AB Geometrie und Topologie
Prof. Bernhard Leeb, Ph.D.
Dr. Christian Lange

V Mo 12-14 in C 123
Mi 10-12 in B 138
ZÜ Di 14-16 in B 138

Funktionentheorie: Analysis und Geometrie von Funktionen einer komplexen Variablen

Vorlesung SoSem 2024

Stand 24.4.2024

Die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen ist das vielleicht faszinierendste Kapitel im Analysis-Zyklus des Grundstudiums. Die auf den ersten Blick zur reellen Differenzierbarkeit völlig analoge Definition der komplexen Differenzierbarkeit öffnet die Tür in eine andere mathematische Welt. Sie zieht drastisch stärkere Konsequenzen nach sich. So erzwingt sie höhere Regularität: Ist eine Funktion einmal komplex differenzierbar, so gleich beliebig oft und sie ist sogar *analytisch*, d.h. lässt sich lokal durch Potenzreihen darstellen. Deshalb ist eine solche Funktion auch *starr* im Sinne, dass ihr Verhalten in einer beliebig kleinen Scheibe sie bereits global festlegt (eindeutige analytische Fortsetzung). Insbesondere gibt es keine komplex differenzierbaren „Buckelfunktionen“. Dies kontrastiert die Flexibilität reell differenzierbarer Funktionen und führt zu neuen Phänomenen und stärkeren Gesetzmäßigkeiten. Der tiefere Grund hierfür ist, dass eine Funktion genau dann komplex differenzierbar ist, wenn sie als Funktion zweier reeller Variablen betrachtet die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Diese sind eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung vom elliptischen Typ und die Analytizität komplex differenzierbarer Funktionen ist ein Beispiel für das Phänomen der *elliptischen Regularität.*

Beim Übergang vom Reellen zum Komplexen entfalten sich einige Gesetzmäßigkeiten erst voll (wie zB auch im Fall von polynomieller Gleichungen und des Fundamentalsatzes der Algebra) und neue Verbindungen treten zutage. So sind die wichtigsten reell differenzierbaren Funktionen analytisch und daher natürlich (holomorph) ins Komplexe fortsetzbar. Verschiedene reelle Funktionen, wie z.B. gewöhnlicher und hyperbolischer Sinus, werden zu Aspekten derselben holomorphen Funktion. Das Studium komplexer Funktionen wirft so neues Licht auf reelle Funktionen.

Zu den Themen zählen: Die Cauchysche Integralformel und fundamentale Eigenschaften holomorpher Funktionen, isolierte Singularitäten und Residuensatz, Homotopie und Homologie, konforme Abbildungen und Riemannscher Uniformisierungssatz.

Für: Studierende der Mathematik oder Physik ab 4. Semester

Vorkenntnisse: Analysis I-III und Lineare Algebra I+II

Literatur: K. Jänich, *Funktionentheorie*, Springer 1992 kurze und prägnante Einführung

L. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill 1953 klassisch

W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg 2003

E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1*, Springer 1993

R. Remmert, G. Schumacher, *Funktionentheorie 1*, Springer 1984 viel Historisches

T. Needham, *Visual complex analysis*, Oxford UP 1997 ergänzend

Beginn am Montag dem 15.4. um 12:15