bemessen sein dürfen (dazu das sogenannte Nachholungsverbot gemäß § 155 „Prämienänderungen“ Absatz 3 Satz 4 VAG: „Eine Anpassung erfolgt insoweit nicht, als die Versicherungsleistungen zum Zeitpunkt der Erst- oder einer Neukalkulation unzureichend kalkuliert waren und ein ordentlicher und gewissenhafter Aktuar dies insbesondere an Hand der zu diesem Zeitpunkt verfügbaren statistischen Kalkulationsgrundlagen hätte erkennen müssen.“) Ferner darf die Prämie nur das Krankheits-/Unfallrisiko, Leistungen bei Schwangerschaft und Entbindung sowie für Vorsorge (i.S.v. § 192 „Vertragstypische Leistungen des Versicherers VVG“, dazu gehören auch diesbezügliche Dienstleistungen) abdecken.

Bezeichnungen.

	normierte Werte bezüglich Grundkopfschaden: Minuskel	unnormierte Werte bezüglich Grundkopfschaden: Majuskel
Jahreswerte	a_x, $a_{x:x+m}$, $a_{x\vert x+m}$, p_x, zp_x, ${}^Zp_x$, ${}^Zb_x$, $\gamma_{j/s}$, $v_{x;x+m}$	P_x, ZP_x, ${}^ZP_x$, ${}^ZB_x$, $\Gamma_{j/s}$, $V_{x;x+m}$
	Abweichung: Kommutationswerte D_x, N_x, O_x und U_x und Leistungsbarwerte A_x sind normierte Jahreswerte	
Monatswerte mit Tilde	mit Tilde ${}^Z\tilde{b}_x$	mit Tilde ${}^Z\tilde{B}_x$
vorläufige Werte mit Querstrich	mit Querstrich, Monatswerte mit Tilde ${}^Z\bar{b}_x$, ${}^Z\tilde{\bar{b}}_x$	mit Querstrich, Monatswerte mit Tilde ${}^Z\bar{B}_x$, ${}^Z\tilde{\bar{B}}_x$
fiktive Werte mit Punkt	mit Punkt, Monatswerte mit Tilde $\dot{k}_x$, ${}^Z\dot{b}_x$, ${}^Z\tilde{\dot{b}}_x$	mit Punkt, Monatswerte mit Tilde $\dot{K}_x$, ${}^Z\dot{B}_x$, ${}^Z\tilde{\dot{B}}_x$

- Alter x.
- Gezillmerte Werte mit vorangehendem höhergestelltem Index „^{Z}“.
- Werte für erwachsene Versicherte unter / über Alter Jahre x_s mit Index „${}_{j/s}$“.
- Da die Beitragskalkulation auf Rechnungsgrundlagen aufbaut, die entweder geschlechtsabhängig oder auch geschlechtsunabhängig sein können, wird in diesem Kapitel auf eine Geschlechtsbezeichnung verzichtet.
- Indizes:
  - Index links oben: Spezifikation des Wertes.

- Index rechts oben: Spezifikation des Zuschlags / Jahr / Stand / Geschlecht.
- Index rechts unten: Alter / Altersbezug.

Bemerkung.

In diesem Kapitel unterbleibt aus Gründen der Übersichtlichkeit die exakte Bezeichnung der Größen $\Gamma_{j/s}$, $\gamma_{j/s}$, $\tilde{\Delta}_{j/s}$, $\tilde{\Delta}^r_{j/s}$, ${}^zB^r_{j/s}$, ${}^z\tilde{B}^r_{j/s}$, ${}^zb^r_{j/s}$, ${}^z\tilde{b}^r_{j/s}$ und $\Delta_{j/s}$ bezüglich des Grenzalters x_s. Diese Spezifizierung, wie sie teilweise in den an anderen Stellen verwendet wird, ist ein Index, der auf den entsprechenden Altersbereich hinweist – wie beispielsweise für die Stückkosten $\Gamma_{j/s}$:

$$\Gamma_{j/s\,|\,x} = \begin{cases} \Gamma_j & \text{für} \quad x < x_s \\ \Gamma_s & \text{für} \quad x \geq x_s \end{cases}.$$

1.1 Kalkulation mit Ansparprozess.

§ 10 Abs. 5 „Prämienberechnung" KVAV.

(5) Für die Prämienberechnung des Neuzugangs sind die Formeln des Abschnitts A der Anlage 1 oder andere geeignete Formeln, die den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik entsprechen, zu verwenden.

Anlage 1. Prämienberechnung nach § 10 Absatz 3, § 11 Absatz 2 und § 13 Absatz 4.

A. Prämienberechnung des Neuzugangs. [eigene Bezeichnungen]

x = Alter [x]

ω = Endalter der Sterbetafel [x_ω]

l_x = Anzahl der Lebenden [l_x]

q_x = Sterbenswahrscheinlichkeit [q_x]

w_x = Stornowahrscheinlichkeit [w_x]

K_x = Kopfschaden [K_x]

α_x = einmalige unmittelbare Abschlusskosten, gemessen in Jahresprämien [$\frac{1}{12} \cdot \alpha_x^Z$]

γ = absolute Zuschläge [$\Gamma_{i/s}$]

Δ = relative Zuschläge, gemessen in vom Hundert der Bruttoprämie [$\Delta_{i/s}$]

i = Rechnungszinsfuß [r]

Diskontierungsfaktor: $v = \dfrac{1}{1+i}$ [$v = \frac{1}{1+r}$]

Ausscheideordnung: $l_{x+1} = l_x \cdot (1 - q_x - w_x)$ [$l_{x+1} = l_x \cdot (1 - q_x - w_x)$]

Diskontierte Lebende: $D_x = l_x \cdot v^x$ [$D_x = l_x \cdot v^x$]

Rentenbarwert: $a_x = \dfrac{\sum_{v=x}^{\omega} D_v}{D_x}$ [$a_x = \dfrac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi}{D_x}$]

Leistungsbarwert: $A_x = \dfrac{\sum_{v=x}^{\omega} K_v \cdot D_v}{D_x}$ [$A_x^{[unnormiert]} = \dfrac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} k_\xi \cdot D_\xi}{D_x}$]

Jährliche Nettoprämie: $P_x = \dfrac{A_x}{a_x}$ [$P_x = G \cdot \frac{A_x^{[unnormiert]}}{a_x}$]

Jährliche gezillmerte Bruttoprämie:

$$B_x = \frac{P_x + \gamma}{1 - \Delta - \frac{\alpha_x}{a_x}}$$ [$^{Z}B_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$]

1.1.1 Äquivalenzprinzip.

Grundständiges Äquivalenzprinzip.		(1:1)
gesamtes zukünftiges diskontiertes Ausgabenvolumen	=	gesamtes zukünftiges diskontiertes Einnahmenvolumen

Äquivalenzprinzip (bei normierten Rechnungsgrundlagen).		
	ohne Zillmerung	mit Zillmerung $(\forall m, m \geq 1 : \frac{1}{G} \cdot ZB_{x+m} = 0)$
1. Jahr x	$A_x = p_x \cdot a_x$	$A_x + \frac{1}{G} \cdot ZB_x = {}^Z p_x \cdot a_x$
Folgejahre $x+m$	$A_{x+m} = p_x \cdot a_{x+m} + v_{x;x+m}$	$A_{x+m} = {}^Z p_x \cdot a_{x+m} + {}^Z v_{x;x+m}$

Diskontierungsfaktor und Kommutationswerte.		
$v := \frac{1}{1+r}$	Diskontierungsfaktor zum Rechnungszins r	(1:2)
$D_x := l_x \cdot v^x$	Diskontierte Lebende zum Alter x	(1:3)
$N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$	Summe diskontierte Lebende ab Alter x	(1:4)
$O_x := D_x \cdot k_x$	diskontierte normierte Schäden zum Alter x	(1:5)
$U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$	Summe diskontierte normierte Schäden ab Alter x	(1:6)

Definition und Grundsätze.

- Der Beitrag resp. das Entgelt für einen Versicherungsschutz wird als Prämie bezeichnet.
- In der Krankenversicherung bezeichnet die Nettoprämie den während der Tarifzugehörigkeit
  - konstanten,
  - jährlichen,
  - zu Jahresbeginn fälligen

  zu zahlenden Betrag zur Erlangung des vereinbarten Versicherungsschutzes – unter Beachtung von
  - Rechnungszins,
  - Ausscheideordnung,
  - Kopfschäden

unter der Annahme gleichbleibender Rechnungsgrundlagen über die gesamte Versicherungslaufzeit (gesetzlich vorgeschrieben obwohl unrealistisch) für eine homogene Risikogruppe (dazu Kopfschadenfestlegung gemäß entsprechendem Abschnitt);

wobei alle Geldflüsse (Prämienzahlung wie Auszahlungen für Versicherungsleistungen) stets zu Jahresbeginn (vorschüssig) für alle versicherten Personen vollzogen werden, ein evtl. Ausscheiden aus dem Versichertenkollektiv erfolgt im Kalkulationsansatz erst danach;

ohne Beachtung der Kosten, die im Zusammenhang mit dem Versicherungsver- und -betrieb entstehen.

- Die Bruttoprämie umfasst neben der Nettoprämie auch alle im Versicherungsunternehmen anfallenden Kosten.

Definition und Bemerkung.

- Zur periodengerechte Bewertung von Ausgaben und Einnahmen ist eine Diskontierung unumgänglich, da Einnahmen und Ausgaben i.d.R. in unterschiedlichen Höhen zu den jeweiligen Zeitpunkten erfolgen.
- Der gegenwartsbezogene Wert von zukünftigen Zahlungen heißt Barwert, dabei sind Annahmen zur rechnungsmäßigen Verzinsung, Höhe und Zeitpunkte der Zahlungen zu treffen.
- An Hand von Barwerten können Zahlungen zu unterschiedlichen Höhen und Zeitpunkten miteinander verglichen werden.
- Der gegenwartsbezogene Wert einer Zahlung ist umso geringer, je später der Zahlungszeitpunkt liegt (unter der Prämisse von positiven Zinsen). Bei der Barwertbestimmung wird – unter der Voraussetzung einer gleichbleibenden rechnungsmäßigen Verzinsung über den Beobachtungszeitraum – zunächst eine Zahlung Z_τ in τ Jahren mit dem sogenannten Diskontierungsfaktor v ($v = \frac{1}{1+r}$ zum Rechnungszins r) entsprechend der Zeitdifferenz τ versehen, um so den gegenwärtigen Wert Z_0 der zukünftigen Zahlung zu erhalten: $Z_0 = v^t \cdot Z_t = \left(\frac{1}{1+r}\right)^t \cdot Z_t$ (dazu: für das Ausgangskapital C_0 beträgt nach τ Jahren bei gleichbleibender Verzinsung mit dem Rechnungszins r das Kapital C_τ: $C_\tau = (1+r)^\tau \cdot C_0$).

Grundsatz.

- In der Krankenversicherung wird i.d.R. für Monatswerte stets ein Zwölftel des Jahreswertes veranschlagt, wobei ein ratierlicher Zinseinfluss nicht eingerechnet wird.

Äquivalenzprinzip.

- Versicherungstechnische Brutto-Äquivalenz:

Summe der diskontierten gesamten erwarteten zukünftigen Ausgaben (Versicherungsleistungen und Kosten)	=	Summe der diskontierten gesamten erwarteten zukünftigen Einnahmen (Prämienzahlungen und Zinsen)

- Versicherungstechnische Netto-Äquivalenz:

Summe der diskontierten gesamten erwarteten zukünftigen Aufwendungen für Versicherungsfälle (ohne Kosten)	=	Summe der diskontierten gesamten erwarteten zukünftigen Zahlungen zur Risikodeckung und diesbezügliche Zinsen

- Vom Eintrittsalter x abhängiges Äquivalenzprinzip (netto):

Summe der diskontierten gesamten erwarteten zukünftigen Aufwendungen für Versicherungsfälle ab Alter x (ohne Kosten; Leistungsbarwert)	=	Summe der diskontierten gesamten erwarteten zukünftigen Einnahmen an gleichbleibender Nettoprämie ab Alter x und diesbezügliche Zinsen (Nettoprämienbarwert)
unter der Annahme gleichbleibender Rechnungsgrundlagen über die gesamte Versicherungslaufzeit für eine homogene Risikogruppe		

- Vom Eintrittsalter x abhängiges *gezillmertes* Äquivalenzprinzip:

Summe der diskontierten gesamten erwarteten zukünftigen Aufwendungen für Versicherungsfälle ab Alter x (ohne Kosten; Leistungsbarwert) plus einmaliger Zillmerbetrag zu Versicherungsbeginn im Alter x	=	Summe der diskontierten gesamten erwarteten zukünftigen Einnahmen an gleichbleibender *gezillmerter* Nettoprämie ab Alter x und diesbezügliche Zinsen (Barwert der *gezillmerten* Nettoprämien)
unter der Annahme gleichbleibender Rechnungsgrundlagen über die gesamte Versicherungslaufzeit für eine homogene Risikogruppe		

Definition.

Zu den Rechnungsmäig-Lebenden l_x und dem Diskontierungsfaktor $v := \frac{1}{1+r}$ zum Rechnungszins r wird definiert:

- Diskontierte Lebende zum Alter x: $D_x := l_x \cdot v^x$.
- Summe diskontierte Lebende ab Alter x: $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$.
- Diskontierte normierte Schäden zum Alter x: $O_x := D_x \cdot k_x$.

- Summe diskontierte normierte Schäden ab Alter x: $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$.
- Die Werte D_x, N_x, O_x und U_x heißen zusammengefasst Kommutationswerte (Bezeichnung in der Lebensversicherung erstmals 1785 verwendet).

Herleitung der Nettoprämie.

Bestimmung der Nettoprämie P_x zum beliebigem, aber festem Alter x mittels Äquivalenzprinzip (in der Krankenversicherungsmathematik ist es unüblich für das beliebige, aber feste Alter die Bezeichnung x_0 zu verwenden):

			zukünftige erwartete Versicherungsleistungen			zukünftige erwartete Prämieneinnahmen		
Jahr	Dis-kont.	An-zahl VP	mittl. Leis-tung	Leistungs-volumen	diskontiertes Leistungs-volumen	Ein-zel-zahl.	Zahlungs-volumen	diskontiertes Zahlungs-volumen
t_0+0	v^0	l_{x+0}	K_{x+0}	$l_{x+0} \cdot K_{x+0}$	$l_{x+0} \cdot K_{x+0} \cdot v^0$	P_x	$l_{x+0} \cdot P_x$	$l_{x+0} \cdot P_x \cdot v^0$
t_0+1	v^1	l_{x+1}	K_{x+1}	$l_{x+1} \cdot K_{x+1}$	$l_{x+1} \cdot K_{x+1} \cdot v^1$	P_x	$l_{x+1} \cdot P_x$	$l_{x+1} \cdot P_x \cdot v^1$
t_0+2	v^2	l_{x+2}	K_{x+2}	$l_{x+2} \cdot K_{x+2}$	$l_{x+2} \cdot K_{x+2} \cdot v^2$	P_x	$l_{x+2} \cdot P_x$	$l_{x+2} \cdot P_x \cdot v^2$
$\vdots$					$\vdots$			$\vdots$
$t_0+\mu$	v^μ	$l_{x+\mu}$	$K_{x+\mu}$	$l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu}$	$l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot v^\mu$	P_x	$l_{x+\mu} \cdot P_x$	$l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot v^\mu$
$\vdots$					$\vdots$			$\vdots$
Kollektivsumme bezüglich Barwerte zum Bezugsjahr t_0					$l_x \cdot GA_x$ °)			$l_x \cdot Pa_x$ °)

°) unnormierte Barwerte GA_x, Pa_x je versicherter Person [VP]

mit: Diskontierungsfaktor v, $v = \frac{1}{1+r}$ zum Rechnungszins r
Anzahl Rechnungsmäßig-Lebende l_x
rechnungsmäßige unnormierte Kopfschäden $K_x = G \cdot k_x$ mit Grundkopfschaden G und normierten Kopfschäden k_x
kalkulatorisches Endalter x_ω

- Gesamtes diskontiertes Leistungsvolumen $l_x \cdot GA_x$:

$$l_x \cdot GA_x := l_{x+0} \cdot K_{x+0} \cdot v^0 + l_{x+1} \cdot K_{x+1} \cdot v^1 + l_{x+2} \cdot K_{x+2} \cdot v^2 + \ldots + l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot v^\mu + \ldots \quad (1:7)$$

  - Division durch l_{x+0}, rechte Seite in Summenschreibweise:

$$GA_x = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{\mu \geq 0} \left(l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot v^\mu \right)$$

  - Erweiterung mit v^x:

$$GA_x = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{\mu \geq 0} \left(l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot \frac{v^{\mu} \cdot v^{x}}{v^{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{l_x} \cdot \frac{1}{v^x} \cdot \sum_{\mu \geq 0} \left(l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu} \right)$$

- Erweiterung mit diskontierten Lebenden $D_x := l_x \cdot v^x$ gemäß Formel (1:3, p. 10):

$$GA_x = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\mu \geq 0} \left(D_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \right)$$

- Umparametrisierung Summe $x + \mu \mid \mu \geq 0 \rightarrow \xi \mid \xi \geq x$ [dazu $\xi := x + \mu \wedge \mu \geq 0 \;\Rightarrow\; \xi \geq x$]:

$$GA_x = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\xi \geq x} \left(D_{\xi} \cdot K_{\xi} \right)$$

- es ist $\forall x \mid x \geq x_{\omega}+1 : l_x = 0$ (kalkulatorisches Endalter x_{ω}):

$$GA_x = \frac{\sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} \left(D_{\xi} \cdot K_{\xi} \right)}{D_x} \tag{1:8}$$

- mit der Darstellung der unnormierten Kopfschäden K_{ξ} mit Grundkopfschäden G und Profil $\left\{ k_{\xi} \right\}_{x_{\alpha} \leq \xi \leq x_{\omega}}$ gemäß $K_{\xi} = G \cdot k_{\xi}$:

$$GA_x = \frac{\sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} \left(D_{\xi} \cdot G \cdot k_{\xi} \right)}{D_x}$$

$$= G \cdot \frac{\sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} \left(D_{\xi} \cdot k_{\xi} \right)}{D_x}$$

- mit diskontierten Schäden $O_{\xi} := D_{\xi} \cdot k_{\xi}$ gemäß Formel (1:5, p. 10):

$$GA_x = G \cdot \frac{\sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} O_{\xi}}{D_x}$$

- mit Summe der diskontierten Schäden $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_{\omega}} O_{\xi}$ gemäß Formel (1:6, p. 10):

$$GA_x = G \cdot \frac{U_x}{D_x}. \tag{1:9}$$

- Gesamtes diskontiertes Zahlungsvolumen $l_x \cdot Pa_x$:

$$l_x \cdot Pa_x := l_{x+0} \cdot P_x \cdot v^0 + l_{x+1} \cdot P_x \cdot v^1 + l_{x+2} \cdot P_x \cdot v^2 + \ldots + l_{x+\mu} \cdot P_x \cdot v^{\mu} + \ldots \tag{1:10}$$

- analog zu gesamtem diskontierten Leistungsvolumen gemäß Formel (1:7, p. 13) mit $K_\xi \equiv P_x$, daher gemäß Formel (1:8, p. 14):

$$Pa_x = \frac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} \left(D_\xi \cdot P_x \right)}{D_x}$$

- P_x unabhängig von Summationsvariable ξ:

$$Pa_x = P_x \cdot \frac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi}{D_x}$$

- mit Summe der diskontierten Lebenden $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$ gemäß Formel (1:4, p. 10):

$$Pa_x = P_x \cdot \frac{N_x}{D_x} . \qquad (1{:}11)$$

- Grundständiges Äquivalenzprinzip zum Alter x gemäß Formel (1:1, p. 10) mit Formeln (1:9, p. 14) und (1:11, p. 15) lautet:

$$GA_x = Pa_x$$

$$G \cdot \frac{U_x}{D_x} = P_x \cdot \frac{N_x}{D_x} \qquad (1{:}12)$$

$$P_x = G \cdot \frac{U_x}{N_x} \qquad (1{:}13)$$

  d.h. $\text{Nettoprämie} = \dfrac{\text{Summe diskontierte Schäden}}{\text{Summe diskontierte Lebende}}$,
  dabei ist auf die Normierung zu achten

In den Abschnitten 1.1.2 bis 1.1.4 erfolgt nun die Darstellung gemäß Anlage 1.A KVAV, gezillmerte Nettoprämien (dazu Abschnitt 1.1.8, p. 34) werden in der KVAV nicht verwendet.

1.1.2 Rentenbarwert.

Rentenbarwerte.

$a_x = \dfrac{N_x}{D_x} = \dfrac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi}{D_x}$	Rentenbarwert zum Alter x (normierter Jahreswert)	(1:14)
$a_{x:x+k} = \dfrac{N_x - N_{x+k}}{D_x}$	abgekürzter Rentenbarwert zum Alter x (normierter Jahreswert)	(1:15)
$a_{x\|x+k} = \dfrac{N_{x+k}}{D_x}$	aufgeschobener Rentenbarwert zum Alter x (normierter Jahreswert)	(1:16)

Definition, Berechnung und Abhängigkeiten.

- Der (normierte) Rentenbarwert a_x [RBW] zum Alter x gibt für x-Jährige den anfänglich einmalig zu zahlenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω jährlich jeweils eine Rente von 1 zu finanzieren; die Rentenzahlungen erfolgen dabei ab dem ersten Jahr vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn – es handelt sich hierbei um eine vorgelagerte Einmalbetragszahlung.
- Der Rentenbarwert a_x für das Alter x lässt sich als Quotient $\frac{N_x}{D_x}$ aus der Summe N_x der diskontierten Lebenden D_ξ durch die diskontierten Lebenden D_x darstellen:

  $$a_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

- Der Rentenbarwert a_x ist abhängig von:
  - dem Alter x;
  - dem Rechnungszins r;
  - der Lebendenordnung $\{l_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$, d.h. von der Ausscheideordnung (Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten).

Herleitung.

- Dazu Formel (1:10, p. 14) mit $P_x = 1$:

  $$l_x \cdot 1a_x = l_{x+0} \cdot 1 \cdot v^0 + l_{x+1} \cdot 1 \cdot v^1 + l_{x+2} \cdot 1 \cdot v^2 + \ldots + l_{x+\mu} \cdot 1 \cdot v^\mu + \ldots \qquad (1:17)$$

- und Formel (1:11, p. 15) mit $P_x = 1$:

  $$a_x = 1a_x = 1 \cdot \frac{N_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}.$$ ■

Zahlenbeispiel.

		r:	2,5%		
		v:	0,9756		
x	l_x	v^x	D_x	N_x	a_x
1	100	0,9756	97,56	369,71	3,79
2	91	0,9518	86,61	272,15	3,14
3	81	0,9286	75,22	185,54	2,47
4	73	0,9059	66,13	110,32	1,67
5	50	0,8838	44,19	44,19	1,00

Bemerkung.

- Es gilt für $r \geq 0$ die Beziehung: $\forall \mu \mid \mu \geq 1 : l_{x_E+\mu} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{x_E} = 1$. (1:18)
  Speziell ist $a_{x_\omega} = 1$.
  - Begründung: $a_{x_E} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{N_{x_E}}{D_{x_E}} = 1 \;\Leftrightarrow\; N_{x_E} = D_{x_E} \;\Leftrightarrow\; \sum_{\xi \geq x_E} D_\xi = D_{x_E} \;\Leftrightarrow$
    $\left(\sum_{\xi \geq x} D_\xi\right) - D_{x_E} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{\xi \geq x_E+1} D_\xi = 0 \;\overset{D_\xi := l_\xi \cdot v^\xi}{\Leftrightarrow}\; \sum_{\xi \geq x_E+1} l_\xi \cdot v^\xi = 0 \;\overset{\forall \xi \mid l_\xi \geq 0 \,\wedge\, v \neq 0}{\Leftrightarrow}$
    $\forall \xi \mid \xi \geq x_{x_E} + 1 : l_\xi = 0 \;\overset{\text{Umparametrisierung}}{\Leftrightarrow}\; \forall \mu \mid \mu \geq 1 : l_{x_{x_E}+\mu} = 0$. ■

- Es gilt die Beziehung: (1:19)
  $a_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \underbrace{1}_{\text{Zahlung zum Alter } x} + \underbrace{a_{x+1}}_{\text{Rentenbarwert zum Alter } x+1} \cdot \underbrace{\frac{D_{x+1}}{D_x}}_{\text{Verzinsung und Vererbung zwischen den Altern } x \text{ und } x+1}$ und somit
  $a_x \geq 1$ für $r \geq 0$.
  - Begründung: Mit $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$ gemäß Formel (1:4, p. 10) ist:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi}{D_x} = \frac{D_x + \sum_{\xi=x+1}^{x_\omega} D_\xi}{D_x} = \frac{D_x}{D_x} + \frac{\sum_{\xi=x+1}^{x_\omega} D_\xi}{D_x}$$

$$= 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = 1 + \frac{N_{x+1} \cdot D_{x+1}}{D_{x+1} \cdot D_x} = 1 + a_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}.$$ ■

- Es ist $a_x \geq 1$ für $r \geq 0$.
  - Begründung: $a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x}$ mit $D_x > 0$ und $D_{x+1} \geq 0$. ■

- Die Höhe der Rentenbarwerte ist vom gewählten Startwert l_{x_α} unabhängig, zumindest algebraisch – numerisch kann es auf Grund von Rundungen zu Abweichungen kommen, daher ist l_{x_α} genügend groß zu wählen.
  - Begründung: Sei $\hat{l}_{x_\alpha} = fl \cdot l_{x_\alpha}$ ein anderer Startwert für die Überlebendenordnung bezüglich des beliebigen Faktors fl. Mit $l_{x+1} = l_x \cdot (1 - s_x)$ ist per vollständiger Induktion $\hat{l}_{x+1} = \hat{l}_x \cdot (1 - s_x) = fl \cdot l_x \cdot (1 - s_x) = fl \cdot l_{x+1}$ und mit $a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{\sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot l_\xi}{v^x \cdot l_x}$ ist $\hat{a}_x = \frac{\hat{N}_x}{\hat{D}_x} = \frac{\sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot \hat{l}_\xi}{v^x \cdot \hat{l}_x} =$
$\frac{\sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot fl \cdot l_\xi}{v^x \cdot fl \cdot l_x} = \frac{fl \cdot \sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot l_\xi}{fl \cdot v^x \cdot l_x} = \frac{\sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot l_\xi}{v^x \cdot l_x} = a_x$. ■

Weitere in der KV gebräuchliche Rentenbarwerte.

- Der (normierte) abgekürzte Rentenbarwert $a_{x:x+k}$ zum Alter x gibt für x-Jährige den anfänglich einmalig zu zahlenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω jährlich für k Jahre jeweils eine Rente von 1 zu finanzieren, die Rentenzahlungen erfolgen dabei ab dem ersten Jahr vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn.

  Der (normierte) abgekürzte Rentenbarwert $a_{x:x+k}$ für das Alter x lässt sich als Quotient $\frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}$ aus der abgekürzten Summe $(N_x - N_{x+k})$ von diskontierten Lebenden D_ξ durch die diskontierten Lebenden D_x darstellen:

  $$a_x = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}.$$

  - Begründung:
    $l_x \cdot 1a_x = l_{x+0} \cdot 1 \cdot v^0 + l_{x+1} \cdot 1 \cdot v^1 + l_{x+2} \cdot 1 \cdot v^2 + \ldots + l_{x+\mu} \cdot 1 \cdot v^\mu + \ldots$ gemäß Formel (1:17, p. 16) zum Bezugsalter x für k Rentenzahlungen in den Jahren μ, $\mu = 0, 1, \ldots, k\text{-}1$ lautet:

    $$l_x \cdot 1a_{x:x+k} = l_{x+0} \cdot 1 \cdot v^0 + l_{x+1} \cdot 1 \cdot v^1 + l_{x+2} \cdot 1 \cdot v^2 + \ldots + l_{x+\mu} \cdot 1 \cdot v^\mu + \ldots + l_{x+k-1} \cdot 1 \cdot v^{k-1}$$

    und somit

    $$a_{x:x+k} = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{\mu=0}^{k-1} l_{x+\mu} \cdot v^\mu = \frac{1}{l_x \cdot v^x} \cdot \sum_{\mu=0}^{k-1} l_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+k-1} l_\xi \cdot v^\xi$$

    $$= \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\xi=x}^{x+k-1} D_\xi = \frac{1}{D_x} \cdot \left(\sum_{\xi \geq x} D_\xi - \sum_{\xi \geq x+k} D_\xi \right)$$

    $$= \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}$$ ■

- Der (normierte) aufgeschobene Rentenbarwert $a_{x|x+k}$ zum Alter x gibt für x-Jährige den anfänglich einmalig zu zahlenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω erstmals nach k Jahren jährlich jeweils eine Rente von 1 zu finanzieren, die Rentenzahlungen erfolgen dabei ab dem Jahr k vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn.

  Der (normierte) aufgeschobene Rentenbarwert $a_{x|x+k}$ für das Alter x lässt sich als Quotient $\frac{N_{x+k}}{D_x}$ aus der Summe N_{x+k} zum verschobenen Alter $x+k$ von diskontierten Lebenden D_ξ durch die diskontierten Lebenden D_x zum Alter x oder an Hand des vererbten und verzinsten Rentenbarwertes a_{x+k} zum Alter $x+k$ darstellen:

  $$a_{x|x+k} = \frac{N_{x+k}}{D_x} = \underbrace{\frac{D_{x+k}}{D_x}}_{\text{Verzinsung und Vererbung}} \cdot \underbrace{a_{x+k}}_{\text{RBW zum Alter } x+k} .$$

  - Begründung
    $l_x \cdot 1a_x = l_{x+0} \cdot 1 \cdot v^0 + l_{x+1} \cdot 1 \cdot v^1 + l_{x+2} \cdot 1 \cdot v^2 + \ldots + l_{x+\mu} \cdot 1 \cdot v^\mu + \ldots$ gemäß Formel (1:17, p. 16) zum Bezugsalter $x = 0$ und Rentenzahlungen in den Jahren μ, $\mu = k, k+1, k+2, \ldots$ lautet:

    $$l_x \cdot 1a_{x|x+k} = l_{x+k} \cdot 1 \cdot v^k + l_{x+k+1} \cdot 1 \cdot v^{k+1} + l_{x+k+2} \cdot 1 \cdot v^{k+2} + \ldots + l_{x+k+\mu} \cdot 1 \cdot v^{k+\mu} + \ldots$$

    und somit

    $$\begin{aligned} a_{x|x+k} &= \frac{1}{l_x} \cdot \sum\nolimits_{\mu \ge k} l_{x+\mu} \cdot v^\mu = \frac{1}{l_x \cdot v^x} \cdot \sum\nolimits_{\mu \ge k} l_{x+\mu} \cdot v^{x+\mu} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum\nolimits_{\xi \ge x+k} l_\xi \cdot v^\xi \\ &= \frac{1}{D_x} \cdot \sum\nolimits_{\xi \ge x+k} D_\xi \\ &= \frac{N_{x+k}}{D_x} \qquad \square \\ &= \frac{N_{x+k} \cdot D_{x+k}}{D_{x+k} \cdot D_x} \\ &= \frac{D_{x+k}}{D_{x+k}} \cdot a_{x+k} . \qquad \square\blacksquare \end{aligned}$$

- Der Rentenbarwert a_x setzt sich aus abgekürztem Rentenbarwert $a_{x;x+k}$ und aufgeschobenem Rentenbarwert $a_{x|x+k}$ zusammen, d.h. $a_x = a_{x:x+k} + a_{x|x+k}$.

  - Begründung: $a_{x:x+k} + a_{x|x+k} = \frac{N_{x+k}}{D_x} + \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} = a_x$ $\blacksquare$

- Die genannten Rentenbarwerte gehen von jährlich vorschüssigen Rentenzahlungen aus. Bei unterjährigen Zahlungen (monatlich, quartalsweise) gestalten sie sich entsprechend komplexer, sie sind jedoch bei der KV-Tarifkalkulation eher ungebräuchlich.

1.1.3 Leistungsbarwert.

Leistungsbarwert. (1:20)

$$A_x = \frac{U_x}{D_x} = \frac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi \cdot k_\xi}{D_x}$$

Leistungsbarwert zum Alter x (normierter Jahreswert)

Definition, Berechnung und Abhängigkeiten.

- Der (normierte) Leistungsbarwert A_x [LBW] zum Alter x gibt für x-Jährige den anfänglich einmalig zu zahlenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ eine veränderliche Rente (Zahlung) in Höhe $k_{x+\mu}$ ($\mu \geq 0$) zu finanzieren; die Rentenzahlungen erfolgen dabei ab dem ersten Jahr vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn – es handelt sich hierbei um eine vorgelagerte Einmalbetragszahlung.
- Der (normierte) Leistungsbarwert A_x für das Alter x lässt sich als Quotient $\frac{U_x}{D_x}$ aus der Summe U_x der diskontierten normierten Schäden O_ξ durch die diskontierten Lebenden D_x darstellen:

$$A_x = \frac{U_x}{D_x}.$$

- Der (normierte) Leistungsbarwert A_x ist abhängig von:
  - dem Alter x;
  - dem Rechnungszins r;
  - der Lebendenordnung $\{l_x\}_{x_\alpha \leq x \leq x_\omega}$, d.h. von der Ausscheideordnung (Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten);
  - dem Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \leq x \leq x_\omega}$.

Herleitung.

- $l_x \cdot GA_x = \quad l_{x+0} \cdot K_{x+0} \cdot v^0 + l_{x+1} \cdot K_{x+1} \cdot v^1 + l_{x+2} \cdot K_{x+2} \cdot v^2 + \ldots + l_{x+\mu} \cdot K_{x+\mu} \cdot v^\mu + \ldots$ gemäß Formel (1:7, p. 13) und $GA_x = G \cdot \frac{U_x}{D_x}$ gemäß Formel (1:9, p. 14) mit $G = 1$, $\forall \xi : k_\xi = K_\xi$:

$$A_x = 1A_x = 1 \cdot \frac{U_x}{D_x} = \frac{U_x}{D_x}\,. \qquad \blacksquare$$

Zahlenbeispiel.

x	D_x	K_x	GO_x	GU_x	GA_x
1	97,56	10,00	975,60	6.832,75	70,04
2	86,61	10,00	866,10	5.857,15	67,63
3	75,22	15,00	1.128,30	4.991,05	66,35
4	66,13	25,00	1.653,25	3.862,75	58,41
5	44,19	50,00	2.209,50	2.209,50	50,00

Bemerkung.

- Es gilt die Beziehung: $\forall\mu \mid \mu \geq 1 : l_{x_E+\mu} = 0 \;\Rightarrow\; A_{x_E} = k_{x_E}$. Speziell ist $A_{x_\omega} = k_{x_\omega}$. (1:21)
  - Begründung: Mit $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$ gemäß Formel (1:6, p. 10), $D_x := l_x \cdot v^x$ gemäß Formel (1:3, p. 10) sowie $O_\xi := D_\xi \cdot k_\xi$ gemäß Formel (1:5, p. 10) folgt aus $\forall\mu \mid \mu \geq 1 : l_{x_E+\mu} = 0$:

$$A_{x_E} = \frac{U_{x_E}}{D_{x_E}} = \frac{\sum_{\xi=x_E}^{x_\omega} O_\xi}{l_{x_E} \cdot v^{x_E}} = \frac{\sum_{\xi=x_E}^{x_\omega} D_\xi \cdot k_\xi}{l_{x_E} \cdot v^{x_E}}$$

$$= \frac{\sum_{\xi=x_E}^{x_\omega} l_\xi \cdot v^\xi \cdot k_\xi}{l_{x_E} \cdot v^{x_E}} = \frac{\sum_{\xi=x_E}^{x_E} l_\xi \cdot v^\xi \cdot k_\xi}{l_{x_E} \cdot v^{x_E}} = \frac{l_{x_E} \cdot v^{x_E} \cdot k_{x_E}}{l_{x_E} \cdot v^{x_E}} = k_{x_E} \qquad \blacksquare$$

- Es gilt die Beziehung: (1:22)

$$A_x = k_x + \frac{U_{x+1}}{D_x} = \underbrace{k_x}_{\substack{\text{Zahlung}\\ \text{zum Alter } x}} + \underbrace{A_{x+1}}_{\substack{\text{Leistungsbarwert}\\ \text{zum Alter } x+1}} \cdot \underbrace{\frac{D_{x+1}}{D_x}}_{\substack{\text{Verzinsung und}\\ \text{Vererbung zwischen}\\ \text{den Altern } x \text{ und } x+1}}\,.$$

  - Begründung: Mit $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$ gemäß Formel (1:6, p. 10) sowie $O_\xi := D_\xi \cdot k_\xi$ gemäß Formel (1:5, p. 10) ist:

$$A_x = \frac{U_x}{D_x} = \frac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi}{D_x} = \frac{O_x + \sum_{\xi=x+1}^{x_\omega} O_\xi}{D_x} = \frac{O_x}{D_x} + \frac{\sum_{\xi=x+1}^{x_\omega} O_\xi}{D_x}$$

$$= \frac{D_x \cdot k_x}{D_x} + \frac{U_{x+1}}{D_x} = k_x + \frac{U_{x+1}}{D_x} = k_x + \frac{U_{x+1} \cdot D_{x+1}}{D_{x+1} \cdot D_x} = k_x + A_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x} \qquad \blacksquare$$

- Die Höhe der Leistungsbarwerte ist vom gewählten Startwert l_{x_α} unabhängig, zumindest algebraisch – numerisch kann es auf Grund von Rundungen zu Abweichungen kommen, daher ist l_{x_α} genügend groß zu wählen.
  - Begründung: Sei $\hat{l}_{x_\alpha} = fl \cdot l_{x_\alpha}$ ein anderer Startwert für die Überlebendenordnung bezüglich des beliebigen Faktors fl. Mit $l_{x+1} = l_x \cdot (1 - s_x)$ ist per vollständiger Induktion $\hat{l}_{x+1} = \hat{l}_x \cdot (1 - s_x) = fl \cdot l_x \cdot (1 - s_x) = fl \cdot l_{x+1}$ und mit $A_x = \frac{U_x}{D_x} = \frac{\sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot l_\xi \cdot k_\xi}{v^x \cdot l_x}$ ist

$$\hat{A}_x = \frac{\hat{U}_x}{\hat{D}_x} = \frac{\sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot \hat{l}_\xi \cdot k_\xi}{v^x \cdot \hat{l}_x}$$

$$= \frac{\sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot fl \cdot l_\xi \cdot k_\xi}{v^x \cdot fl \cdot l_x} = \frac{fl \cdot \sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot l_\xi \cdot k_\xi}{fl \cdot v^x \cdot l_x} = \frac{\sum_{\xi \geq x} v^\xi \cdot l_\xi \cdot k_\xi}{v^x \cdot l_x} = A_x \qquad \blacksquare$$

1.1.4 Nettoprämie.

Nettoprämie.		(1:23)
normiert	*unnormiert*	
$p_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{U_x}{N_x}$	$P_x = G \cdot \frac{A_x}{a_x} = G \cdot \frac{U_x}{N_x}$	Nettoprämie zum Alter x (ungezillmerter Jahreswert)

Definition und Berechnung.

- Die normierte Nettoprämie p_x zum Alter x gibt für Ursprünglich-x-Jährige den jährlich während der Zugehörigkeit zum Kollektiv zu zahlenden gleichbleibenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ eine veränderliche Rente (Zahlung) in Höhe $k_{x+\mu}$ ($\mu \geq 0$) zu finanzieren; die Prämienzahlungen und die Rentenzahlungen (beide ab dem ersten Jahr) erfolgen dabei jeweils vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn – es handelt sich hierbei um laufende Prämien- und Rentenzahlungen.
- Die normierte Nettoprämie p_x für das Alter x lässt sich als Quotient $\frac{U_x}{N_x}$ aus der Summe U_x der diskontierten Schäden O_x durch die Summe N_x der diskontierten Lebenden D_x darstellen:

$$p_x = \frac{U_x}{N_x}.$$

- Der normierte Nettoprämie p_x ist abhängig von:
  - dem Alter x;
  - dem Rechnungszins r;
  - der Lebendenordnung $\{l_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$, d.h. von der Ausscheideordnung (Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten);
  - dem Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$.

Herleitung.

- Dazu $G \cdot \frac{U_x}{D_x} = P_x \cdot \frac{N_x}{D_x}$ gemäß Formel (1:12, p. 15) ($\Rightarrow$ $P_x = G \cdot \frac{U_x}{N_x}$) und die Berechnungen von Renten- und Leistungsbarwerten $a_x = \frac{N_x}{D_x}$ und $A_x = \frac{U_x}{D_x}$ gemäß Formeln (1:14, p. 16) resp. (1:20, p. 20):

  $G \cdot A_x = P_x \cdot a_x$

$\Rightarrow$ unnormierte ungezillmerte Jahresnettoprämie $P_x = G \cdot \dfrac{A_x}{a_x} = G \cdot \dfrac{U_x}{N_x}$;

$\Rightarrow$ normierte ungezillmerte Jahresnettoprämie $p_x = \frac{1}{G} \cdot P_x = \dfrac{A_x}{a_x} = \dfrac{U_x}{N_x}$. ■

Zahlenbeispiel.

x	GA_x	a_x	P_x
1	70,04	3,79	18,48
2	67,63	3,14	21,54
3	66,35	2,47	26,86
4	58,41	1,67	34,98
5	50,00	1,00	50,00

Bemerkung.

- Das Netto-Äquivalenzprinzip „gesamtes zukünftiges diskontiertes Ausgabenvolumen = gesamtes zukünftiges diskontiertes Einnahmenvolumen" gemäß Formel (1:1, p. 10) für die normierte Nettoberechnung lässt sich formulieren als: $A_x = p_x \cdot a_x$.
- Sei das Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \le x \le x_\omega}$ ab dem Alter x_K konstant, d.h. $\forall \xi \mid \xi \ge x_K$: $k_\xi = k_{x_K}$, sodann ist ab diesem Alter x_K auch die normierte Nettoprämie konstant, und zwar gleich dem normierten Kopfschaden k_{x_K}: $\forall \xi \mid \xi \ge x_K$: $p_\xi = k_{x_K}$, d.h.:

Es gilt die Beziehung: (1:24)
$\forall \xi \mid \xi \geq x_K : k_\xi = k_{x_K} \Rightarrow \forall \xi \mid \xi \geq x_K : p_\xi = k_{x_K}$,
speziell ist $p_{x_\omega} = k_{x_\omega}$.

- Begründung: $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$ gemäß Formel (1:6, p. 10), $O_\xi := D_\xi \cdot k_\xi$ gemäß Formel (1:5, p. 10) und $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$ gemäß Formel (1:4, p. 10):

$$p_\xi = \frac{U_\xi}{N_\xi} = \frac{\sum_{\xi'=x_K}^{x_\omega} O_{\xi'}}{N_\xi} = \frac{\sum_{\xi'=x_K}^{x_\omega} D_{\xi'} \cdot k_{\xi'}}{N_\xi} = \frac{\sum_{\xi'=x_K}^{x_\omega} D_{\xi'} \cdot k_{x_K}}{N_\xi}$$
$$= \frac{\sum_{\xi'=x_K}^{x_\omega} D_{\xi'}}{N_\xi} \cdot k_{x_K} = \frac{N_\xi}{N_\xi} \cdot k_{x_K} = k_{x_K}. \qquad \blacksquare$$

- In diesem Fall findet kein Ansparprozess statt, da rechnungsmäßig zu jedem Zeitpunkt die Einnahmen und die Ausgaben für die gleiche Personenanzahl identisch sind. Kalkulatorisch erfolgt zu Jahresbeginn die Zahlung und die Leistung, erst danach das Ausscheiden. Daher ist sowohl die Anzahl der Personen l_x als auch die Diskontierung v^x unerheblich.

- Es gilt die Beziehung: $p_x = \dfrac{O_x + p_{x+1} \cdot N_{x+1}}{N_x} = \dfrac{k_x + p_{x+1} \cdot (a_x - 1)}{a_x}$. (1:25)

  - Begründung:

    Mit $O_\xi := D_\xi \cdot k_\xi$ gemäß Formel (1:5, p. 10) und $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$ gemäß Formel (1:4, p. 10) ist:

$$p_x = \frac{U_x}{N_x} = \frac{\sum_{\xi \geq x} O_\xi}{N_x} = \frac{O_x + \sum_{\xi \geq x+1} O_\xi}{N_x} = \frac{O_x + U_{x+1}}{N_x}$$
$$= \frac{O_x + U_{x+1} \cdot \frac{N_{x+1}}{N_{x+1}}}{N_x} = \frac{O_x + \frac{U_{x+1}}{N_{x+1}} \cdot N_{x+1}}{N_x} = \frac{O_x + p_{x+1} \cdot N_{x+1}}{N_x}. \qquad \square$$

    Mit $A_x = k_x + A_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$ gemäß Formel (1:22, p. 21) und $a_x = 1 + a_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$ gemäß Formel (1:19, p. 17) ist:

$$p_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{k_x + A_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}}{a_x} = \frac{k_x + p_{x+1} \cdot a_{x+1} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}}{a_x}$$
$$p_x = \frac{k_x + p_{x+1} \cdot (a_x - 1)}{a_x}. \qquad \square\blacksquare$$

- Sei das Profil $\{k_x\}_{x_\alpha \leq x \leq x_\omega}$ monoton steigend, d.h. $\forall x, x<x_\omega : k_{x+1} \geq k_x$ und $v \geq 0$, sodann ist auch die Folge der normierten Nettoprämien $\{p_x\}_{x_\alpha \leq x \leq x_\omega}$ monoton steigend: $\forall x, x<x_\omega : p_{x+1} \geq p_x$.

  - Begründung: $p_{x+1} \geq p_x \Leftrightarrow p_{x+1} - p_x \geq 0$

mit $p_x = \frac{U_x}{N_x}$:

$$\frac{U_{x+1}}{N_{x+1}} - \frac{U_x}{N_x} \geq 0$$

mit $N_\xi \geq 0$:

$$N_x \cdot U_{x+1} - N_{x+1} \cdot U_x \geq 0$$

mit $U_{x+1} = \sum_{\xi \geq x+1} O_\xi = \sum_{\xi \geq x} O_\xi - O_x = U_x - O_x$,

$N_{x+1} = \sum_{\xi \geq x+1} D_\xi = \sum_{\xi \geq x} D_\xi - D_x = N_x - D_x$:

$$N_x \cdot (U_x - O_x) - (N_x - D_x) \cdot U_x \geq 0$$

$$N_x \cdot U_x - N_x \cdot O_x - N_x \cdot U_x + D_x \cdot U_x \geq 0$$

$$D_x \cdot U_x - N_x \cdot O_x \geq 0$$

$$D_x \cdot \sum_{\xi \geq x} k_\xi \cdot D_\xi - \sum_{\xi \geq x} D_\xi \cdot k_x \cdot D_x \geq 0$$

$$\sum_{\xi \geq x} D_x \cdot k_\xi \cdot D_\xi - \sum_{\xi \geq x} k_x \cdot D_x \cdot D_\xi \geq 0$$

$$\sum_{\xi \geq x} \underbrace{(k_\xi - k_x)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{wegen Monotonie}}} \cdot \underbrace{D_x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{D_\xi}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \blacksquare$$

1.1.5 Ungezillmerte Bruttoprämie (Teil 1: mit festem Kostensatz).

Ungezillmerte Jahresbruttoprämie (rechnerische Größe).	(1:26)
ungezillmerte Jahresbruttoprämie B_x = ungez. Jahresnettoprämie P_x + Jahresstückkosten $\Gamma_{j/s}$ + proportionaler Zuschlag $\Delta_{j/s} \cdot B_x$	
$B_x = P_x + \Gamma_{j/s} + \Delta_{j/s} \cdot B_x$	

Ungezillmerte Bruttoprämie (rechnerische Größe).		(1:27)
normiert	*unnormiert*	
$b_x = \frac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$	$B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$	ungezillmerte *Jahres*bruttoprämie zum Alter x
$\tilde{b}_x = \frac{p_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$	$\tilde{B}_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$	ungezillmerte *Monats*bruttoprämie zum Alter x

Definition, Prämienkomponenten und Berechnung.

- Die unnormierte *ungezillmerte* Bruttoprämie ${}^Z B_x$ zum Alter x gibt für Ursprünglich-x-Jährige den jährlich während der Zugehörigkeit zum Kollektiv zu zahlenden gleichbleibenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ den unnormierten Kopfschaden in Höhe

$K_{x+\mu}$ ($\mu \geq 0$) samt der Kosten ohne Zillmerung zu finanzieren; die Prämienzahlungen sowie die Kopfschadenzahlungen (beide ab dem ersten Jahr) erfolgen dabei jeweils vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn. Das Gleichbleiben bezieht sich auf den Nettoanteil der Bruttoprämie (d.h. ohne Beachtung einer evtl. Änderung bezüglich des Grenzalters x_s).

- Die unnormierte *ungezillmerte* Bruttoprämie B_x zum Alter x ist – im Sinne der allgemeineren Form der Beitragsberechnung mit Zillmerung (dazu Abschnitt 1.1.6, p. 27) – eine rein rechnerische Größe, sie stellt die unnormierte *gezillmerte* Bruttoprämie ${}^{Z}B_x$ (dazu Abschnitt 1.1.7, p.29) ohne Einrechnung der Zillmerung dar. Bei Tarifen ohne Zillmerung stellt sie als Spezialfall diese unnormierte *gezillmerte* Bruttoprämie ${}^{Z}B_x$ dar.
- Die unnormierte *ungezillmerte* Jahresbruttoprämie B_x, $B_x = P_x + \Gamma_{j/s} + \Delta_{j/s} \cdot B_x$ setzt sich (analog Formel (1:30, p. 29)) zusammen aus:
  - der (unnormierten *ungezillmerten* jährlichen) Nettoprämie P_x gemäß Formel (1:23, p. 22);
  - den (unnormierten jährlichen) Stückkosten $\Gamma_{j/s}$ ($\Gamma_{j/s} = G \cdot \gamma_{j/s}$);
  - dem (unnormierten jährlichen) Zuschlag $\Delta_{j/s} \cdot B_x$ aus dem beitragsproportionalem Zuschlag $\Delta_{j/s}$ auf die (unnormierte) ungezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B_x$.
- Die unnormierte *ungezillmerte* Jahresbruttoprämie B_x zum Alter x lässt sich darstellen als:

$$B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}.$$

Herleitung.

- Es ist $B_x = P_x + \Gamma_{j/s} + \Delta_{j/s} \cdot B_x$.

$\Rightarrow$ $B_x \cdot (1 - \Delta_{j/s}) = P_x + \Gamma_{j/s}$

$\Rightarrow$ unnormierte ungezillmerte Jahresbruttoprämie B_x, $B_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$;

- mit $b_x := \frac{1}{G} \cdot B_x$:

$$b_x = \frac{\frac{1}{G} \cdot P_x + \frac{1}{G} \cdot \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$$

$\Rightarrow$ normierte ungezillmerte Jahresbruttoprämie b_x, $b_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$;

- mit $\widetilde{B}_x := \frac{1}{12} \cdot B_x$:

$\Rightarrow$ unnormierte ungezillmerte Monatsbruttoprämie $\widetilde{B}_x$, $\widetilde{B}_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$;

- mit $\widetilde{b}_x := \frac{1}{G} \cdot \widetilde{B}_x$:

$$\widetilde{b}_x = \frac{\frac{1}{G} \cdot P_x + \frac{1}{G} \cdot \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$$

$\Rightarrow$ normierte ungezillmerte Monatsbruttoprämie $\widetilde{b}_x$, $\widetilde{b}_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$. ■

Bemerkung.

- Eine Darstellung der Stückkosten an Hand eines beitragsproportionalen Zuschlags gemäß Formel (1:37, p. 43) unterbleibt, da sich der beitragsproportionale Zuschlag auf den gezillmerten Bruttobeitrag bezieht.

1.1.6 Zillmerprämie (Zillmerverfahren Teil 1).

Zillmerprämie.	*unnormiert*	(1:28)
	$ZP_x = \dfrac{ZB_x}{a_x}$	Zillmerprämie zum Alter x für den Zillmerbetrag ZB_x (Jahreswert)

Zillmerprämie bezüglich gezillmertem Bruttobeitrag. *normiert*	*unnormiert*	(1:29)
$zp_x = \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^Z b_x}{12 \cdot a_x}$	$ZP_x = \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^Z B_x}{12 \cdot a_x}$	Zillmerprämie zum Alter x (Jahreswert)

Definition und Berechnung.

- Die unnormierte Zillmerprämie ZP_x zum Alter x gibt für Ursprünglich-x-Jährige den jährlich während der Zugehörigkeit zum Kollektiv zu zahlenden gleichbleibenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω den anfänglich einmaligen Betrag ZB_x zu finanzieren; die Prämienzahlungen (ab dem ersten Jahr) und auch die Einmalzahlung erfolgen dabei jeweils vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn – es handelt sich hierbei um nachgelagerte laufende Prämienzahlungen.
- Die unnormierte Zillmerprämie ZP_x für das Alter x lässt sich als Quotient $\frac{ZB_x}{a_x}$ aus dem Zillmerbetrag ZB_x durch den Rentenbarwert a_x darstellen:

$$ZP_x = \frac{ZB_x}{a_x}.$$

Herleitung.

- Äquivalenzprinzip $GA_x = Pa_x$ zum Alter x gemäß Formel (1:1, p. 10) für Zillmerung lautet: $ZB_x = ZPa_x$
  - mit Zillmerbetrag ZB_x als einmalige Leistung nur zu Versicherungsbeginn im ersten Jahr, d.h. $GA_x = ZB_x$ als gesamtes diskontiertes Leistungsvolumen GA_x,
  - mit Zillmerprämie ZP_x als über die Vertragsdauer zu zahlende konstante Prämie, d.h. $ZPa_x = ZP_x \cdot a_x$ als gesamtes diskontiertes Zahlungsvolumen Pa_x.
- Begründung: $GA_x = G \cdot \frac{U_x}{D_x}$ gemäß Formel (1:20, p. 20), mit $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi$ gemäß Formel (1:6, p. 10) und $O_\xi := D_\xi \cdot k_\xi$ gemäß Formel (1:5, p. 10) sowie mit $G = 1$ und $k_{x+0} = ZB_x \wedge \forall \mu \mid \mu > 0 : k_{x+\mu} = 0$:

$$U_x = \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi \cdot k_\xi = D_x \cdot k_x + \sum_{\xi=x+1}^{x_\omega} D_\xi \cdot k_\xi = D_x \cdot ZB_x + \sum_{\xi=x+1}^{x_\omega} 0 = D_x \cdot ZB_x$$

$$\Rightarrow GA_x = \frac{U_x}{D_x} = \frac{D_x \cdot ZB_x}{D_x} = ZB_x$$

mit $ZB_x = ZPa_x$ und $ZPa_x = ZP_x \cdot a_x$

$$\Rightarrow ZP_x = \frac{ZB_x}{a_x}.$$

■

Zahlenbeispiel.

x	a_x	ZB_x	ZP_x
1	3,79	4,90	1,29
2	3,14	5,57	1,77
3	2,47	6,75	2,73
4	1,67	3,87	2,32
5	1,00	0,00	0,00

Bemerkung.

- Der Zillmerbetrag ZB_x wird i.d.R. als Anzahl α_x^Z (Zillmersatz) der gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^Z\tilde{B}_x$ (Endprämie) dargestellt, dadurch geht die Endprämie in den Zillmerbetrag ZB_x ein:

$$ZB_x = \alpha_x^Z \cdot \frac{^ZB_x}{12}\text{, demgemäß ist } ZP_x = \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x}{12 \cdot a_x}\text{,}$$

allerdings wird die gezilllmerte Bruttoprämie erst im nächsten Abschnitt erläutert.

Achtung: im Anlage 1.A. „Prämienberechnung des Neuzugangs“ KVAV ist α_x als die Anzahl an gezillmerter *Jahres*prämien definiert, d.h. $\alpha_x^{\text{KalV}} = \frac{1}{12} \cdot \alpha_x^Z$)!

- Die unmittelbare Darstellung der gezillmerten Nettoprämie ohne Monatsbruttoprämien ${}^Z\tilde{B}_x$ erfolgt in Abschnitt 1.1.8, p. 34.
- Eine aktuarielle Nebenbedingung bei der Grundfassung des Zilmmerverfahrens wird ebenfalls in Abschnitt 1.1.8, p. 34 behandelt.

1.1.7 Gezillmerte Bruttoprämie (Teil 1: mit festem Kostensatz).

Gezillmerte Jahresbruttoprämie. (1:30)

gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^ZB_x$ = ungezillmerte Jahresnettoprämie P_x
+ Jahreszillmerprämie ZP_x
+ Jahresstückkosten $\Gamma_{i/s}$
+ proportionaler Zuschlag $\Delta_{i/s} \cdot {}^ZB_x$

$${}^ZB_x = P_x + ZP_x + \Gamma_{i/s} + \Delta_{i/s} \cdot {}^ZB_x$$

Gezillmerte Bruttoprämie. (1:31)

normiert	*unnormiert*	
${}^Zb_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$	${}^ZB_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$	gezillmerte *Jahres*bruttoprämie zum Alter x
${}^Z\tilde{b}_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \dfrac{\alpha_x^Z}{a_x}}$	${}^Z\tilde{B}_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \dfrac{\alpha_x^Z}{a_x}}$	gezillmerte *Monats*bruttoprämie zum Alter x

Definition, Prämienkomponenten und Berechnung.

- Die unnormierte *gezillmerte* Bruttoprämie ${}^ZB_x$ zum Alter x gibt für Ursprünglich-x-Jährige den jährlich während der Zugehörigkeit zum Kollektiv zu zahlenden gleichbleibenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ den unnormierten Kopfschaden in Höhe $K_{x+\mu}$ ($\mu \geq 0$) samt aller Kosten (incl. Zillmerung) zu finanzieren; die Prämienzahlungen sowie die Kopfschadenzahlungen (beide ab dem ersten Jahr) und auch die Einmalzahlung erfolgen dabei jeweils vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn. Das Gleichbleiben bezieht sich auf den Nettoanteil der Bruttoprämie (d.h. ohne Beachtung einer evtl. Änderung bezüglich des Grenzalters x_s).

- Die unnormierte gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B_x$, ${}^{Z}B_x = P_x + ZP_x + \Gamma_{j/s} + \Delta_{j/s} \cdot {}^{Z}B_x$ zum Alter x setzt sich zusammen aus:
  - der (unnormierten ungezillmerten jährlichen) Nettoprämie P_x gemäß Formel (1:23, p. 22);
  - der (unnormierten jährlichen) Zillmerprämie ZP_x gemäß Formel (1:29, p. 27);
  - den (unnormierten jährlichen) Stückkosten $\Gamma_{j/s}$ ($\Gamma_{j/s} = G \cdot \gamma_{j/s}$);
  - dem (unnormierten jährlichen) Zuschlag $\Delta_{j/s} \cdot {}^{Z}B_x$ aus dem prämienproportionalem Zuschlag $\Delta_{j/s}$ auf die (unnormierte) gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B_x$ (von der Bruttoprämie gilt demnach der Anteil $\Delta_{j/s}$ als proportionaler Zuschlag – im Gegensatz zur Mehrwertsteuer: hier sind ca. 16,0 Prozent (= $\frac{19\%}{1+19\%}$) resp. 6,5 Prozent (= $\frac{7\%}{1+7\%}$) des Endpreises als Mehrwertsteuer abzuführen).
- Die unnormierte gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B_x$ zum Alter x lässt sich darstellen als:

$$ {}^{Z}B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}} . $$

Herleitung.

- Mit $ZP_x = \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x}$ gemäß Formel (1:29, p. 27):

$$ {}^{Z}B_x = P_x + \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} + \Gamma_{j/s} + \Delta_{j/s} \cdot {}^{Z}B_x $$

$$ \Rightarrow \; {}^{Z}B_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s} - \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \right) = P_x + \Gamma_{j/s} $$

$\Rightarrow$ unnormierte gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B_x$,

$$ {}^{Z}B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}} ; $$

- mit ${}^{Z}b_x := \frac{1}{G} \cdot {}^{Z}B_x$:

$$ {}^{Z}b_x = \frac{\frac{1}{G} \cdot P_x + \frac{1}{G} \cdot \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}} $$

$\Rightarrow$ normierte gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}b_x$,

$$ {}^{Z}b_x = \frac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}} ; $$

- mit ${}^{Z}\widetilde{B}_x := \frac{1}{12} \cdot {}^{Z}B_x$:

$\Rightarrow$ unnormierte gezillmerte Monatsbruttoprämie ${}^{Z}\widetilde{B}_x$,

$$ {}^{Z}\widetilde{B}_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \dfrac{\alpha_x^Z}{a_x}} ; $$

- mit ${}^{Z}\widetilde{b}_x := \frac{1}{G} \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x$:

$$ {}^{Z}\widetilde{b}_x = \frac{\frac{1}{G} \cdot P_x + \frac{1}{G} \cdot \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \dfrac{\alpha_x^Z}{a_x}} $$

$\Rightarrow$ normierte gezillmerte Monatsbruttoprämie ${}^{Z}\widetilde{b}_x$,

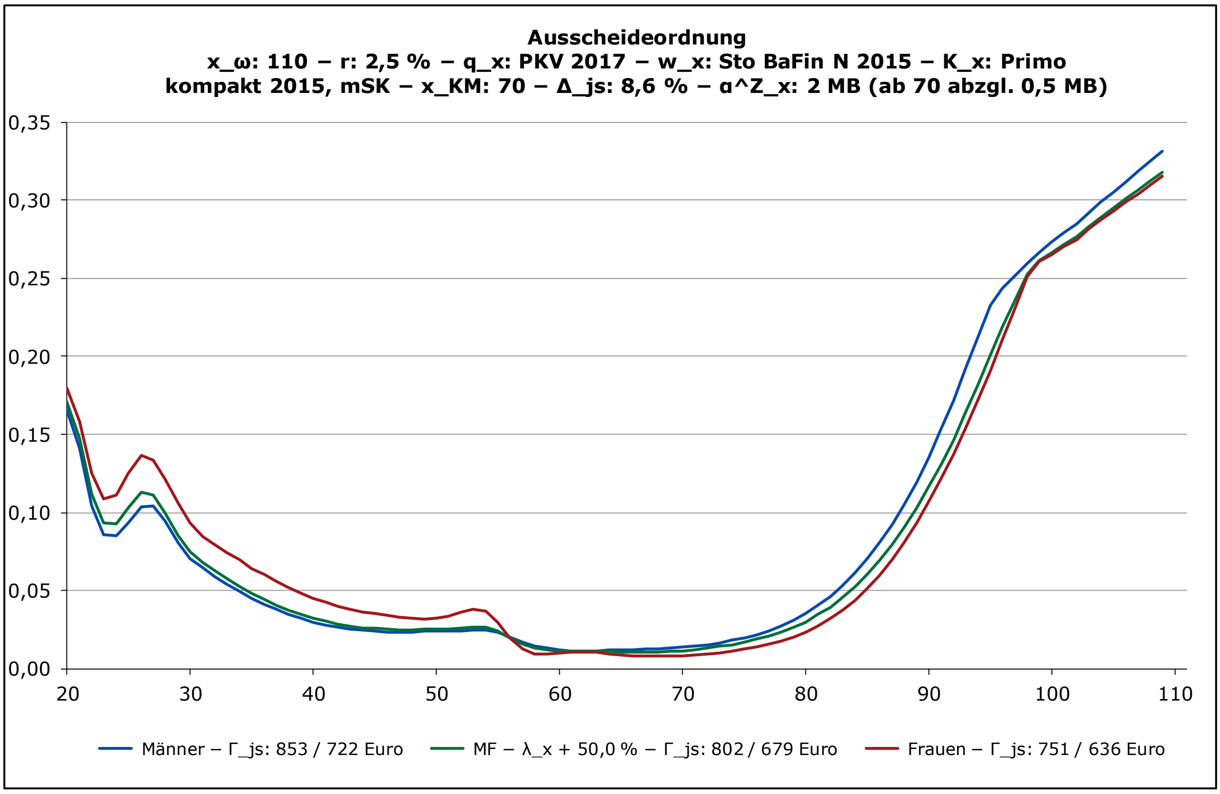
$$ {}^{Z}\widetilde{b}_x = \frac{p_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \dfrac{\alpha_x^Z}{a_x}} . \qquad \blacksquare $$

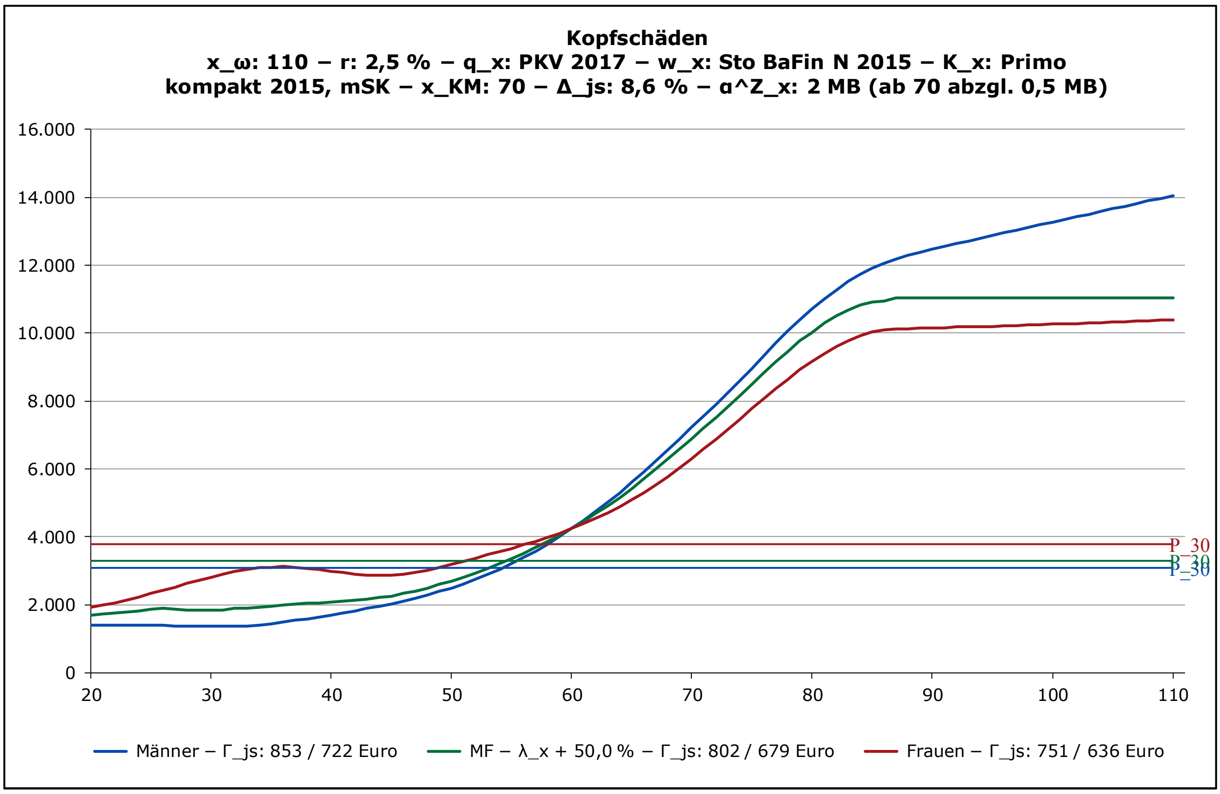
Zahlenbeispiel.

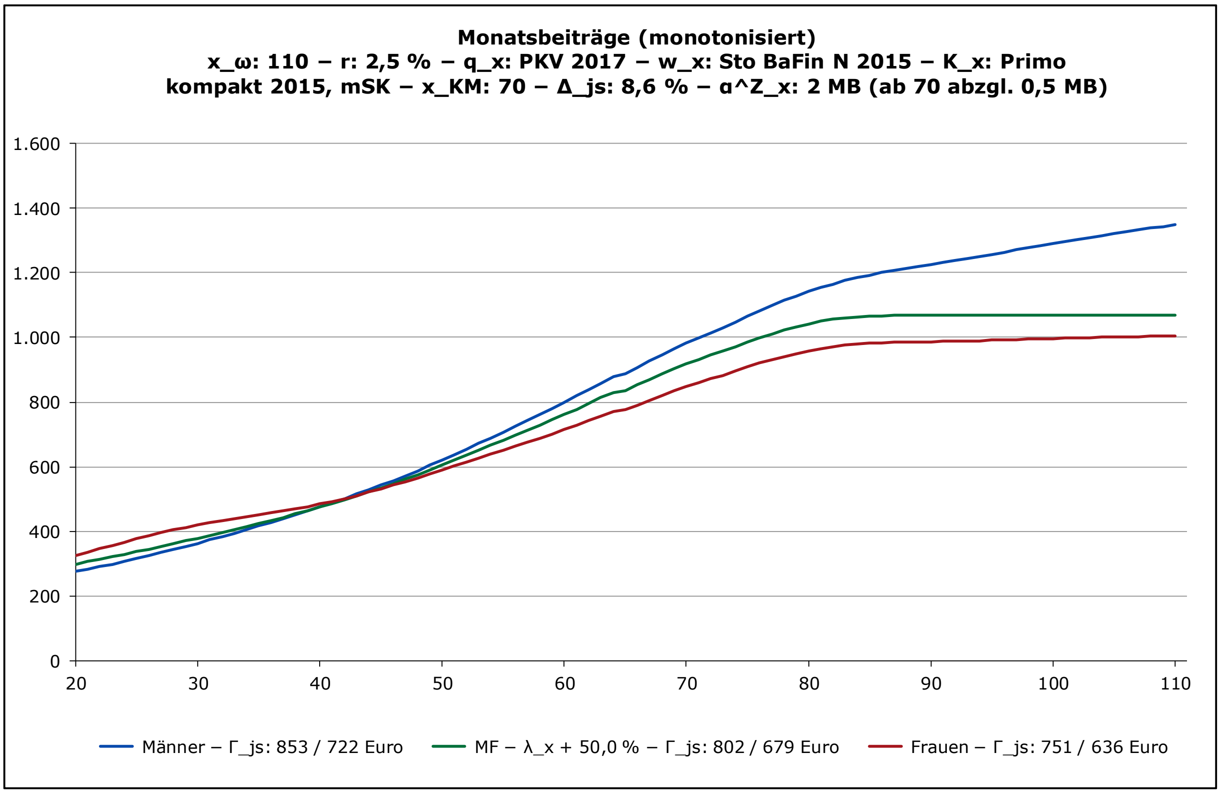
x	x_spez.	j/s	a_x	P_x	Δ_j/s	Γ_j/s	α^Z_x	B^Z _x	B~^Z _x
1	x_α	j	3,79	18,48	10,6%	5,46	2,00	28,16	2,35
2		j	3,14	21,54	10,6%	5,46	2,00	32,11	2,68
3		j	2,47	26,86	10,6%	5,46	2,00	39,10	3,26
4	x_s	s	1,67	34,98	10,6%	4,30	1,00	46,53	3,88
5	x_ω	s	1,00	50,00	10,6%	4,30	0,00	60,74	5,06

Zahlenbeispiel.

Substitutiver Vollversicherungstarif mit ambulantem Selbstbehalt von 30 Euro, stationären allgemeinen Krankenhausleistungen und Wahlleistungen sowie Zahnbehandlung und 80 Prozent Erstattung von Zahnersatz (mSK: Leistungen wegen Schwangerschaft und Mutterschaft bei Frauen), 2,5 Prozent Rechnungszins, aktueller Ausscheideordnung und durchschnittlichen Kostenansätzen.


Ausscheideordnung
x_ω: 110 – r: 2,5 % – q_x: PKV 2017 – w_x: Sto BaFin N 2015 – K_x: Primo kompakt 2015, mSK – x_KM: 70 – Δ_js: 8,6 % – α^Z_x: 2 MB (ab 70 abzgl. 0,5 MB)
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
20 30 40 50 60 70 80 90 100 110
Männer – Γ_js: 853 / 722 Euro
MF – λ_x + 50,0 % – Γ_js: 802 / 679 Euro
Frauen – Γ_js: 751 / 636 Euro


Kopfschäden
x_ω: 110 – r: 2,5 % – q_x: PKV 2017 – w_x: Sto BaFin N 2015 – K_x: Primo kompakt 2015, mSK – x_KM: 70 – Δ_js: 8,6 % – α^Z_x: 2 MB (ab 70 abzgl. 0,5 MB)
16.000
14.000
12.000
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
0
20 30 40 50 60 70 80 90 100 110
P_30
Männer – Γ_js: 853 / 722 Euro
MF – λ_x + 50,0 % – Γ_js: 802 / 679 Euro
Frauen – Γ_js: 751 / 636 Euro



Bemerkung.

- Im Grenzalter x_s kann auf Grund geringerer Stückkosten die Bruttoprämie sinken: bei unveränderten Rechnungsgrundlagen wird für eine versicherte Person bei Erreichen des Grenzalters x_s der zu zahlende Beitrag ggf. um die Stückkostendifferenz $\Gamma_j - \Gamma_s$ günstiger.
- Da der Zuschlag $\mathrm{B}_{\hat{\hat{x}}}$ für eine erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung und der Zuschlag O_x für die Optionsausübung eine untergeordnete Rolle in der PKV-Tarifwelt haben (und zudem ohne Alterungsrückstellungsbildung kalkuliert werden), werden sie hier nicht in die Bruttoprämie eingerechnet, sondern dem tariflichen Beitrag (dazu Abschnitt 1.4, p. 60) zugeordnet.

Bemerkung.

- Mit fortschreitendem Alter x darf die gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B_x$ nicht absinken, was ansonsten zu einem Widerspruch zu § 146 „Substitutive Krankenversicherung" Absatz 2 Satz 2 VAG (keine günstigeren Prämien für das Neugeschäft als im Altbestand – nach einem Alterswechsel) führen würde. Da in praxi auf Grund von Rundungen bei den Berechnungen unerwünschte rein numerische Effekte entstehen können (beispielsweise Monotonieverletzungen bei konstantem Profil), kann jeweils eine Maximierung der Bruttoprämie mit dem Vorgängerwert erfolgen.

1.1.8 Gezillmerte Nettoprämie (Zillmerverfahren Teil 2).

Gezillmerte Jahresnettoprämie. (1:32)

gezillmerte Jahresnettoprämie $^{Z}P_x$	=	ungezillmerte Jahresnettoprämie P_x
		$+$ Jahreszillmerprämie ZP_x
$^{Z}P_x$	=	$P_x + ZP_x$

Zillmerfaktor. (1:33)

$$z_x := \frac{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right)}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z}$$ Zillmerfaktor zum Alter x

Gezillmerte Nettoprämie. (1:34)

normiert	*unnormiert*	
$^{Z}p_x = p_x + \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}b_x$	$^{Z}P_x = P_x + \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}B_x$	gezillmerte Nettoprämie zum Alter x (Jahreswert)
$^{Z}p_x = z_x \cdot p_x + \left(z_x - 1\right) \cdot \gamma_{j/s}$	$^{Z}P_x = z_x \cdot P_x + \left(z_x - 1\right) \cdot \Gamma_{j/s}$	

Definition, Prämienkomponenten und Berechnung.

- Die unnormierte gezillmerte Nettoprämie $^{Z}P_x$ zum Alter x gibt für Ursprünglich-x-Jährige den jährlich während der Vertragslaufzeit zu zahlenden gleichbleibenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum Kollektiv mit kalkulatorischem Endalter x_ω jährlich jeweils zum Lebensjahr $x+\mu$ den unnormierten Kopfschaden in Höhe $K_{x+\mu}$ ($\mu \geq 0$) samt Zillmerung zu finanzieren; die Prämienzahlungen sowie die Kopfschadenzahlungen (beide ab dem ersten Jahr) und auch die Einmalzahlung erfolgen dabei jeweils vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn. Das Gleichbleiben bezieht sich auf den Nettoanteil der Bruttoprämie.
- Die (jährliche) unnormierte gezillmerte Nettoprämie $^{Z}P_x$, $^{Z}P_x = P_x + ZP_x$ zum Alter x setzt sich zusammen aus:
    - der (jährlichen ungezillmerten) unnormierte Nettoprämie P_x gemäß Formel (1:23, p. 22);
    - der (jährlichen) unnormierten Zillmerprämie ZP_x gemäß Formel (1:28, p. 27).

- Die (jährliche) unnormierte gezillmerte Nettoprämie ${}^{Z}P_x$ zum Alter x lässt sich darstellen als:

  ${}^{Z}P_x = z_x \cdot P_x + (z_x - 1) \cdot \Gamma_{j/s}$ mit dem Zillmerfaktor z_x,

  $$z_x := \frac{12 \cdot a_x \cdot (1 - \Delta_{j/s})}{12 \cdot a_x \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \alpha_x^Z}.$$

- Als Spezialfall bei Tarifen ohne Zillmerung ist $z_x = 1$ und somit ${}^{Z}P_x = P_x$.

Zillmerung von Monatsbruttobeiträgen.

- Der Zillmerbetrag ZB_x wird i.d.R. als Anzahl α_x^Z (Zillmersatz) der gezillmerten Monatsbruttoprämien ${}^{Z}\widetilde{B}_x$ (${}^{Z}\widetilde{B}_x = \frac{1}{12} \cdot {}^{Z}B_x$ mit der gezillmerten *Jahres*bruttoprämie ${}^{Z}B_x$) angegeben: $ZB_x = \alpha_x^Z \cdot \frac{{}^{Z}B_x}{12}$, dazu auch Formel (1:29, p. 27).

  (Achtung: in Anlage 1.A. „Prämienberechnung des Neuzugangs" KVAV ist α_x als die Anzahl an gezillmerter Jahresprämien definiert, d.h. $\alpha_x^{\text{KVAV}} = \frac{1}{12} \cdot \alpha_x^Z$)!

- Mit $ZP_x = \frac{ZB_x}{a_x}$ gemäß Formel (1:28, p. 27) ist:

$\Rightarrow$ unnormierte Zillmerprämie $ZP_x = \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x} = \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{B}_x}{a_x}$ (mit ${}^{Z}\widetilde{B}_x = \frac{1}{12} \cdot {}^{Z}B_x$);

- mit ${}^{Z}b_x := \frac{1}{G} \cdot {}^{Z}B_x$ und ${}^{Z}\widetilde{b}_x = \frac{1}{12} \cdot {}^{Z}b_x$:

  $$zp_x = \frac{1}{G} \cdot ZP_x = \frac{\alpha_x^Z \cdot \frac{1}{G} \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x}$$

$\Rightarrow$ normierte Zillmerprämie $zp_x = \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}b_x}{12 \cdot a_x} = \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}\widetilde{b}_x}{a_x}$. ■

Herleitung.

- ${}^{Z}P_x = P_x + ZP_x$ mit $ZP_x = \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^{Z}B_x}{12 \cdot a_x}$ gemäß Formel (1:33, p. 34) und ${}^{Z}p_x = \frac{1}{G} \cdot {}^{Z}P_x$ ist:

  $${}^{Z}P_x = P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}B_x \text{ resp. } {}^{Z}p_x = p_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}b_x. \quad \square$$

- mit ${}^{Z}B_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$ gemäß Formel (1:31, p. 29):

$$
\begin{aligned}
{}^{Z}P_x &= P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}} \\
&= P_x + \frac{\alpha_x^Z \cdot \left(P_x + \Gamma_{j/s}\right)}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z} \\
&= \frac{\left[12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z\right] + \alpha_x^Z}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z} \cdot P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z} \cdot \Gamma_{j/s} \\
&= \underbrace{\frac{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right)}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z}}_{=:z_x} \cdot P_x + \underbrace{\frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z}}_{=z_x - 1} \cdot \Gamma_{j/s}
\end{aligned}
$$

- mit $z_x := \dfrac{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right)}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z}$ und

$$
\frac{\alpha_x^Z}{12 a_x \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z} = \frac{\left[12 a_x \left(1 - \Delta_{j/s}\right)\right] - \left(\left[12 a_x \left(1 - \Delta_{j/s}\right)\right] - \alpha_x^Z\right)}{12 a_x \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z} = z_x - 1:
$$

$\Rightarrow$ (jährliche) unnormierte gezillmerte Nettoprämie

$$
{}^{Z}P_x = z_x \cdot P_x + \left(z_x - 1\right) \cdot \Gamma_{j/s};
$$

- mit ${}^{Z}p_x = \frac{1}{G} \cdot {}^{Z}P_x$:

$$
{}^{Z}p_x = \tfrac{1}{G} \cdot z_x \cdot P_x + \tfrac{1}{G} \cdot \left(z_x - 1\right) \cdot \Gamma_{j/s}
$$

$\Rightarrow$ (jährliche) normierte gezillmerte Nettoprämie

$$
{}^{Z}p_x = z_x \cdot p_x + \left(z_x - 1\right) \cdot \gamma_{j/s}.
$$

□■

Bemerkung.

- Zur Höhe der Zillmerung: I.d.R. wird der Zillmersatz α_x^Z mindestens in den neugeschäftsmöglichen Altern einheitlich angesetzt und sodann kontinuierlich auf Null zurückgeführt. Diese Rückführung erfolgt in kleineren Schritten, so dass die wachsende Monotonie der Beiträge gewährleistet ist (was ansonsten zu einem Widerspruch zu § 146 „Substitutive Krankenversicherung" Absatz 2 Satz 2 VAG (keine günstigeren Prämien für das Neugeschäft als im Altbestand – nach einem Alterswechsel) führen würde). Ferner ist § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ Absatz 3 Satz 1 KVAV (begrenzte Anzahl von Jahren mit negativen gezillmerten Alterungsrückstellungen) bei der Festlegung der Zillmerung zu beachten (dazu eigener Abschnitt).

Zahlenbeispiel.

x	x_spez.	j/s	a_x	P_x	Δ_j/s	Γ_j/s	α^Z_x	z_x	P^Z_x
1	x_α	j	3,79	18,48	10,6%	5,46	2,00	1,05	19,68
2	x_N	j	3,14	21,54	10,6%	5,46	2,00	1,06	23,16
3		j	2,47	26,86	10,6%	5,46	2,00	1,08	29,45
4	x_s	s	1,67	34,98	10,6%	4,30	1,00	1,06	37,34
5	x_ω	s	1,00	50,00	10,6%	4,30	0,00	1,00	50,00

Herleitung mittels Äquivalenzprinzip.

- Äquivalenzprinzip gemäß Formel (1:1, p. 10):

  $A_x + \frac{1}{G} \cdot ZB_x = {}^Z p_x \cdot a_x$ (mit dem Barwert A_x und dem normierten Einmalbetrag $\frac{1}{G} \cdot ZB_x$)

- mit $ZB_x = \frac{1}{12} \cdot \alpha_x^Z \cdot {}^Z B_x$ und ${}^Z b_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$ ist:

$$A_x + \frac{\alpha_x^Z}{12} \cdot {}^Z b_x = {}^Z p_x \cdot a_x$$

$${}^Z p_x \cdot a_x = A_x + \frac{\alpha_x^Z}{12} \cdot \frac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$$

$${}^Z p_x = \frac{A_x}{a_x} + \frac{1}{12 \cdot a_x} \cdot \frac{\alpha_x^Z \cdot \left(p_x + \gamma_{j/s}\right)}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$$

$${}^Z p_x = p_x + \frac{\alpha_x^Z \cdot p_x + \alpha_x^Z \cdot \gamma_{j/s}}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z}$$

$${}^Z p_x = \frac{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z + \alpha_x^Z}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z} \cdot p_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) - \alpha_x^Z} \cdot \gamma_{j/s}$$

$$\Rightarrow {}^Z p_x = z_x \cdot p_x + \left(z_x - 1\right) \cdot \gamma_{j/s} \,. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung.

- Für den Zillmerfaktor z_x, $z_x = \frac{12 \cdot a_x \cdot (1-\Delta_{j/s})}{12 \cdot a_x \cdot (1-\Delta_{j/s}) - \alpha_x^Z}$ gilt $z_x \geq 1$ und in Abhängigkeit der Anzahl α_x^Z der zu zillmernden Monatsbeiträge: (1:35)

$$\begin{cases} z_x = 1 & \text{für} \quad \alpha_x^Z = 0 \\ z_x > 1 & \text{für} \quad \alpha_x^Z > 0 \end{cases}.$$

Weiter ist $\begin{cases} {}^Z p_x = p_x & \text{für} \quad \alpha_x^Z = 0 \\ {}^Z p_x > p_x & \text{für} \quad \alpha_x^Z > 0 \end{cases}$.

- Dazu:

$$\alpha_x^Z = 0 \quad \Rightarrow \quad z_x = \frac{12 \cdot a_x \cdot (1-\Delta_{j/s})}{12 \cdot a_x \cdot (1-\Delta_{j/s}) - 0} = 1;$$

$$\alpha_x^Z > 0 \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot a_x \cdot (1-\Delta_{j/s}) > 12 \cdot a_x \cdot (1-\Delta_{j/s}) - \alpha_x^Z \quad \Rightarrow$$
$$z_x = \frac{12 \cdot a_x \cdot (1-\Delta_{j/s})}{12 \cdot a_x \cdot (1-\Delta_{j/s}) - \alpha_x^Z} > 1.$$

Und somit:

$${}^Z p_x = z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s} = \begin{cases} p_x & \text{für} \quad \alpha_x^Z = 0 \\ z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s} > p_x & \text{für} \quad \alpha_x^Z > 0 \end{cases}.$$ ■

Nebenbedingung.

- In der Grundfassung des Zillmerverfahrens soll im ersten Versicherungsjahr maximal derjenige Anteil der Nettoprämie P_x zur Deckung der unmittelbaren Abschlusskosten verwendet werden, der nicht zur Deckung des aktuellen Kopfschadens K_x benötigt wird. Darüber hinausgehende Beträge werden sodann nicht mehr im ersten Jahr finanziert, sondern werden auf spätere Versicherungsjahre verlagert, was einer nachgelagerten Finanzierung und somit einer unvorsichtigen Kalkulation gleichkommt. Demgemäß soll der Zillmerbetrag ZB_x der Ungleichung $ZB_x \leq {}^Z P_x - K_x$ und damit $ZB_x \leq P_{x+1} - K_x$ genügen.
- Begründung: mit ${}^Z P_x = P_x + ZP_x$ gemäß Formel (1:32, p. 34), $ZP_x = \frac{ZB_x}{a_x}$ gemäß Formel (1:28, p. 10), $P_x = G \cdot \frac{A_x}{a_x}$ gemäß Formel (1:23, p. 22) und $K_x = G \cdot k_x$:

$$ZB_x \leq {}^Z P_x - K_x$$
$$ZB_x \leq P_x + ZP_x - K_x$$
$$ZB_x \leq G \cdot \frac{A_x}{a_x} + \frac{ZB}{a_x} - G \cdot k_x$$
$$\Rightarrow \quad ZB_x \cdot \left(1 - \frac{1}{a_x}\right) \leq G \cdot \left(\frac{A_x}{a_x} - k_x\right)$$

$$ZB_x \cdot \frac{a_x - 1}{a_x} \leq G \cdot \frac{A_x - a_x \cdot k_x}{a_x}$$

- Fall $a_x = 1$: gemäß Formel (1:18, p. 17) ist $\forall \mu \mid \mu \geq 1 : l_{x_E+\mu} = 0$ und weiter gemäß Formel (1:21, p. 21): $A_{x_E} = k_{x_E}$ ist:

  $\Rightarrow \; ZB_{x_E} \cdot \frac{1-1}{1} \leq G \cdot \frac{k_{x_E} - 1 \cdot k_{x_E}}{1}$

  $\Rightarrow \; 0 \leq G \cdot 0$

  $\Rightarrow \; 0 \leq 0$

  $\Rightarrow \; ZB_{x_E}$ (theoretisch) beliebig (wobei hier im eigentlichen Sinne nicht gezillmert wird, da die Äquivalenzgleich auf $K_{x_E} + ZB_{x_E} = {}^{Z}P_{x_E}$ einmalig zum Alter x_E ohne Folgealter hinausläuft). □

- Fall $a_x > 1$: mit $\frac{a_x - 1}{a_x} > 0$ ist:

  $\Rightarrow \; ZB_x \leq G \cdot \frac{A_x - a_x \cdot k_x}{a_x - 1} \overset{\text{nachfolgend}}{=} G \cdot \left(p_{x+1} - k_x\right) = P_{x+1} - K_x$

  $\Rightarrow \; ZB_x \leq P_{x+1} - K_x$. □

  - Zu $\frac{A_x - a_x \cdot k_x}{a_x - 1} = p_{x+1} - k_x$ (normierte Werte):

    Mit $a_x = \frac{N_x}{D_x}$ und $A_x = \frac{U_x}{D_x}$ gemäß Formeln (1:14, p. 16) resp. (1:20, p. 20):

$$\frac{A_x - a_x \cdot k_x}{a_x - 1} = \frac{\frac{U_x}{D_x} - \frac{N_x}{D_x} \cdot k_x}{\frac{N_x}{D_x} - 1}$$

$$= \frac{U_x - N_x \cdot k_x}{N_x - D_x}$$

Ergänzung des Zählers bezüglich $D_x \cdot k_x$:

$$= \frac{U_x - D_x \cdot k_x + D_x \cdot k_x - N_x \cdot k_x}{N_x - D_x}$$

$$= \frac{U_x - D_x \cdot k_x}{N_x - D_x} + \frac{D_x \cdot k_x - N_x \cdot k_x}{N_x - D_x}$$

$$= \frac{U_x - D_x \cdot k_x}{N_x - D_x} + \frac{-\left(N_x - D_x\right)}{N_x - D_x} \cdot k_x$$

$$= \frac{U_x - D_x \cdot k_x}{N_x - D_x} - k_x$$

mit $O_x := D_x \cdot k_x$, $U_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_x$ und $N_x := \sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi$ gemäß Formeln (1:4) bis (1:6, p. 10):

$$= \frac{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} O_\xi - O_x}{\sum_{\xi=x}^{x_\omega} D_\xi - D_x} - k_x$$

$$= \frac{\sum_{\xi=x+1}^{x_\omega} O_\xi}{\sum_{\xi=x+1}^{x_\omega} D_\xi} - k_x$$

$$= \frac{U_{x+1}}{N_{x+1}} - k_x$$

mit $p_x = \frac{U_x}{N_x}$ gemäß Formel (1:23, p. 22)

$$= p_{x+1} - k_x \,. \qquad \square\blacksquare$$

1.1.9 Gezillmerte Bruttoprämie (Teil 2: mit gezillmerter Nettoprämie).

Zusammenstellung der gezillmerten Bruttoprämien.		(1:36)
normiert	*unnormiert*	
$^Zb_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$, $^Zb_x = \dfrac{^Zp_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$, $^Zb_x = b_x + \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^Zb_x}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) \cdot a_x}$, $^Zb_x = z_x \cdot b_x$	$^ZB_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$, $^ZB_x = \dfrac{^ZP_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$, $^ZB_x = B_x + \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^ZB_x}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) \cdot a_x}$, $^ZB_x = z_x \cdot B_x$	gezillmerte *Jahres*bruttoprämie zum Alter x
$^Z\tilde{b}_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \dfrac{\alpha_x^Z}{a_x}}$, $^Z\tilde{b}_x = \dfrac{^Zp_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$, $^Z\tilde{b}_x = \tilde{b}_x + \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^Zb_x}{(1 - \Delta_{j/s}) \cdot a_x}$, $^Z\tilde{b}_x = z_x \cdot \tilde{b}_x$	$^Z\tilde{B}_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \dfrac{\alpha_x^Z}{a_x}}$, $^Z\tilde{B}_x = \dfrac{^ZP_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$, $^Z\tilde{B}_x = \tilde{B}_x + \dfrac{\alpha_x^Z \cdot {}^Z\tilde{B}_x}{(1 - \Delta_{j/s}) \cdot a_x}$, $^Z\tilde{B}_x = z_x \cdot \tilde{B}_x$	gezillmerte *Monats*bruttoprämie zum Alter x

Definition, Prämienkomponenten und Berechnung.

- Definition unter Abschnitt 1.1.7, p. 29.
- Die unnormierte gezillmerte Jahresbruttoprämie ^ZB_x, $^ZB_x = {}^ZP_x + \Gamma_{j/s} + \Delta_{j/s} \cdot {}^ZB_x$ zum Alter x setzt sich zusammen aus:
  - der (unnormierten gezillmerten jährlichen) Nettoprämie ^ZP_x gemäß Formel (1:34, p. 34);
  - den (unnormierten jährlichen) Stückkosten $\Gamma_{j/s}$ ($\Gamma_{j/s} = G \cdot \gamma_{j/s}$);

- dem (unnormierten jährlichen) Zuschlag $\Delta_{j/s} \cdot {}^Z B_x$ aus dem prämienproportionalem Zuschlag $\Delta_{j/s}$ auf die (unnormierte) gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^Z B_x$.

- Die unnormierte gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^Z B_x$ zum Alter x lässt sich darstellen als:

$$ {}^Z B_x = \frac{{}^Z P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}. $$

Herleitung (für die unnormierte gezillmerte Jahresbruttoprämie).

- Anmerkung: Die normierten Prämien ergeben sich durch Division mit dem Grundkopfschaden G, die Monatsprämien durch Division mit 12.

- Gemäß Formel (1:31, p. 29): ${}^Z B_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \dfrac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x}}$ □

- ${}^Z B_x = P_x + ZP_x + \Gamma_{j/s} + \Delta_{j/s} \cdot {}^Z B_x$ gemäß Formel (1:30, p. 29) mit der Darstellung ${}^Z P_x = P_x + ZP_x$ gemäß Formel (1:32, p. 34):

$$ {}^Z B_x = {}^Z P_x + \Gamma_{j/s} + \Delta_{j/s} \cdot {}^Z B_x $$

$$ \Rightarrow {}^Z B_x \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) = {}^Z P_x + \Gamma_{j/s} $$

$$ \Rightarrow {}^Z B_x = \frac{{}^Z P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}. $$ □

- Aus ${}^Z P_x = P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^Z B_x$ und $B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$ gemäß Formeln (1:34, p. 34) resp. (1:27, p. 25) folgt für ${}^Z B_x = \frac{{}^Z P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$ gemäß Formel (1:36, p. 40):

$$ \begin{aligned} {}^Z B_x &= \frac{{}^Z P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}} \\ &= \frac{P_x + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^Z B_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}} \\ &= \frac{P_x + \Gamma_{j/s} + \frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^Z B_x}{1 - \Delta_{j/s}} \\ &= \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}} + \frac{\frac{\alpha_x^Z}{12 \cdot a_x} \cdot {}^Z B_x}{1 - \Delta_{j/s}} \\ &= B_x + \frac{\alpha_x^Z \cdot {}^Z B_x}{12 \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot a_x}. \end{aligned} $$ □

- Aus ${}^{Z}P_x = z_x \cdot P_x + (1 - z_x) \cdot \Gamma_{j/s}$ gemäß Formel (1:34, p. 34) folgt für ${}^{Z}B_x = \frac{{}^{Z}P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$ aus Formel (1:36, p. 40):

$$
\begin{aligned}
{}^{Z}B_x &= \frac{{}^{Z}P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}} \\
&= \frac{z_x \cdot P_x + (z_x - 1) \cdot \Gamma_{j/s} + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}} \\
&= \frac{z_x \cdot P_x + z_x \cdot \Gamma_{j/s} - \Gamma_{j/s} + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}} \\
&= \frac{z_x \cdot P_x + z_x \cdot \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}} \\
&= z_x \cdot \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}} \\
&= z_x \cdot B_x .
\end{aligned}
$$

□■

Zahlenbeispiel.

x	x_spez.	j/s	Δ_j/s	Γ _j/s	P^Z_x	B^Z _x	B~^Z _x
1	x_α	j	10,6%	5,46	19,68	28,12	2,34
2	x_N	j	10,6%	5,46	23,16	32,01	2,67
3		j	10,6%	5,46	29,45	39,05	3,25
4	x_s	s	10,6%	4,30	37,34	46,58	3,88
5	x_ω	s	10,6%	4,30	50,00	60,74	5,06

1.1.10 Dynamischer Kostenansatz und repräsentative gezillmerte Bruttoprämie.

Dynamischer Kostensatz und repräsentative gezillmerte Bruttoprämie. *normiert*	*unnormiert*	(1:37)
${}^{Z}b^{r}_{j/s} = \dfrac{p_{x_r}}{1-\Delta_{j/s}-\tilde{\Delta}^{r}_{j/s}-\dfrac{\alpha^{Z}_{x_r}}{12\cdot a_{x_r}}}$	${}^{Z}B^{r}_{j/s} = \dfrac{P_{x_r}}{1-\Delta_{j/s}-\tilde{\Delta}^{r}_{j/s}-\dfrac{\alpha^{Z}_{x_r}}{12\cdot a_{x_r}}}$	repräsentative gezillmerte Jahresbruttoprämie zum Alter x_r
$\gamma_{j/s} = \tilde{\Delta}^{r}_{j/s}\cdot {}^{Z}b^{r}_{j/s}$	$\Gamma_{j/s} = \tilde{\Delta}^{r}_{j/s}\cdot {}^{Z}B^{r}_{j/s}$	Jahresstückkosten für $\alpha^{u}_{s/i}$, α^{m}, ρ, β
x_r	repräsentatives Alter	
Index „ j/s"	Unterscheidung für erwachsene Versicherte unter / ab dem Grenzalter x_s mit Entfall des Kostenzuschlags α^{u}	
$\tilde{\Delta}^{r}_{j/s}$	auf das repräsentative Alter x_r bezogener Stückkostensatz	

Herleitung.

- Darstellung der altersunabhängigen Jahresstückkosten $\Gamma_{j/s}$ (für $\alpha^{u}_{s/j}$, α^{m}, ρ, β) an Hand des – auf ein repräsentatives Alter x_r bezogenen – proportionalen Zuschlags $\tilde{\Delta}^{r}_{j/s}$ als Prozentsatz auf die unnormierte repräsentative gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B^{r}_{j/s}$ zum Alter x_r: $\Gamma_{j/s} = \tilde{\Delta}^{r}_{j/s}\cdot {}^{Z}B^{r}_{j/s}$.
- Herleitung der repräsentativen gezillmerten Jahresbruttoprämie ${}^{Z}B^{r}_{j/s}$:
  - Formel (1:31, p. 29): ${}^{Z}B_{x} = \dfrac{P_x+\Gamma_{j/s}}{1-\Delta_{j/s}-\frac{\alpha^{Z}_{x}}{12\cdot a_x}}$ mit Bezug der einzelalterabhängigen Werte auf $x = x_r$ (P_{x_r}, $\alpha^{Z}_{x_r}$, a_{x_r} – zum Beispiel $x_r = 33$ oder $x_r = 40$) und der beiden altersbereichsabhängigen Werte $\Gamma_{j/s}$ und $\Delta_{j/s}$:

    $${}^{Z}B^{r}_{j/s} := \frac{P_{x_r}+\Gamma_{j/s}}{1-\Delta_{j/s}-\dfrac{\alpha^{Z}_{x_r}}{12\cdot a_{x_r}}}$$ (d.h. ${}^{Z}B^{r}_{j} = {}^{Z}B_{x_r}$, i.d.R.: ${}^{Z}B^{r}_{s} \neq {}^{Z}B_{x_r}$)

  - mit der Darstellung $\Gamma_{j/s} = \tilde{\Delta}^{r}_{j/s}\cdot {}^{Z}B^{r}_{j/s}$

    $${}^{Z}B^{r}_{j/s} := \frac{P_{x_r}+\tilde{\Delta}^{r}_{j/s}\cdot {}^{Z}B^{r}_{j/s}}{1-\Delta_{j/s}-\dfrac{\alpha^{Z}_{x_r}}{12\cdot a_{x_r}}}$$

$$\Rightarrow\ {}^{Z}B_{j/s}^{r} \cdot \left(1 - \Delta_{j/s} - \frac{\alpha_{x_r}^{Z}}{12 \cdot a_{x_r}}\right) = P_{x_r} + \tilde{\Delta}_{j/s}^{r} \cdot {}^{Z}B_{j/s}^{r}$$

$$\Rightarrow\ {}^{Z}B_{j/s}^{r} \cdot \left(1 - \Delta_{j/s} - \tilde{\Delta}_{j/s}^{r} - \frac{\alpha_{x_r}^{Z}}{12 \cdot a_{x_r}}\right) = P_{x_r}$$

$\Rightarrow$ unnormierte repräsentative Jahresbruttoprämie

$${}^{Z}B_{j/s}^{r} = \frac{P_{x_r}}{1 - \Delta_{j/s} - \tilde{\Delta}_{j/s}^{r} - \frac{\alpha_{x_r}^{Z}}{12 \cdot a_{x_r}}};$$

- mit ${}^{Z}b_{j/s}^{r} := \frac{1}{G} \cdot {}^{Z}B_{j/s}^{r}$:

$${}^{Z}b_{j/s}^{r} = \frac{\frac{1}{G} \cdot P_{x_r}}{1 - \Delta_{j/s} - \tilde{\Delta}_{j/s}^{r} - \frac{\alpha_{x_r}^{Z}}{12 \cdot a_{x_r}}}$$

$\Rightarrow$ normierte repräsentative Jahresbruttoprämie

$${}^{Z}b_{j/s}^{r} = \frac{p_{x_r}}{1 - \Delta_{j/s} - \tilde{\Delta}_{j/s}^{r} - \frac{\alpha_{x_r}^{Z}}{12 \cdot a_{x_r}}}\ .$$

■

Ermittlung des proportionalen Zuschlags.

- Bei der Bestimmung des proportionalen Zuschlags $\tilde{\Delta}^{\alpha^m,\beta,\sigma^r}$ für die mittelbaren Abschlusskosten, Schadenregulierungs- und sonstigen Verwaltungskosten (ohne die unmittelbaren Abschlusskosten $\alpha_{s/j}^{u}$) ist i.d.R. eine Unterscheidung für erwachsene Versicherte unter / ab dem Grenzalter x_s nötig, da sich die repräsentative Prämie und somit die Summe dieser Kostenzuschläge ändern kann.
  - $\Sigma\hat{L} = \Sigma\hat{L}_j + \Sigma\hat{L}_s$ — Anzahl der versicherten Personen (beobachtete Werte), aufgeteilt bezüglich des Grenzalters x_s

    $\Sigma\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma}$ — Gesamtvolumen der zu deckenden mittelbaren Abschluss-, Schadenregulierungs- und Verwaltungskosten (tatsächlich angefallene Kosten, d.h. beobachtete Werte)

    $\Sigma\hat{B}$ — Gesamtvolumen der jährlichen Beitragseinnahmen (beobachtete Werte)

    die Grundwerte $\Sigma\hat{L}$, $\Sigma\hat{\Gamma}$, $\Sigma\hat{B}$ werden über die letzten drei bis fünf Jahre erhoben

- $\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma} = \dfrac{\Sigma\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma}}{\Sigma\hat{L}}$ — beobachtete jährliche Stückkosten (ohne unmittelbare Abschlusskosten) je versicherter Person

  $\hat{\tilde{\Delta}}^{\alpha^m,\beta,\sigma} = \dfrac{\Sigma\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma}}{\Sigma\hat{B}}$ — beobachteter Anteil des Kostenvolumens $\Sigma\hat{\Gamma}$ am Beitragsvolumen $\Sigma\hat{B}$
  ($\Rightarrow \Sigma\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma} = \hat{\tilde{\Delta}}^{\alpha^m,\beta,\sigma} \cdot \Sigma\hat{B}$)

  $\hat{\tilde{\Delta}}^{\alpha^m,\beta,\sigma^r} = \dfrac{\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma}}{\frac{\Sigma\hat{L}_j}{\Sigma\hat{L}} \cdot {}^Z B_j^r + \frac{\Sigma\hat{L}_s}{\Sigma\hat{L}} \cdot {}^Z B_s^r}$ — beobachteter Anteil der Stückkosten (ohne unmittelbare Abschlusskosten) an der durchschnittlichen unnormierten repräsentativen gezillmerten Bruttoprämie

$$\Rightarrow \hat{\tilde{\Delta}}^{\alpha^m,\beta,\sigma^r} = \frac{\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma}}{\frac{\Sigma\hat{L}_j}{\Sigma\hat{L}} \cdot {}^Z B_j^r + \frac{\Sigma\hat{L}_s}{\Sigma\hat{L}} \cdot {}^Z B_s^r} = \frac{\frac{\Sigma\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma}}{\Sigma\hat{L}}}{\frac{\Sigma\hat{L}_j}{\Sigma\hat{L}} \cdot {}^Z B_j^r + \frac{\Sigma\hat{L}_s}{\Sigma\hat{L}} \cdot {}^Z B_s^r} = \frac{\Sigma\hat{\Gamma}^{\alpha^m,\beta,\sigma}}{\Sigma\hat{L}_j \cdot {}^Z B_j^r + \Sigma\hat{L}_s \cdot {}^Z B_s^r}$$

  $\tilde{\Delta}^{\alpha^m,\beta,\sigma^r}$ — rechnungsmäßiger Anteil der Stückkosten (ohne unmittelbare Abschlusskosten) an der normierten repräsentativen gezillmerten Bruttoprämie zum Alter x_r, festgelegt an Hand $\hat{\tilde{\Delta}}^{\alpha^m,\beta,\sigma^r}$ unter Beachtung der einzurechnenden Sicherheiten gemäß § 2 „Rechnungsgrundlagen" Absatz 3 KVAV

- Der Zuschlag $\alpha_{j/s}^{u\ r}$ für unmittelbare Abschlusskosten wird analog berechnet; und zwar unter der Prämisse, dass der Zuschlag nur für Versicherte unter dem Grenzalter x_s erhoben wird, d.h. es wird nur die Anzahl $\Sigma\hat{L}_j$ der unter-x_s-jährigen versicherten Personen und deren repräsentativen Bruttoprämien zu Grunde gelegt. Beim zu deckenden Kostenvolumen werden die weiteren Finanzierungsquellen (altersabhängiger Beitragszuschlag $\alpha_{s/j}^{\sigma}$ in den ersten Versicherungsjahren, Zillmerung und Wartezeit- und Selektionsersparnisse abgezogen.

  - $\alpha_{j/s}^{u\ r}$ — Anteil der – durch den Zuschlag $\alpha_{j/s}^{u}$ zu deckenden – unmittelbaren Abschlusskosten an der normierten repräsentativen gezillmerten Bruttoprämie zum Alter x_r, unter Beachtung der einzurechnenden Sicherheiten gemäß § 2 Absatz 3 KVAV

  $\tilde{\Delta}_{j/s}^{r} = \tilde{\Delta}^{\alpha^m,\beta,\sigma^r} + \alpha_{j/s}^{u\ r}$ — Anteil der Stückkosten (Abschluss-, Schadenregulierungs- und Verwaltungskosten) an der normierten repräsentativen gezillmerten Bruttoprämie zum Alter x_r

- Alternativ wird der Zuschlag $\alpha^{u\ r}_{j/s}$ für unmittelbare Abschlusskosten gesetzt, so dass bei gegebenem altersabhängigem Beitragszuschlag $\alpha^{\sigma}_{s/j}$ im ersten Versicherungsjahr und nachgewiesenen Wartezeit- und Selektionsersparnisse die Anzahl α^{Z}_{x} der zu zillmernden Monatsbeiträge ermittelt wird.

Zahlenbeispiel.

- Bestimmung nur mittels Iteration möglich, da die zu ermittelnde Größe $\tilde{\Delta}^r_{j/s}$ in die repräsentative Prämie ${}^{Z}B^r_{j/s} = \frac{P_{x_r}}{1-\Delta_{j/s}-\tilde{\Delta}^r_{j/s}-\frac{\alpha^Z_{x_r}}{12\cdot a_{x_r}}}$ eingeht, auf welche sich $\tilde{\Delta}^r_{j/s}$ bezieht.
- Der repräsentative Beitrag sodann gemäß:

Kostenart	j/s	P_x_r	Δ_j/s	Δ~ ^r _j/s	α^Z _x_r	a_x_r	B^Z ^r _j/s
α^u, α^m, σ, β	j	21,54	10,6%	17,0%	2,00	3,14	32,11
α^m, σ, β	s	21,54	10,6%	14,0%	2,00	3,14	30,73

- Initialisierung mit $\tilde{\Delta}^r_{j/s}$ (Δ~^r_j/s) := 0,0 / 0,0 % (rot eingefärbt).

  Für die Iteration wird der vorhergehende – gelb eingefärbte – Zielwert (mit Sicherheiten versehener Wert $\hat{\tilde{\Delta}}^r_{j/s}$, $\hat{\tilde{\Delta}}^r_{j/s} = \frac{\Sigma\hat{\Gamma}}{\Sigma\hat{L}\cdot {}^{Z}B^r_s}$) als nächster Startwert $\tilde{\Delta}^r_{j/s}$ (Δ~^r_j/s, rot eingefärbt) für die neue Iteration gewählt.

  Die Iteration endet, wenn Start- und Zielwerte übereinstimmen.

Kostenart	j/s	ΣΓ^	ΣB^	Δ~^	ΣL^	Γ^	Δ~^r _j/s °)	B^Z^r _j/s	Δ~^r ^quer	Zielwert *)	Meldung
α^m, σ, β	j		5.250		210,0			25,61			
	s		10.000		200,0			25,61			
	j+s	1.630	15.250	10,7%	410,0	3,98	0,0%		15,5%	17,0%	zu gering!
α^u	j	110	5.250	2,1%	210,0	0,52	0,0%	25,61	2,0%	3,0%	zu gering!
Summe	Summe	1.740	20.500							Kostendeckung	0

*) Maximum aus 1 Prozentpunkt oder 5 Prozent höher als Δ~^r^quer auf ganze Prozentpunkte gerundet – aus Gründen der Vorsicht

°) Mittels Iteration, sodass Δ~^r_j/s >= Zielwert

Kostenart	j/s	ΣΓ^	ΣB^	Δ~^	ΣL^	Γ^	Δ~^r _j/s °)	B^Z^r _j/s	Δ~^r ^quer	Zielwert *)	Meldung
α^m, σ, β	j		5.250		210,0			33,61			
	s		10.000		200,0			32,11			
	j+s	1.630	15.250	10,7%	410,0	3,98	17,0%		12,1%	13,0%	zu groß!
α^u	j	110	5.250	2,1%	210,0	0,52	3,0%	33,61	1,6%	3,0%	i.O.
Summe	Summe	1.740	20.500							Kostendeckung	2.491

Kostenart	j/s	ΣΓ^	ΣB^	Δ~^	ΣL^	Γ^	Δ~^r _j/s °)	B^Z^r _j/s	Δ~^r ^quer	Zielwert *)	Meldung
ɑ^m, σ, β	j		5.250		210,0			31,63			
	s		10.000		200,0			30,30			
	j+s	1.630	15.250	10,7%	410,0	3,98	13,0%		12,8%	14,0%	zu gering!
ɑ^u	j	110	5.250	2,1%	210,0	0,52	3,0%	31,63	1,7%	3,0%	i.O.
Summe	Summe	1.740	20.500							Kostendeckung	1.839

Kostenart	j/s	ΣΓ^	ΣB^	Δ~^	ΣL^	Γ^	Δ~^r _j/s °)	B^Z^r _j/s	Δ~^r ^quer	Zielwert *)	Meldung
ɑ^m, σ, β	j		5.250		210,0			32,11			
	s		10.000		200,0			30,73			
	j+s	1.630	15.250	10,7%	410,0	3,98	14,0%		12,6%	14,0%	i.O.
ɑ^u	j	110	5.250	2,1%	210,0	0,52	3,0%	32,11	1,6%	3,0%	i.O.
Summe	Summe	1.740	20.500							Kostendeckung	1.995

- Die Kostensituation ergibt sich sodann gemäß:

Kostenart	j/s	P_x_r	Δ_j/s	Δ~ ^r _j/s	ɑ^Z _x_r	a_x_r	B^Z ^r _j/s	Γ _j/s	ɑ^u	ɑ^m	ρ	β	ΣL^	Kosten-ein - nahmen
									Kostenaufteilung aus Gewinnzerlegung					
									2,0%	4,5%	3,9%	2,3%		
									Kosten bzgl. B^Z ^r _j/s					
									3,0%	5,9%	5,1%	3,0%		
ɑ^u, ɑ^m, σ, β	j	21,54	10,6%	17,0%	2,00	3,14	32,11	5,46	0,96	1,89	1,64	0,96	200,0	1.092
ɑ^m, σ, β	s	21,54	10,6%	14,0%	2,00	3,14	30,73	4,30	.	1,81	1,57	0,92	210,0	903
													Summe	1.995

1.1.11 Ungezillmerte Bruttoprämie (Teil 2: mit dynamischen Kostensatz).

Ungezillmerte Bruttoprämie (rechnerische Größe). (1:38)

normiert	*unnormiert*	
$b_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$, $b_x = \dfrac{p_x + \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z b^r_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$	$B_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$, $B_x = \dfrac{P_x + \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}$	ungezillmerte *Jahres*bruttoprämie zum Alter x
$\tilde{b}_x = \dfrac{p_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$, $\tilde{b}_x = \dfrac{p_x + \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$	$\tilde{B}_x = \dfrac{P_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$, $\tilde{B}_x = \dfrac{P_x + \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}$	ungezillmerte *Monats*bruttoprämie zum Alter x

Definition, Prämienkomponenten und Darstellung mit repräsentativer gezillmerter Bruttoprämie und dynamischem Kostenansatz.

- Definition unter Abschnitt 1.1.5, p. 25.
- Die unnormierte *ungezillmerte* Bruttoprämie B_x zum Alter x ist – im Sinne der allgemeineren Form der Beitragsberechnung mit Zillmerung (dazu Abschnitt 1.1.6, p. 27) – eine rein rechnerische Größe, sie stellt die unnormierte *gezillmerte* Bruttoprämie ${}^Z B_x$ (dazu Abschnitt 1.1.7, p.29) ohne Einrechnung der Zillmerung dar. Bei Tarifen ohne Zillmerung

stellt sie als Spezialfall diese unnormierte *gezillmerte* Bruttoprämie ${}^{Z}B_x$ dar.

- Prämienkomponenten unter Abschnitt 1.1.5, p. 25
- Die unnormierte *ungezillmerte* Jahresbruttoprämie B_x zum Alter x lässt sich darstellen als:

$$B_x = \frac{P_x + \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^{Z}B^r_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}.$$

Herleitung.

- Formel (1:27, p. 25) mit $\Gamma_{j/s} = \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^{Z}B^r_{j/s}$ resp. $\gamma_{j/s} = \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^{Z}b^r_{j/s}$ gemäß Formel (1:37, p. 43) liefert die entsprechenden Darstellungen. ■

1.1.12 Gezillmerte Nettoprämie (Zillmerverfahren Teil 3: mit dynamischen Kostensatz).

Gezillmerte Nettoprämie. *normiert*	*unnormiert*	(1:39)
$${}^{Z}p_x = p_x + \frac{\alpha^Z_x}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}b_x$$ $${}^{Z}p_x = z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \gamma_{j/s}$$ $${}^{Z}p_x = z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^{Z}b^r_{j/s}$$	$${}^{Z}P_x = P_x + \frac{\alpha^Z_x}{12 \cdot a_x} \cdot {}^{Z}B_x$$ $${}^{Z}P_x = z_x \cdot P_x + (z_x - 1) \cdot \Gamma_{j/s}$$ $${}^{Z}P_x = z_x \cdot P_x + (z_x - 1) \cdot \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^{Z}B^r_{j/s}$$	gezillmerte Nettoprämie zum Alter x (Jahreswert)

Definition, Prämienkomponenten und Darstellung mit repräsentativer gezillmerter Bruttoprämie und dynamischem Kostenansatz.

- Definition unter Abschnitt 1.1.8, p. 34.
- Prämienkomponenten unter Abschnitt 1.1.8, p. 34.
- Die (jährliche) unnormierte gezillmerte Nettoprämie ${}^{Z}P_x$ zum Alter x lässt sich darstellen als:

$${}^{Z}P_x = z_x \cdot B_x + (z_x - 1) \cdot \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^{Z}B^r_{j/s} \text{ mit dem Zillmerfaktor } z_x,$$

$$z_x := \frac{12 \cdot a_x \cdot (1 - \Delta_{j/s})}{12 \cdot a_x \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \alpha^Z_x}.$$

Herleitung.

- Formel (1:34, p. 34) mit $\Gamma_{j/s} = \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}$ resp. $\gamma_{j/s} = \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z b^r_{j/s}$ gemäß Formel (1:37, p. 43):

$\Rightarrow$ (jährliche) unnormierte gezillmerte Nettoprämie

$${}^Z P_x = z_x \cdot P_x + (z_x - 1) \cdot \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s};$$

$\Rightarrow$ (jährliche) normierte gezillmerte Nettoprämie

$${}^Z p_x = z_x \cdot p_x + (z_x - 1) \cdot \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z b^r_{j/s}.$$

□■

Zahlenbeispiel.

x	x_spez.	j/s	a_x	P_x	Δ_j/s	Δ~ ^r _j/s	α^Z_x	B^Z ^r _j/s	z_x	P^Z_x
1	x_α	j	3,79	18,48	10,6%	17,0%	2,00	32,11	1,05	19,68
2	x_N, x_r	j	3,14	21,54	10,6%	17,0%	2,00	32,11	1,06	23,16
3		j	2,47	26,86	10,6%	17,0%	2,00	32,11	1,08	29,45
4	x_s	s	1,67	34,98	10,6%	14,0%	1,00	30,73	1,06	37,34
5	x_ω	s	1,00	50,00	10,6%	14,0%	0,00	30,73	1,00	50,00
Abweichungen auf Grund von Rundungen (algebraische Gleichheit)										

1.1.13 Gezillmerte Bruttoprämie (Teil 3: mit dynamischem Kostensatz).

Zusammenstellung der gezillmerten Bruttoprämien. (1:40)

normiert | *unnormiert*

$${}^Z b_x = \frac{p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \frac{\alpha^Z_x}{12 \cdot a_x}}, \qquad {}^Z B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s} - \frac{\alpha^Z_x}{12 \cdot a_x}},$$

$${}^Z b_x = \frac{{}^Z p_x + \gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}, \qquad {}^Z B_x = \frac{{}^Z P_x + \Gamma_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}},$$

$${}^Z b_x = \frac{{}^Z p_x + \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z b^r_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}, \qquad {}^Z B_x = \frac{{}^Z P_x + \tilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}},$$

$${}^Z b_x = b_x + \frac{\alpha^Z_x \cdot {}^Z b_x}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) \cdot a_x}, \qquad {}^Z B_x = B_x + \frac{\alpha^Z_x \cdot {}^Z B_x}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) \cdot a_x},$$

$${}^Z b_x = z_x \cdot b_x \qquad {}^Z B_x = z_x \cdot B_x$$

gezillmerte *Jahres*bruttoprämie zum Alter x

$${}^Z \tilde{b}_x = \frac{p_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \frac{\alpha^Z_x}{a_x}}, \qquad {}^Z \tilde{B}_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s}) - \frac{\alpha^Z_x}{a_x}},$$

$${}^Z \tilde{b}_x = \frac{{}^Z p_x + \gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})}, \qquad {}^Z \tilde{B}_x = \frac{{}^Z P_x + \Gamma_{j/s}}{12 \cdot (1 - \Delta_{j/s})},$$

gezillmerte *Monats*bruttoprämie zum Alter x

$$ {}^Z\tilde{b}_x = \frac{{}^Z p_x + \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z b^r_{j/s}}{12 \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right)}, \qquad {}^Z\tilde{B}_x = \frac{{}^Z P_x + \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}}{12 \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right)}, $$

$$ {}^Z\tilde{b}_x = \tilde{b}_x + \frac{\alpha^Z_x \cdot {}^Z b_x}{\left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot a_x}, \qquad {}^Z\tilde{B}_x = \tilde{B}_x + \frac{\alpha^Z_x \cdot {}^Z\tilde{B}_x}{\left(1 - \Delta_{j/s}\right) \cdot a_x}, $$

$$ {}^Z\tilde{b}_x = z_x \cdot \tilde{b}_x \qquad {}^Z\tilde{B}_x = z_x \cdot \tilde{B}_x $$

Definition, Prämienkomponenten und Darstellung mit repräsentativer gezillmerter Bruttoprämie und dynamischem Kostenansatz.

- Definition unter Abschnitt 1.1.7, p. 29.
- Prämienkomponenten unter Abschnitt 1.1.9, p. 40.
- Die unnormierte gezillmerte Jahresbruttoprämie ${}^Z B_x$ zum Alter x lässt sich darstellen als:

$$ {}^Z B_x = \frac{{}^Z P_x + \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}. $$

Herleitung.

- Formel (1:36, p. 40) mit $\Gamma_{j/s} = \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}$ resp. $\gamma_{j/s} = \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z b^r_{j/s}$ gemäß Formel (1:37, p. 43) ergibt:

$$ {}^Z B_x = \frac{{}^Z P_x + \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}, \text{ durch Normierung: } {}^Z b_x = \frac{{}^Z p_x + \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z b^r_{j/s}}{1 - \Delta_{j/s}}, \text{ durch} $$

$$ \text{Monatsbetrachtung: } {}^Z\tilde{B}_x = \frac{{}^Z P_x + \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z B^r_{j/s}}{12 \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right)}, \quad {}^Z\tilde{b}_x = \frac{{}^Z p_x + \widetilde{\Delta}^r_{j/s} \cdot {}^Z b^r_{j/s}}{12 \cdot \left(1 - \Delta_{j/s}\right)}. \quad \blacksquare $$

Zahlenbeispiel.

x	x_spez.	j/s	Δ_j/s	Δ~ ^r _j/s	B^Z ^r _j/s	P^Z_x	B^Z _x	B~^Z _x
1	x_α	j	10,6%	17,0%	32,11	19,68	28,12	2,34
2	x_N, x_r	j	10,6%	17,0%	32,11	23,16	32,01	2,67
3		j	10,6%	17,0%	32,11	29,45	39,05	3,25
4	x_s	s	10,6%	14,0%	30,73	37,34	46,58	3,88
5	x_ω	s	10,6%	14,0%	30,73	50,00	60,74	5,06
Abweichungen auf Grund von Rundungen (algebraische Gleichheit)								

1.2 Kalkulation mit Ansparprozess (auch mit altersabhängigen Kosten).

§ 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ KVAV.
[…]
(4) [1]In die Prämien dürfen mit Ausnahme der Zillmerung und der Zuschläge gemäß Absatz 1 Nummer 6 und 8 nur altersunabhängige absolute Kostenzuschläge eingerechnet werden; […].
[…]
[5]Satz 1 gilt nicht für die Prämienberechnung für Kinder und Jugendliche, für Ausbildungs-, Krankenhaustagegeld-, Krankentagegeld-, Kurtagegeld- und Pflegetagegeldtarife.
[…]

Gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ KVAV Absatz 4 Satz 4 können für Kinder und Jugendliche, für Ausbildungs-, Krankenhaustagegeld-, Krankentagegeld-, Kurtagegeld- und Pflegetagegeldtarife auch altersabhängige, d.h. beitragsproportionale Zuschläge eingerechnet werden, möglich ist auch ein Mischsystem aus altersunabhängigen und altersabhängigen Kostenzuschlägen für die unmittelbaren und mittelbaren Abschluss-, Schadenregulierungs- sowie sonstige Verwaltungskosten.

Je nach Kostenaufteilung ergeben sich die altersunabhängigen (jährlichen) Stückkosten $\Gamma'_{j/s}$ und der prämienproportionale Kostenzuschlag $\Delta'_{j/s}$.

- Der altersabhängige (beitragsproportionale) Zuschlag $\Delta_{j/s}$, $\Delta_{j/s} = \sigma_{j/s} + \alpha^{\sigma}_{j/s} + \Omega_{j/s} + \Delta'_{j/s}$ besteht sodann aus
  - dem Sicherheitszuschlag $\sigma_{j/s}$ samt Zuschlag $\alpha^{\sigma}_{j/s}$ für die unmittelbaren Abschlusskosten in den ersten Versicherungsjahren,
  - den Zuschlägen $\Omega_{j/s}$ hinsichtlich Basis- und Standardtarife und
  - dem Kostenzuschlag $\Delta'_{j/s}$, anteilig für die unmittelbaren und mittelbaren Abschluss-, Schadenregulierungs- sowie sonstige Verwaltungskosten.
- Der altersunabhängige Zuschlag $\Gamma'_{j/s}$ besteht sodann anteilig aus den unmittelbaren und mittelbaren Abschluss-, Schadenregulierungs- sowie sonstigen Verwaltungskosten.

Die in Kapitel 1.1, p. 9 dargestellte Beitragskalkulation erfolgt entsprechend unter Berücksichtigung der Kostenaufteilung in $\Gamma'_{j/s}$ und $\Delta'_{j/s}$ und des Zuschlages $\Delta_{j/s}$ in erweiterter Form.

1.3 Kalkulation ohne Ansparprozess.

§ 146 „Substitutive Krankenversicherung“ VAG.

[…]

(3) Substitutive Krankenversicherungen mit befristeten Vertragslaufzeiten nach § 195 Absatz 2 und 3 des Versicherungsvertragsgesetzes sowie Krankentagegeldversicherungen nach Vollendung des 65. Lebensjahres des Versicherten nach § 196 des Versicherungsvertragsgesetzes [Ausbildungs-, Auslands-, Ausländer-, Reise- und Restschuldkrankenversicherungen; Befristung der Krankentagegeldversicherung] können ohne Alterungsrückstellung kalkuliert werden.

[…]

§ 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ KVAV.

[…]

(4) [1]In die Prämien dürfen mit Ausnahme der Zillmerung und der Zuschläge gemäß Absatz 1 Nummer 6 und 8 nur altersunabhängige absolute Kostenzuschläge eingerechnet werden; […].
[…]
[5]Satz 1 gilt nicht für die Prämienberechnung für Kinder und Jugendliche, für Ausbildungs-, Krankenhaustagegeld-, Krankentagegeld-, Kurtagegeld- und Pflegetagegeldtarife.

[…]

§ 10 „Prämienberechnung“ KVAV.

[…]

(3) Abweichend von Absatz 1 dürfen Versicherte bis zur Vollendung des 16. Lebensjahres in der Altersgruppe der Kinder, bis zur Vollendung des 21. Lebensjahres in der Altersgruppe der Jugendlichen geführt werden.
Dabei darf die Altersgruppe der Jugendlichen nicht mehr Alter umfassen als die der Kinder.
In Ausbildungstarifen können Eintrittsaltersgruppen gebildet werden, die höchstens fünf Eintrittsalter umfassen.

(4) Planmäßig steigende Prämien dürfen für Versicherte kalkuliert werden, die das 21. Lebensjahr noch nicht vollendet haben, sowie in Ausbildungstarifen bis zum vollendeten 39. Lebensjahr der Versicherten.

[…]

Möglichkeiten einer Kalkulation ohne Ansparprozess.

- Die Prämienkalkulation in Tarifen nach Art von Leben für Kinder, Jugendliche und Personen in Ausbildung unterliegt der KVAV, allerdings ergibt sich aus § 10 „Prämienberechnung“ Absatz 4 KVAV, dass für diese Personengruppen die Prämien ohne expliziten Ansparprozess kalkuliert werden dürfen.

- Die Prämienkalkulation für KV-Tarife nach Art von Schaden (nur möglich für die nicht-substitutive Versicherung) für alle versicherten Personen unterliegt nicht der KVAV, so dass für diese Tarife die Prämien ohne expliziten Ansparprozess kalkuliert werden dürfen.

Weiterführendes.

Hinweis der DAV-Arbeitsgruppe zum Thema „Kalkulation von Krankenversicherungstarifen nach Art der Schadenversicherung", Deutsche Aktuarsvereinigung e.V., Köln, 2010.

1.3.1 Alterseinteilung und Kopfschäden.

Alterseinteilung.

- In Tarifen nach Art von Leben richtet sich die Alterseinteilung für Kinder, Jugendliche und Personen in Ausbildung nach § 10 „Prämienberechnung" Absatz 3 KVAV.

  Die Noch-nicht-Erwachsenen können demnach in bis zwei Altersbereiche geführt werden, wobei Kinder bis maximal zum Alter 15 und Jugendliche bis maximal zum Alter 20 jeweils zusammengefasst werden können. Bei einer niedrigeren Altersgrenze zwischen Kindern und Jugendlichen, ist darauf zu achten, dass der Altersbereich für Jugendliche sich nicht über mehr Einzelalter erstreckt als derjenige für Kinder.

  Personen in Ausbildung bis zum Alter 38 können in Altersbereiche eingeteilt werden, die jeweils nicht mehr als fünf Einzelalter umfassen.

  Beispiel:

Kinder	$K := \{\, 0, 1, \ldots, 14 \,\}$
Jugendliche	$J := \{\, 15, 16, \ldots, 19 \,\}$
Personen in Ausbildung	$A1 := \{\, 20, 21, \ldots, 24 \,\}$
	$A2 := \{\, 25, 26, \ldots, 29 \,\}$
	$A3 := \{\, 30, 31, \ldots, 34 \,\}$
	$A3 := \{\, 35, 36, 37, 38 \,\}$

- Für KV-Tarife nach Art von Schaden kann die Alterseinteilung für alle versicherten Personen beliebig vorgenommen werden, da diese Tarife nicht der KVAV unterliegen. Eine Einteilung nach Einzelalter ist auf Grund des potentiellen jährlichen Beitragswechsels nicht gebräuchlich. Daher eignen sich eher größere Altersbereiche $\widehat{x}$, zum Beispiel Altersbereiche über zehn Jahre oder an Hand einiger weniger Grenzalter, beispielsweise bezüglich der Alter 20, 40, 65, 80. Bei der Alterseinteilung sollte die Altersabhängigkeit der Kopfschäden beachtet werden.

Ermittlung der Kopfschäden.

- Die beobachteten Kopfschäden werden als Quotienten aus den Schäden $\hat{S}_{\hat{x}}$, $\hat{S}_{\hat{x}} = \sum_{x \in \hat{x}} \hat{S}_x$ durch die entsprechende Anzahl $\hat{L}_{\hat{x}}$, $\hat{L}_{\hat{x}} = \sum_{x \in \hat{x}} \hat{L}_x$ der Personen bezüglich der jeweiligen Alterszusammenfassung $\hat{x}$ ermittelt:

  $$\hat{K}_{\hat{x}} = \frac{\hat{S}_{\hat{x}}}{\hat{L}_{\hat{x}}} = \frac{\sum_{x \in \hat{x}} \hat{S}_x}{\sum_{x \in \hat{x}} \hat{L}_x} .$$

  Alternativ können auch die – für Einzelalter bestimmte – Kopfschäden K_x in den Alterszusammenfassungen $\hat{x}$ gemittelt werden (bezüglich der Anzahl $|\hat{x}|$ der Einzelalter x in der Alterszusammenfassung $\hat{x}$)

  $$K'_{\hat{x}} = \frac{\sum_{x \in \hat{x}} K_x}{|\hat{x}|} .$$

  Bei der endgültigen Festlegung der rechnungsmäßigen Kopfschäden sind Sicherheiten gemäß § 2 „Rechnungsgrundlagen“ Absatz 3 KVAV und die Zukunftsextrapolation einzurechnen.

  Insbesondere ist auf Grund der mehr oder weniger ausgeprägten Altersabhängigkeit der Kopfschäden die Altersverteilung des Bestandes in den einzelnen Alterszusammenfassungen $\hat{x}$ zu berücksichtigen, um so unerwünschte übermäßige Erhöhungen zu vermeiden, die durch eine veränderte Bestandsalterszusammensetzung entstehen könnten.

- Die starke Altersabhängigkeit bei Kindern in den ersten Jahren bezüglich ambulanter und stationärer Leistungen, resp. bei Kindern und Jugendlichen bezüglich Zahnleistungen wird bei der Zusammenfassung mehrerer Einzelalter bewusst in Kauf genommen. Umgangssprachlich ausgedrückt, gibt es hier „Quersubventionierungen“ zwischen den einzelnen Altern.

- Tarife für Personen in Ausbildung basieren bezüglich der Leistung oft auf allgemein zugängliche Tarife. In diesen Fällen werden die einzelaltergenau bestimmten rechnungsmäßigen Kopfschäden $G \cdot k_x$ dieser Tarife zur Ermittlung der Kopfschäden herangezogen, indem die rechnungsmäßigen Kopfschäden über die entsprechenden Alterszusammenfassung gemittelt werden, zum Beispiel:

  $$K_{A1} = \tfrac{1}{5} \cdot G \cdot \sum_{\xi=20}^{24} k_\xi , \; K_{A2} = \tfrac{1}{5} \cdot G \cdot \sum_{\xi=25}^{29} k_\xi , \; K_{A3} = \tfrac{1}{5} \cdot G \cdot \sum_{\xi=30}^{34} k_\xi ,$$
  $$K_{A4} = \tfrac{1}{4} \cdot G \cdot \sum_{\xi=35}^{38} k_\xi .$$

1.3.2 Jahresbruttorisikoprämie (Teil 1: mit festem Kostensatz).

Jahresbrutto*risiko*prämie.		(1:41)
Jahresbrutto*risiko*prämie ${}^{R}B_{\hat{x}}$	=	Kopfschaden $K_{\hat{x}}$
	+	Jahresstückkosten $\Gamma_{\hat{x}}$
	+	proportionaler Zuschlag $\Delta \cdot {}^{R}B_{\hat{x}}$
${}^{R}B_{\hat{x}}$	=	$K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}} + \Delta \cdot {}^{R}B_{\hat{x}}$

Brutto*risiko*prämie.		(1:42)
normiert	*unnormiert*	
${}^{R}b_x = \dfrac{k_{\hat{x}} + \gamma_{\hat{x}}}{1 - \Delta}$	${}^{R}B_x = \dfrac{K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}}{1 - \Delta}$	*Jahres*brutto*risiko*prämie zum Alter x, $x \in \hat{x}$
${}^{R}\tilde{b}_x = \dfrac{k_{\hat{x}} + \gamma_{\hat{x}}}{12 \cdot (1 - \Delta)}$	${}^{R}\tilde{B}_x = \dfrac{K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}}{12 \cdot (1 - \Delta)}$	*Monats*brutto*risiko*prämie zum Alter x, $x \in \hat{x}$

Definition, Prämienkomponenten und Berechnung.

- Die unnormierte Brutto*risiko*prämie ${}^{R}B_x$ zum Alter x gibt für Momentan-x-Jährige den jährlich während der Zugehörigkeit zum entsprechenden Altersbereich $\hat{x}$, $x \in \hat{x}$ zu zahlenden Betrag an, der genügt, während der Zugehörigkeit zum entsprechenden Altersbereich $\hat{x}$ jährlich jeweils den unnormierten Kopfschaden in Höhe $K_{\hat{x}}$ samt aller Kosten zu finanzieren; die Prämienzahlungen sowie die Kopfschadenzahlungen (beide ab dem ersten Jahr) erfolgen dabei jeweils vorschüssig, d.h. zu Jahresbeginn – es handelt sich hierbei jeweils um laufende Zahlungen.
- Die unnormierte Jahresbruttorisikoprämie ${}^{R}B_x$, ${}^{R}B_x = K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}} + \Delta \cdot {}^{R}B_{\hat{x}}$ zum Alter x, $x \in \hat{x}$ setzt sich zusammen aus:
  - dem (unnormierten jährlichen) Kopfschaden $K_{\hat{x}}$ ($K_{\hat{x}} = G \cdot k_{\hat{x}}$);
  - den (unnormierten jährlichen) Stückkosten $\Gamma_{\hat{x}}$ ($\Gamma_{\hat{x}} = G \cdot \gamma_{\hat{x}}$), welche gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge" Absatz 4 Satz 5 KVAV altersabhängig angesetzt werden dürfen;
  - dem (unnormierten jährlichen) Zuschlag $\Delta \cdot {}^{R}B_{\hat{x}}$ aus dem beitragsproportionalem Zuschlag Δ, auf die (unnormierte) Jahresbruttorisikoprämie ${}^{R}B_{\hat{x}}$.
- Die unnormierte Brutto*risiko*prämie ${}^{R}B_x$ zum Alter x lässt sich darstellen als:

$$
{}^{R}B_x = \frac{K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}}{1 - \Delta}.
$$

Herleitung.

- ${}^{R}B_{\hat{x}} = K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}} + \Delta \cdot {}^{R}B_{\hat{x}}$ gemäß Formel (1:41, p. 55)

$\Rightarrow$ ${}^{R}B_{\hat{x}} \cdot (1-\Delta) = K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}$

$\Rightarrow$ unnormierte Jahresbruttorisikoprämie ${}^{R}B_x$, $x \in \hat{x}$: ${}^{R}B_x = \dfrac{K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}}{1-\Delta}$;

- mit ${}^{R}b_x = \frac{1}{G} \cdot {}^{R}B_x$:

$\Rightarrow$ normierte Jahresbruttorisikoprämie ${}^{R}b_x$, $x \in \hat{x}$: ${}^{R}b_x = \dfrac{k_{\hat{x}} + \gamma_{\hat{x}}}{1-\Delta}$;

- mit ${}^{R}\widetilde{B}_x = \frac{1}{12} \cdot {}^{R}B_x$:

$\Rightarrow$ unnormierte Monatsbruttorisikoprämie ${}^{R}\widetilde{B}_x$, $x \in \hat{x}$: ${}^{R}\widetilde{B}_x = \dfrac{K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}}{12 \cdot (1-\Delta)}$;

- mit ${}^{R}\widetilde{b}_x = \frac{1}{G} \cdot {}^{R}\widetilde{B}_x$:

$\Rightarrow$ normierte Monatsbruttorisikoprämie ${}^{R}\widetilde{b}_x$, $x \in \hat{x}$: ${}^{R}\widetilde{b}_x = \dfrac{k_{\hat{x}} + \gamma_{\hat{x}}}{12 \cdot (1-\Delta)}$. ■

Zahlenbeispiel.

Alt'bereich	K_x	Δ	Γ	B^R _x	B~^R _x
K	5,00	10,6%	0,93	6,63	0,55
J	8,00	10,6%	1,49	10,62	0,89

Bemerkung.

- Es erfolgt keine Zillmerung, da es keine Beitragsanteile gibt, die dem Aufbau von Alterungsrückstellungen dienen. Die diesbezüglichen unmittelbaren Abschlusskosten sind demnach in die Γ-Kosten einzurechnen oder können mittels des Zuschlages α^{σ} in den ersten Versicherungsjahren finanziert werden.
- Da der Zuschlag $\mathrm{B}_{\hat{x}}$ für eine erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung und der Zuschlag O_x für die Optionsausübung eine untergeordnete Rolle in der PKV-Tarifwelt haben, werden sie hier nicht in die Bruttorisikoprämie eingerechnet, sondern dem tariflichen Beitrag (dazu Abschnitt 1.4, p. 60) zugeordnet.
- Formal kann die Herleitung auch an Hand der ungezillmerten Bruttopärmie $B_x = \frac{P_x + \Gamma_{j/s}}{1-\Delta_{j/s}}$ gemäß Formel (1:27, p. 25) erfolgen: In der Alterszusammenfassungen $\hat{x}$ ist der Kopfschaden $K_{\hat{x}}$ konstant; mit den Altersgren-

zen $x_K = \min(\hat{x})$, $x_\omega = \max(\hat{x})$ ist also $\forall \xi \mid \xi \geq x_K:\ K_\xi = K_{x_K}$, woraus gemäß Formel (1:24, 24) die Gleichheit $\forall \xi \mid \xi \geq x_K:\ P_\xi = K_{x_K}$ folgt, d.h. $B_x = \frac{K_{\hat{x}}+\Gamma}{1-\Delta}$ (bei entsprechender Betrachtung der Zuschläge).

1.3.3 Beitragsproportionaler Kostensatz.

Beitragsproportionaler Kostensatz.		(1:43)
normiert	*unnormiert*	
$\gamma_{\hat{x}} = \tilde{\Delta} \cdot {}^R b_{\hat{x}}$	$\Gamma_{\hat{x}} = \tilde{\Delta} \cdot {}^R B_{\hat{x}}$	Jahresstückkosten (für $\alpha^u_{s/j}$, α^m, ρ, β)
$\tilde{\Delta}$	beitragsproportionaler Kostensatz	

Herleitung.

- In Tarifen nach Art von Leben dürfen für Kinder, Jugendliche und Personen in Ausbildung gemäß § 8 „Grundsätze für die Bemessung der sonstigen Zuschläge“ Absatz 4 Satz 5 KVAV proportionale Zuschläge erhoben werden.
- Für KV-Tarife nach Art von Schaden dürfen ebenfalls proportionale Zuschläge erhoben werden, da diese Tarife nicht der KVAV unterliegen.
- $\Sigma\hat{L}$ Anzahl der versicherten Personen

  $\Sigma\hat{\Gamma}$ Gesamtvolumen der zu deckenden unmittel- und mittelbaren Abschluss-, Schadenregulierungs- und Verwaltungskosten

  $\Sigma\hat{B}$ Gesamtvolumen der jährlichen Beitragseinnahmen

  die Grundwerte $\Sigma\hat{L}$, $\Sigma\hat{\Gamma}$, $\Sigma\hat{B}$ werden über die letzten drei bis fünf Jahre erhoben
- $\hat{\Gamma} = \dfrac{\Sigma\hat{\Gamma}}{\Sigma\hat{L}}$ beobachtete jährliche Kosten

  $\hat{\tilde{\Delta}} = \dfrac{\Sigma\hat{\Gamma}}{\Sigma\hat{B}}$ beobachteter Anteil des Kostenvolumens $\Sigma\hat{\Gamma}$ am Beitragsvolumen $\Sigma\hat{B}$ ($\Rightarrow\ \Sigma\hat{\Gamma} = \hat{\tilde{\Delta}} \cdot \Sigma\hat{B}$)

  $\phi\hat{B} = \dfrac{\Sigma\hat{B}}{\hat{L}}$ mittlerer Beitrag
- $\tilde{\Delta}$ proportionaler Beitragszuschlag zur Deckung der Abschluss-, Schadenregulierungs- und Verwaltungskosten, unter Beachtung der einzurechnenden Sicherheiten gemäß § 2 „Rechnungsgrundlagen“ Absatz 3 KVAV

Aus $\hat{\Gamma} = \dfrac{\Sigma\hat{\Gamma}}{\Sigma\hat{L}} = \dfrac{\hat{\tilde{\Delta}} \cdot \Sigma\hat{B}}{\Sigma\hat{L}} = \hat{\tilde{\Delta}} \cdot \dfrac{\Sigma\hat{B}}{\Sigma\hat{L}} = \hat{\tilde{\Delta}} \cdot \phi\hat{B}$ resultiert $\Gamma_{\hat{x}} = \tilde{\Delta} \cdot {}^R B_{\hat{x}}$.

Zahlenbeispiel.

Kostenart	ΣΓ^	ΣB^	Δ~^	Δ~
α^u, α^m, σ, β	770	6.000	12,8%	14,0%

einschließlich aller unmittelbaren Abschlusskosten, da ohne Zillmerung
Δ~ als Maximum aus 1 Prozentpunkt oder 5 Prozent höher als
Δ~^ auf ganze Prozentpunkte gerundet

1.3.4 Jahresbruttorisikoprämie (Teil 2: mit beitragsproportionalem Kostensatz).

Zusammenstellung der Brutto*risiko*prämien.		(1:44)
normiert	*unnormiert*	
${}^{R}b_x = \dfrac{k_{\hat{x}} + \gamma_{\hat{x}}}{1-\Delta}$, ${}^{R}b_x = \dfrac{k_{\hat{x}}}{1-\Delta-\tilde{\Delta}}$	${}^{R}B_x = \dfrac{K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}}{1-\Delta}$, ${}^{R}B_x = \dfrac{K_{\hat{x}}}{1-\Delta-\tilde{\Delta}}$	*Jahres*brutto*risiko*prämie zum Alter x, $x \in \hat{x}$
${}^{R}\tilde{b}_x = \dfrac{k_{\hat{x}} + \gamma_{\hat{x}}}{12\cdot(1-\Delta)}$, ${}^{R}\tilde{b}_x = \dfrac{k_{\hat{x}}}{12\cdot(1-\Delta-\tilde{\Delta})}$	${}^{R}\tilde{B}_x = \dfrac{K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}}{12\cdot(1-\Delta)}$, ${}^{R}\tilde{B}_x = \dfrac{K_{\hat{x}}}{12\cdot(1-\Delta-\tilde{\Delta})}$	*Monats*brutto*risiko*prämie zum Alter x, $x \in \hat{x}$

Definition, Prämienkomponenten und Darstellung mit beitragsproportionalem Kostensatz.

- Definition unter Abschnitt 1.3.2, p. 55.
- Prämienkomponenten unter Abschnitt 1.3.2, p. 55.
- Die unnormierte Brutto*risiko*prämie ${}^{R}B_x$ zum Alter x lässt sich darstellen als:

$$ {}^{R}B_x = \frac{K_{\hat{x}}}{1-\Delta-\tilde{\Delta}} . $$

Herleitung.

- Gemäß Formel (1:42, p. 55): ${}^{R}B_x = \dfrac{K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}}}{1-\Delta}$.
- ${}^{R}B_{\hat{x}} = K_{\hat{x}} + \Gamma_{\hat{x}} + \Delta \cdot {}^{R}B_{\hat{x}}$ gemäß Formel (1:41, p. 55) mit der Darstellung $\Gamma_x = \tilde{\Delta}\cdot {}^{R}B_x$ gemäß Formel (1:43, p. 57):

  $$ {}^{R}B_{\hat{x}} = K_{\hat{x}} + \tilde{\Delta}\cdot {}^{R}B_{\hat{x}} + \Delta \cdot {}^{R}B_{\hat{x}} $$

$$\Rightarrow \; {}^{R}B_{\hat{x}} \cdot \left(1 - \Delta - \tilde{\Delta}\right) = K_{\hat{x}} \,.$$

$$\Rightarrow \; {}^{R}B_{x} \,,\; x \in \hat{x} : \; {}^{R}B_{x} = \frac{K_{\hat{x}}}{1 - \Delta - \tilde{\Delta}} \,.$$

- Die normierten Prämien ergeben sich durch Division mit dem Grundkopfschaden G, die Monatsprämien durch Division mit 12. ■

Zahlenbeispiel.

Alt'bereich	K_x	Δ	Δ~	B^R _x	B~^R _x	Gamma
K	5,00	10,6%	14,0%	6,63	0,55	0,93
J	8,00	10,6%	14,0%	10,61	0,88	1,49
Abweichungen auf Grund von Rundungen (algebraische Gleichheit)						

1.4 Tarif- und Zahlbeitrag.

§ 138 […] „Gleichbehandlung" VAG.
[…]
(2) Bei gleichen Voraussetzungen dürfen Prämien und Leistungen nur nach gleichen Grundsätzen bemessen werden.

(Unnormierte) Monatsbeiträge.	(1:45)
$^{t}\widetilde{B}_x = \begin{cases} {}^{Z}\widetilde{B}_x + \widetilde{\mathrm{B}}_{\hat{\hat{x}}} + \widetilde{\mathrm{O}}_x & \text{resp.} \\ {}^{R}\widetilde{B}_{\hat{x}} + \widetilde{\mathrm{B}}_{\hat{x}} + \widetilde{\mathrm{O}}_{\hat{x}} \end{cases}$	tariflicher Monatsbeitrag zum Alter x
$^{pt}\widetilde{B}_x = {}^{t}\widetilde{B}_x - G\widetilde{V}_x - L\widetilde{E}_x$	personengruppenbezogener tariflicher Monatsbeitrag zum Alter x bezüglich Gruppenversicherungsrabatten $G\widetilde{V}_x$ oder Leistungseinschränkungsrabatt $L\widetilde{E}_x$
$^{gpt}\widetilde{B}_x(VP) = {}^{pt}\widetilde{B}_x + G\widetilde{Z}_x(VP)$ $G\widetilde{Z}_x(VP) = pGZ_x(VP) \cdot {}^{pt}\widetilde{B}_x$	personengruppenbezogener tariflicher Monatsbeitrag zum Alter x ggf. einschließlich des gesetzlichen Zuschlags der versicherten Person VP
$^{ind}\widetilde{B}_x(VP) = {}^{pt}\widetilde{B}_x + G\widetilde{Z}_x(VP) + R\widetilde{Z}(VP)$ $R\widetilde{Z}_x(VP) = pRZ_x(VP) \cdot {}^{pt}\widetilde{B}_x(VP)$	VP-individuell zu zahlender Monatsbeitrag zum Alter x

Bemerkung.

- Die Festlegung aller Beiträge (tariflich, personengruppenbezogen, VP-individuell) hat dem Gleichbehandlungsgrundsatz gemäß § 138 „Gleichbehandlung" Absatz 2 VAG zu folgen (laut § 146 „Substitutive Krankenversicherung" Absatz 2 VAG). So dürfen einzelpersonenindividuell weder Rabatte oder andersweitige Vergünstigungen gewährt noch Zuschläge erhoben werden: sobald eine andere versicherte Person die gleichen Voraussetzung (einschließlich des Gesundheitszustandes) erfüllt, haben diese Maßstäbe bei der Beitragserhebung auch für sie zu gelten.

Tariflicher Beitrag im Neugeschäft: Komponenten.

- Der unnormierte tarifliche Monatsbeitrag $^{t}\widetilde{B}_x$,

$$^{t}\widetilde{B}_x = \begin{cases} {}^{Z}\widetilde{B}_x + \widetilde{\mathrm{B}}_{\hat{\hat{x}}} + \widetilde{\mathrm{O}}_x & \text{resp.} \\ {}^{R}\widetilde{B}_{\hat{x}} + \widetilde{\mathrm{B}}_{\hat{x}} + \widetilde{\mathrm{O}}_{\hat{x}} \end{cases}$$

zum Alter x setzt sich zusammen aus:

- der unnormierten gezillmerten Monatsbruttoprämie ${}^{Z}\widetilde{B}_x$ resp. unnormierten Monatsbrutto*risiko*prämie ${}^{R}\widetilde{B}_x$ gemäß Formeln (1:36, p. 40) resp. (1:44, p. 58);
- ggf. dem monatlichen Zuschlag $\widetilde{\mathrm{B}}_{\hat{x}}$ resp. $\widetilde{\mathrm{B}}_{\bar{x}}$ für eine erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung (bei Ansparprozess: beobachtungseinheitsabhängig);
- ggf. dem monatlichen Zuschlag $\widetilde{\mathrm{O}}_x$ resp. $\widetilde{\mathrm{O}}_{\bar{x}}$ für die Optionsausübung;
  - sofern bei der Festlegung der beiden letztgenannten Zuschläge der Sicherheitszuschlag σ oder der Zuschlag Ω hinsichtlich Basis- und Standardtarife noch nicht berücksichtigt ist, sind sie entsprechend noch einzurechnen, d.h. $\widetilde{\mathrm{B}} = \frac{\widetilde{\widetilde{\mathrm{B}}}}{1-\Delta}$, $\widetilde{\mathrm{O}} = \frac{\widetilde{\widetilde{\mathrm{O}}}}{1-\Delta}$, ggf. sind auch Kosten einzurechnen, dabei ist ferner auf die Monatssicht zu achten.

Bemerkung.

- Der tarifliche Monatsbeitrag ${}^{t}\widetilde{B}_x$ ist grundsätzlich für alle x-jährige versicherte Personen in einem Tarif in gleicher Höhe zu entrichten, er bildet die Grundlage für den letztendlich zu zahlenden Beitrag.

Personengruppenbezogener tariflicher Beitrag zu Versicherungsbeginn: Komponenten.

- Der personengruppenbezogene tarifliche Monatsbeitrag ${}^{pt}\widetilde{B}_x$,

  $${}^{pt}\widetilde{B}_x = {}^{t}\widetilde{B}_x - G\widetilde{V}_x - L\widetilde{E}_x$$

  zum Alter x setzt sich zusammen aus:
  - dem tariflichen Monatsbeitrag ${}^{t}\widetilde{B}_x$ im Neugeschäft;
  - sofern die Voraussetzungen vorliegen für:
    - ggf. abzüglich von Gruppenversicherungsrabatten $G\widetilde{V}_x$;
    - ggf. abzüglich von speziell vereinbarten Rabatten $L\widetilde{E}_x$ für Leistungseinschränkungen;

Personengruppenbezogener tariflicher Beitrag ggf. einschließlich gesetzlicher Zuschlag zu Versicherungsbeginn: Komponenten.

- Der personengruppenbezogene tarifliche Monatsbeitrag ${}^{gpt}\tilde{B}_x(VP)$,

  ${}^{gpt}\tilde{B}_x(VP) = {}^{pt}\tilde{B}_x + G\tilde{Z}_x(VP)$

  zum Alter x einschließlich des gesetzlichen Zuschlags der versicherten Person VP setzt sich zusammen aus:

  - dem personengruppenbezogenen tariflichen Monatsbeitrag ${}^{pt}\tilde{B}_x$;
  - ggf. dem gesetzlichen Zuschlag $G\tilde{Z}_x(VP)$, $G\tilde{Z}_x(VP) = pGZ_x(VP) \cdot {}^{pt}\tilde{B}_x$ zum VP-individuellen Beitragssatz $pGZ_x(VP)$ in Höhe von zehn Prozent (i.d.R. für 21-bis-59-jährige substitutiv versicherte Erwachsene) oder Null Prozent.

VP-individueller Zahlbeitrag zu Versicherungsbeginn: Komponenten.

- Der VP-individuelle zu zahlende Monatsbeitrag ${}^{ind}\tilde{B}_x(VP)$,

  ${}^{ind}\tilde{B}_x(VP) = {}^{gpt}\tilde{B}_x(VP) + R\tilde{Z}_x(VP)$

  zum Alter x setzt sich zusammen aus:

  - dem personengruppenbezogenen tariflichen Monatsbeitrag ${}^{gpt}\tilde{B}_x$ zum Alter x einschließlich des gesetzlichen Zuschlags;
  - ggf. dem individuell vereinbarten Risikozuschlag $R\tilde{Z}_x(VP)$, $R\tilde{Z}_x(VP) = pRZ_x(VP) \cdot {}^{pt}\tilde{B}_x(VP)$ als Zusatzbeitrag aus Prozentsatz $pRZ_x(VP)$ bezüglich des personengruppenbezogenen tariflichen Monatsbeitrages ${}^{pt}\tilde{B}_x$ (auf Risikozuschläge ist kein gesetzlicher Zuschlag zu entrichten).

1.5 Beitragsaufteilung.

	Beitragsaufbau	Beitragsverwendung
	Risikoprämie K	Versicherungsleistungen K
	evtl. enthaltene Wartezeit- und Selektionsersparnisse	unmittelbare Abschlusskosten
+	Sparprämie $P-K$ (auf Grund Äquivalenzprinzip zuerst positiv, später negativ)	Alterungsrückstellung V, i.d.R. zuerst wachsend, später abbauend
=	Nettoprämie P	
+	Zillmerung $\alpha^Z \cdot {}^ZB$	unmittelbare Abschlusskosten
+	Stückkosten Γ ($\alpha^u_{s/j}$, α^m, ρ, β)	unmittel- und mittelbare Abschluss-, Schadenregulierungs- und sonstige Verwaltungskosten
+	Zuschlag für den Basistarif Ω^{BT}	Beitragsgarantie im Basistarif
+	Zuschlag für den Standardtarif Ω^{ST}	Beitragsgarantie im Standardtarif
+	Sicherheitszuschlag σ	Ausgleich überrechnungsmäßiger Aufwendungen
	evtl. enthaltener Zuschlag $\alpha^{\sigma}_{j/s}$ für die unmittelbaren Abschlusskosten in den ersten Versicherungsjahren	unmittelbare Abschlusskosten
=	Bruttoprämie ${}^ZB$	
+	Zuschlag B für erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung	erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung
+	Zuschlag O für die Optionsausübung	Mehrleistungs-Risikoverschlechterungszuschlag im Zieltarif
=	tariflicher Beitrag ${}^tB$	
–	Gruppenversicherungsrabatt GV	Einsparungen an entsprechenden Kosten
–	Rabatt LE für Leistungseinschränkungen	Einsparungen an entsprechenden Versicherungsleistungen
=	personengruppenbezogener tariflicher Beitrag ${}^{pt}B$	
+	gesetzlicher Zuschlag GZ in Höhe von zehn Prozent	ab Alter 65 anvisierte komplette oder teilweise Beitragsstabilität resp. ggf. ab Alter 80 Beitragssenkung
=	personengruppenbezogener tariflicher Beitrag ${}^{gpt}B$ einschließlich gesetzlicher Zuschlag	
+	Risikozuschlag RZ	Überschaden, verursacht durch Vorerkrankungen
=	VP-individueller Zahlbeitrag ${}^{ind}B$	

Zahlenbeispiel.

	x	1					1				
Jahreswerte		Beitragsaufteilung					Beitragsverwendung				
	m	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
	x+m	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	j/s	j	j	j	s	s	j	j	j	s	s
Risiko	K_x	10,00	10,00	15,00	25,00	50,00	5,31	7,65	15,00	25,00	50,00
enthaltene WSE, 1. VJ: 2 MB, 2. VJ: 1 MB	WSE	*(4,69)*	*(2,35)*	.	.	.	4,69	2,35	.	.	.
Sparanteil	P_x - K_x	8,48	8,48	3,48	-6,52	-31,52	5,03	9,72	4,72	-5,28	-30,28
Nettoanteil (ohne Zillmerung)	P_x	18,48	18,48	18,48	18,48	18,48					
Zillmerung, 2 MB: 2 * 28,16 / 12 = 4,69	α^Z_x	1,24	1,24	1,24	1,24	1,24	4,69	.	.	.	.
Stückkosten: unmittelbare Abschlusskosten	ɹ	0,96	0,96	0,96	.	.	0,96	0,96	0,96	.	.
mittelbare Abschlusskosten	ן	1,89	1,89	1,89	1,81	1,81	1,89	1,89	1,89	1,81	1,81
Schadenregulierungskosten	ɔ	1,64	1,64	1,64	1,57	1,57	1,64	1,64	1,64	1,57	1,57
sonstige Verwaltungskosten	ɜ	0,96	0,96	0,96	0,92	0,92	0,96	0,96	0,96	0,92	0,92
Zuschlag für den Basistarif: 0,6 % / 0,6 %	Ω^BT	0,17	0,17	0,17	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,16	0,16
Zuschlag für den Standardtarif: 0,1 % / .	Ω^ST	0,03	0,03	0,03	.	.	0,03	0,03	0,03	.	.
Sicherheitszuschlag: 9,9 % / 10,0 %	σ^α/ σ	1,41	2,79	2,79	2,69	2,69	1,41	2,79	2,79	2,69	2,69
Zuschlag α^σ, 1. VJ: 4,9 % / 5,0 %	α^σ	1,38	.	.	.	.	1,38	.	.	.	.
(unmittelbare Abschlusskosten gesamt)	(uAK)	*(8,27)*	*(4,55)*	*(2,20)*	*(1,24)*	*(1,24)*	*(11,72)*	*(3,31)*	*(0,96)*	*(0,00)*	*(0,00)*
Bruttoprämie	B^Z	28,16	28,16	28,16	26,87	26,87					
Zuschlag für erfolgsunabh. Beitragsrückerstatt.	B	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00					
Zuschlag für die Optionsausübung	O	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50					
tariflicher Beitrag	B^t	29,66	29,66	29,66	28,37	28,37					
Gruppenversicherungsrabatt	GV	.	.	.	.	.					
Rabatt für Leistungseinschränkungen	LE	.	.	.	.	.					
personengruppenbezogener tariflicher Btrg	B^pt	29,66	29,66	29,66	28,37	28,37					
gesetzlicher Zuschlag i.H.v. zehn Prozent	GZ	2,97	2,97	.	.	.					
pers'grp'bez. tarifl. Btrg einschl. g.Zuschl.	B^gpt	32,63	32,63	29,66	28,37	28,37					
Risikozuschlag: 20,0 %	RZ	5,93	5,93	5,93	5,67	5,67					
VP-individueller Zahlbeitrag	B^ind	38,56	38,56	35,59	34,04	34,04					

VJ: Versicherungsjahr
MB: Monatsbeitrag