

Lösungen:

46. **Rang einer Matrix.** Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reelle $n \times n$ -Matrizen mit $\text{rg}A = \text{rg}B = r \in \{0, \dots, n\}$. Man zeige: $\text{rg}(BA) \leq r$.

Es ist $\text{rg}(BA) = \dim \mathbf{Im} \hat{B}A = \dim \hat{B}(\mathbf{Im} \hat{A})$. Nach Voraussetzung gilt $\dim \mathbf{Im} \hat{A} = r$, also $\mathbf{Im} \hat{A} = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ mit gewissen Spalten $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$.

Daher wird $\mathbf{Im} \hat{B}A = \hat{B}(\mathbf{Im} \hat{A})$ durch Bv_1, \dots, Bv_r aufgespannt; die Dimension ist also $\leq r$ (da man unter den aufspannenden Vektoren eine Basis auswählen kann).

47. **Affine Unterräume**

Welche der folgenden affinen Unterräume des \mathbb{R}^3 sind gleich?

$$X_1 = e_2 + \langle e_2 - e_1, e_3 - e_1 \rangle$$

$$X_2 = 2e_2 + \langle 2e_2 - 2e_1, 2e_3 - 2e_1 \rangle$$

$$X_3 = e_1 + \langle e_3 - e_2, e_3 - e_1 \rangle$$

$$X_4 = e_1 + \langle 2e_2 - e_1, 2e_3 - e_1 \rangle$$

Damit zwei affine Unterräume $x_i + U_i$, $i = 1, 2$, gleich sind, muß zunächst $U_1 = U_2$ gelten (der zu einem affinen Unterraum gehörende Untervektorraum ist durch den affinen Unterraum eindeutig bestimmt).

Die affinen Unterräume von X_1 und X_2 sind offensichtlich gleich.

Die affinen Unterräume von X_1 und X_3 sind ebenfalls gleich, da

$$e_3 - e_2 = (e_3 - e_1) - (e_2 - e_1) \in \langle e_2 - e_1, e_3 - e_1 \rangle$$

und

$$e_2 - e_1 = (e_3 - e_1) - (e_3 - e_2) \in \langle e_3 - e_2, e_3 - e_1 \rangle$$

gilt.

Dagegen ist der affine Unterraum von X_4 ein anderer. Das kann man z.B. daraus folgern, daß man zeigt, daß die Vektoren $2e_2 - e_1, e_2 - e_1$ und $e_3 - e_1$ l.u. sind. Also ist X_4 von den anderen affinen Unterräumen verschieden.

Von den drei affinen Unterräumen X_1, X_2, X_3 , die alle den gleichen Untervektorraum haben, sind X_1 und X_3 gleich wegen

$$e_2 = e_1 + (e_2 - e_1) = e_1 + (e_3 - e_1) - (e_3 - e_2) \in X_3$$

und

$$e_1 = e_2 - (e_2 - e_1) \in X_1.$$

Dagegen ist X_2 von X_1 (und X_3) verschieden wegen $2e_2 \notin X_1$; dies folgt z.B. wegen $e_1 \in X_1$, aber $2e_2 - e_1 \notin \langle e_2 - e_1, e_3 - e_1 \rangle$, wie oben gezeigt wurde.

48. **Koordinatentransformationen.**

Sei $d: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Drehung im \mathbb{R}^3 mit dem Drehwinkel 45° um die Achse

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Man gebe die Matrixdarstellung von d bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ des \mathbb{R}^3 an. Man bestimme dazu zuerst die Matrixdarstellung der linearen Abbildung d bzgl. einer geeigneten Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 .

Die Aufgabe ist in der angegebenen Form zwar lösbar, erfordert aber einen unverhältnismäßig großen Aufwand. Gedacht war die Aufgabe (in Analogie zu einer Staatsexamensaufgabe und als Vorbereitung für eine Aufgabe der Klausur) mit der Achse

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Der Vektor $b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \sqrt{3} \end{pmatrix}$, der diese Achse aufspannt, liegt in der Ebene $\langle e_2, e_3 \rangle$,

aber nicht auf einer der Koordinatenachsen. Nun ist eine Drehung bzgl. einer Orthonormalbasis nur dann leicht zu beschreiben, wenn die Drehachse eine der Koordinatenachsen ist. Deswegen beschreibt man die Drehung zunächst bzgl. einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$, die so gewählt wird, daß die vorgegebene Drehachse eine Koordinatenachse der neuen Basis wird.

Da b in der x_2, x_3 -Ebene liegt, findet man eine solche Basis \mathcal{B} , indem man die Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ um die x_1 -Achse dreht. Dreht man um den Winkel 60° , geht e_2 in den Vektor b über. Die durch diese Drehung von \mathcal{E} entstehende Basis ist $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = 1/2 e_2 + 1/2\sqrt{3} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$b_3 = -1/2\sqrt{3} e_2 + 1/2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \sqrt{3} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Sei B die aus diesen Spalten gebildete Matrix, also $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}$.

Dann ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} \\ 0 & -1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}$$

Die Drehung d wird bzgl. der Basis \mathcal{B} durch folgende Drehmatrix dargestellt:

$$D_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bzgl. der Basis \mathcal{E} wird dann d lt. Vorlesung dargestellt durch die Matrix

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{E}} &= \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(d) = \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(d) \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = B D_{\mathcal{B}} B^{-1} = \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} \\ 0 & -1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} & 1/4\sqrt{6} & -1/4\sqrt{2} \\ 0 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{2} & -1/4\sqrt{6} & 1/4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} & 1/4\sqrt{6} & -1/4\sqrt{2} \\ -1/4\sqrt{6} & 1/4 + 3/8\sqrt{2} & 1/4\sqrt{3} - 1/8\sqrt{6} \\ 1/4\sqrt{2} & 1/4\sqrt{3} - 1/8\sqrt{6} & 3/4 + 1/8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

49. Permutationen

Man gebe alle geraden und alle ungeraden Permutationen in S_4 an.

Gerade Permutationen:

$$A_4 = \{(1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Ungerade Permutationen:

$$U_4 = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$$

50. Determinanten

(a) Über \mathbb{Z}_5 ist:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \quad (\text{mit 1. } Z_3 := Z_3 + Z_2, 2. Z_2 := Z_1 + Z_2)$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \quad (Z_2 \text{ und } Z_3 \text{ vertauschen})$$

$$- \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4 \cdot 3 \cdot 1 = 3 \quad (\text{da Dreiecksmatrix})$$

(b) Über \mathbb{R} ist:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 15 & 21 & 18 \end{pmatrix} = \quad (Z_2 := Z_3 - 3Z_1, Z_3 := Z_3 - Z_1, Z_4 := Z_4 - 6Z_1)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$(-2) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = 0$$

(c) Man rekapituliere die in der Vorlesung aufgelisteten Eigenschaften von Determinanten (Aussage 5.1.3.2).

Siehe Skriptum.