

Lösungen:

42. Koordinatentransformationen

München liegt auf ca. $48^\circ =: \varphi$ nördlicher Breite und ca. $12^\circ := \psi$ östlicher Länge.

Sei $\mathcal{M} := \{m_1, m_2, m_3\}$ die lokale Basis für München des $\mathbb{R}^3$ wie folgt:

- m_1 weise nach Norden.
- m_2 weise nach Westen.
- m_3 weise senkrecht nach oben.

Man denke sich den Erdmittelpunkt als den Ursprung des $\mathbb{R}^3$, also die Basisvektoren m_1, m_2, m_3 im Erdmittelpunkt beginnend.

Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ folgende Standardbasis des $\mathbb{R}^3$:

- e_1 weise vom Erdmittelpunkt auf den Schnittpunkt des Äquators mit dem Längens-Halbkreis von München (12°).
- e_2 weise in der Äquatorebene auf den Längenshalbkreis 102° (also sei w_2 orthogonal zu w_1).
- e_3 weise vom Äquator zum Nordpol.

(a) Man stelle die Basisvektoren m_1, m_2, m_3 als Spalten bzgl. der Basis $\mathcal{E}$ dar.

Die Basisvektoren m_1, m_2, m_3 gehen aus e_1, e_2, e_3 durch folgende nacheinander ausgeführte Abbildungen hervor:

- Drehung um die e_2 -Achse um den Winkel φ , dabei bleibt e_2 fest, e_1 geht über in m_3 , e_3 geht über in m_1 .

Man hat also zuerst eine Drehung um die e_2 -Achse mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Bildvektoren von e_1, e_2, e_3 bei dieser Drehung seien $e'_1, e'_2 = e_2$ und e'_3 .

Die lokalen Basisvektoren sind dann nach der getroffenen Festlegung:

$$m_1 = e'_3, m_2 = -e_2, m_3 = e'_1.$$

Die Bildvektoren m_1, m_2, m_3 von e_1, e_2, e_3 sind also $e'_3, -e_2, e'_1$ und damit die Spalten der folgenden Abbildungsmatrix:

$$B := \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

(b) Man zeige: Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}}$ ist $T := \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix}$.

Nach Vorlesung ist $T = B^{-1}$. Man sieht leicht: $B^{-1} = B$, also $T = B$.

(5 Punkte)

43. Koordinatentransformationen

Angaben wie in der vorherigen Aufgabe.

Die Erddrehung wird dargestellt, indem man statt der „absoluten“ Basis $\mathcal{E}$ aus der vorherigen Aufgabe eine von der Zeit t abhängige Basis $\mathcal{E}(t) = \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ einführt, die aus $\mathcal{E}$ durch Anwendung der Drehung mit der Drehmatrix

$$D_E(t) := \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ hervorgeht; dabei sei } \omega := 2\pi/86164 \text{ (da die Erde}$$

in 86164 Sekunden einmal um ihre Achse rotiert). Es gilt $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}$.

Entsprechend sei die lokale Matrix $\mathcal{M}(t)$ definiert.

- (a) Man weise nach: Für alle t gilt: $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{E}(t)} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}}$.

Die Basisvektoren $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ gehen aus $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ durch die entsprechenden nacheinander ausgeführte Abbildungen hervor wie im Fall $t = 0$:

— Drehung um die $e_2(t)$ -Achse um den Winkel φ , dabei bleibt $e_2(t)$ fest, $e_1(t)$ geht über in $m_3(t)$, e_3 geht über in $m_1(t)$. Die Drehmatrix ist die gleiche Matrix wie oben.

Die Bildvektoren von $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ bei dieser Drehung seien $e'_1(t), e'_2(t) = e_2(t)$ und $e'_3(t)$.

Die lokalen Basisvektoren sind dann nach der getroffenen Festlegung:

$$m_1(t) = e'_3(t), m_2(t) = -e_2(t), m_3(t) = e'_1(t).$$

Wie in der vorherigen Aufgabe findet man die Abbildungsmatrix B , und es ist $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{E}(t)} = B^{-1} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}} (= B)$.

- (b) Man bestimme die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{E}(t)}^{\mathcal{E}(0)}$.

Es ist $\mathcal{T}_{\mathcal{E}(t)}^{\mathcal{E}(0)} = \mathcal{M}_{\mathcal{E}(t)}^{\mathcal{E}(0)}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})$. Die Spalten enthalten also die Koeffizienten bei Darstellung der Basisvektoren e_1, e_2, e_3 in Bezug auf die neue Basis $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$:

$$e_1 = \cos \omega t e_1(t) - \sin \omega t e_2(t),$$

$$e_2 = \sin \omega t e_1(t) + \cos \omega t e_2(t),$$

$$e_3 = e_3(t).$$

Die Matrix ist also wiederum eine Drehmatrix, und zwar zum Winkel $-\omega t$:

$$D^- = \mathcal{T}_{\mathcal{E}(t)}^{\mathcal{E}(0)} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Man bestimme die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{M}(0)}$. (Hinweis: Man benutze Satz 4.2.12.4 der Vorlesung.)

Es ist

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{M}(0)} = \mathcal{M}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{M}(0)}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \quad (\text{Achtung! Das Symbol } \mathcal{M} \text{ kommt hier in zwei verschiedenen Bedeutungen vor!})$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{E}(t)} \mathcal{M}_{\mathcal{E}(t)}^{\mathcal{E}(0)}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) \mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{M}(0)} =$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{E}(t)} \mathcal{T}_{\mathcal{E}(t)}^{\mathcal{E}(0)} \mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{M}(0)} =$$

$$T D^- T^{-1} =$$

$$T D^- T =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \omega t \sin \varphi & -\sin \omega t & \cos \omega t \cos \varphi \\ \sin \omega t \sin \varphi & -\cos \omega t & \sin \omega t \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 \varphi \cos \omega t + \cos^2 \varphi & \sin \omega t \sin \varphi & -\sin \varphi \cos \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \omega t \sin \varphi & \cos \omega t & \sin \omega t \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \omega t \cos \varphi & \cos \omega t \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

(d) Man stelle den Vektor m_1 bzgl. der Basis $\mathcal{M}(t)$ dar.

Die Spaltenvektoren der Matrix $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{M}(0)} = \mathcal{M}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{M}(0)}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ enthalten die Koeffizienten bei Darstellung der Basisvektoren m_1, m_2, m_3 bzgl. der Basis $\mathcal{M}(t)$. Zum Vektor m_1 gehört somit der erste Spaltenvektor dieser Matrix, das ist

$$\begin{pmatrix} \sin^2 \varphi \cos \omega t + \cos^2 \varphi \\ -\sin \omega t \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist diese Spalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wie es sein soll.

Nach einer Stunde ($t = 3600$) ist diese Spalte ca. $\begin{pmatrix} 0.9995180444 \\ -0.03104014536 \\ 0.0004339548 \end{pmatrix}$

Der Winkel zwischen dieser Spalte und m_1 ist ca. 1.778928896° .

Aufgabe: Vergleiche dieses Ergebnis mit dem experimentellen Ergebnis am großen Foucault-Pendel im Turm des Deutschen Museums.

(Die Rechnungen erfolgten mit Maple.)

(5 Punkte)

44. Permutationen

(a) Man stelle folgende Permutationen als Produkt von Transpositionen dar:

- i. $(2\ 3)$ hat schon die gewünschte Form (Produkt mit einem Faktor).
- ii. $(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$
- iii. $(1\ 5\ 4\ 7) = (1\ 7)(1\ 4)(1\ 5)$
- iv. $(1\ 2\ 5\ 3\ 8\ 4\ 11) = (1\ 11)(1\ 4)(1\ 8)(1\ 3)(1\ 5)(1\ 2)$

(b) Man zeige: Ein Zyklus der Länge k ($k \geq 2$) kann als Produkt von $k - 1$ Transpositionen geschrieben werden.

Der Beweis orientiert sich an den obigen Beispielen. Man zeigt durch Induktion:

$$(n_1\ n_2\ \dots\ n_k) = (n_1\ n_k)(n_1\ n_{k-1})\dots(n_1\ n_2)$$

Das ist klar für $n = 2$ (Induktionsanfang). Der Induktionsschluß folgt aus

$$(n_1\ n_2\ \dots\ n_{k+1}) = (n_1\ n_{k+1})(n_1\ n_2\ \dots\ n_k)$$

für $k \geq 2$.

(4 Punkte)

45. Permutationen

Man zeige: In jeder Permutationsgruppe ist die Zahl der geraden und der ungeraden Permutationen gleich.

Beweis. Für $n \geq 2$ sei A_n die Menge der geraden Permutationen, U_n die Menge der ungeraden Permutationen. Dann gilt $S_n = A_n \cup U_n$.

Die Abbildung $f : \hat{(12)} : S_n \rightarrow S_n, \sigma \mapsto (12)\sigma$ ist bijektiv (wegen $f \circ f$ gilt $f^{-1} = f$) und bildet A_n auf U_n ab, U_n auf A_n . Damit haben A_n und U_n jeweils $n!/2$ Elemente.

(4 Punkte)