

Seminarprogramm

Prof. Dr. Werner Ballmann (Bonn)
Prof. Bernhard Leeb, Ph.D. (München)

Chirurgie

BLOCKSEMINAR WS 2009/2010

I. Differentialtopologische Vorbereitungen (1V).

1. Allgemeine Lage: Transversalität, Whitney-Immersion und -Einbettung
2. Bordismus, Pontrjagin-Thom-Konstruktion

II. Morse-Theorie und h -Kobordismussatz (4V). Ein h -Kobordismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten kann als Schritt von einer Homotopie-Äquivalenz hin zu einem Diffeomorphismus angesehen werden. Der h -Kobordismussatz beschreibt eine allgemeine Situation, in der h -Kobordismen Produkte sind und damit Diffeomorphismen liefern. Der Beweis, der anhand der Darstellung in [Mi65h] besprochen werden soll, basiert auf Morse-Theorie und die Strategie ist die Vereinfachung von Morse-Funktionen bzw. der Dynamik ihrer gradientenartigen Flüsse (kritische Punkte und verbindende Trajektorien). Die Grundlagen der Morse-Theorie (§1-3) sollen nur zur Erinnerung skizziert und das Hauptaugenmerk auf den eigentlichen Beweis (§4-8) gelegt werden. Spektakuläre Anwendungen sind die Poincaré-Vermutung und Schönflies in Dimension ≥ 5 (§9).

III. Whitehead-Torsion und s -Kobordismussatz (3V). Der h -Kobordismussatz soll auf den Fall nichttrivialer Fundamentalgruppe ausgedehnt werden, wobei eine Obstruktion algebraischer Natur ins Spiel kommt, die Whitehead-Torsion. Ihre Werte liegen in der Whitehead-Gruppe $Wh(\pi_1)$, die alleine von der Fundamentalgruppe abhängt. Nach algebraischen Vorbereitungen (Konstruktion der Whitehead-Gruppe) sollen geometrische Invarianten gewonnen werden (Whitehead-Torsion von Homotopie-Äquivalenzen endlicher CW-Komplexe bzw. h -Kobordismen) und entsprechende Klassifikationsresultate formuliert werden (einfache Homotopietypen von CW-Komplexen bzw. h -Kobordismen mit gegebener Anfangsmannigfaltigkeit). Letzteres ist der s -Kobordismussatz, dessen Beweis aufbauend auf dem Beweis des h -Kobordismussatzes skizziert werden soll. Quellen: [KL05, Kap. 5-8] und [Ke65].

IV. Killing homotopy groups (0V). Um die allgemeine Theorie der Chirurgie zu motivieren, sollen die frühen Arbeiten [Mi61, Wa62] (hauptsächlich erstere) vorgestellt werden, in denen Chirurgie unter Parallelisierbarkeitsannahmen eingesetzt wird, um Mannigfaltigkeiten hoch-zusammenhängend zu machen. Es soll mindestens das zu Beginn von [Mi61] formulierte und Chirurgie unterhalb der mittleren Dimension betreffende Resultat erklärt werden, daß man geschlossene $(m - 1)$ -parallelisierbare $2m$ -Mannigfaltigkeiten $(m - 1)$ -zusammenhängend machen kann.

V. Exotische Sphären (3V). Es soll das Hauptresultat der Arbeit von Kervaire und Milnor [KM63] besprochen werden, daß die Gruppe Θ_n der Diffeomorphieklassen n -dimensionaler Homotopiesphären für $n \geq 5$ endlich ist. Man sieht hier auch, in welche

Teilprobleme sich das Klassifikationsproblem zerlegt und welche Rolle die Chirurgie dabei spielt.

VI. Chirurgie (5V). Chirurgie spielt eine zentrale Rolle bei der Klassifikation glatter Mannigfaltigkeiten in Dimension > 5 . Nachdem wir dies in spezielleren Situationen bereits kennengelernt haben (exotische Sphären), wollen wir uns nun mit dem allgemeinen Fall befassen geleitet von der Frage, *wann man eine Homotopie-Äquivalenz geschlossener glatter Mannigfaltigkeiten M_0 und M_1 zu einem Diffeomorphismus deformieren kann.* Chirurgie betrifft dabei den Schritt, einen Kobordismus (W, M_0, M_1) zwischen M_0 und M_1 in einen h -Kobordismus umzuwandeln.

Zuerst soll das Konzept der Normalenabbildung (normal map) im Zusammenhang mit den Bordismusgruppen erklärt werden. Während man in der CW-Kategorie Elemente von Homotopiegruppen einfach durch Anheften von Zellen stets annullieren kann, ist dies in der glatten Kategorie durch Chirurgie nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Die Normalenabbildung gewährt geometrische Kontrolle, so daß zu annullierende Elemente von Homotopiegruppen (unterhalb der mittleren Dimension) durch eingebettete Sphären mit trivialem Normalenbündel repräsentiert und daher tatsächlich durch Chirurgie beseitigt werden können. Die Chirurgie soll erst unterhalb der mittleren Dimension durchgeführt werden, wo noch keine Hindernisse auftreten. Die Hindernisse zur Chirurgie in mittlerer Dimension liegen in sogenannten L -Gruppen, die in einem algebraischen Exkurs eingeführt werden sollen. Es sollen dann die Chirurgie-Obstruktionen erklärt und (im Fall $\dim \equiv 0 \pmod{4}$) gezeigt werden, daß sie invariant unter Bordismus sind und die einzigen Hindernisse darstellen, um den gegebenen Bordismus in einen h -Kobordismus zu überführen. Diese Information soll schließlich in der exakten Chirurgie-Sequenz zusammengefaßt werden. Quellen: [KL05, ch. 11-14], eventuell weitere Details aus [Lü04, ch. 3-5].

Eventuell kann man im Licht der allgemeinen Theorie noch einmal auf den Fall der exotischen Sphären zurückkommen [Lü04, Kap. 6].

- [Ko93] A. KOSINSKI, *Differential manifolds*, Academic Press, 1993.
- [Kr00] M. KRECK, *A guide to the classification of manifolds*, in: *Surveys on surgery theory*, vol. 1, Ann. Math. Stud. 145, 121-134 (2000), Princeton.
- [Ke65] M. KERVAIRE, *Le théorème de Barden-Mazur-Stallings*, Comment. Math. Helv. 40, 31-42 (1965).
- [KM63] M. KERVAIRE, J. MILNOR, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. Math. (2) 77, 504-537 (1963)
- [KL05] M. KRECK, W. LÜCK, *The Novikov Conjecture*, Oberwolfach Seminars, Birkhäuser 2005.
- [Lü04] W. LÜCK, *A basic introduction to surgery theory*, lecture notes, 2004.
- [Mi56] J. MILNOR, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics **64**, 1956.
- [Mi61] J. MILNOR, *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. 3, 39-55 (1961).
- [Mi65d] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton 1965.

- [Mi65h] J. MILNOR, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton 1965.
- [Mi66] J. MILNOR, *Whitehead torsion*, Bull. Am. Math. Soc. 72, 358-426 (1966).
- [Ro01] J. ROSENBERG, *Surgery theory today – what it is and where it’s going*, in: Surveys on surgery theory, vol. 2, Ann. Math. Stud. 149, 3-47 (2001), Princeton.
- [Wa62] C.T.C. WALL, *Killing the middle homotopy groups of odd dimensional manifolds*, Trans. AMS 103, 421-433 (1962).