

Lösungen:

38. Invertierbare Matrizen

Sei K ein Körper, und es seien $a, b, c, d \in K$. Man zeige:

Die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt: $ad - bc \neq 0$.

Fallunterscheidung:

- (a) $a \neq 0$. Man bringt die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auf Zeilenstufenform, indem man die zweiten Zeile durch $a \cdot Z_2 - c \cdot Z_1$ ersetzt; man erhält:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

In diesem Fall sieht man: Matrix invertierbar $\iff \text{Rand} = 2 \iff ad - bc \neq 0$.

- (b) $a = 0$. Ist dann $b = 0$ oder $c = 0$, so ist der Rang kleiner 2; im Fall $b \neq 0, c \neq 0$ dagegen ist der Rang 2. Die Bedingung für Invertierbarkeit ist also $bc \neq 0$; das ist in diesem Fall wiederum $ad - bc \neq 0$.

39. Inverse Matrix und inhomogene lineare Gleichungssysteme. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte man

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

- (a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist A_λ invertierbar? Man bestimme gegebenenfalls die inverse Matrix.
- (b) Man bestimme Basen von $\text{Ke} \hat{A}_\lambda$ und $\text{Im} \hat{A}_\lambda$.
- (c) Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A_\lambda x = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ lösbar? Bestimme jeweils den Lösungsraum.

„parallele“ Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & \mu \\ 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}, \text{III} - (1-\lambda^2)\text{II}]{\text{I} \leftrightarrow \text{II}, \text{II} - \lambda \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 2\lambda & (\lambda^2 - \lambda)\mu \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \cdot \frac{1}{\lambda^3 - 2\lambda}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^2 - 1 \end{array} \right) \quad (*)$$

a) Offenbar: A_λ invertierbar $\Leftrightarrow \lambda \notin \{\pm\sqrt{2}, 0\}$. Fortsetzung obigen Verfahrens (ohne die Spalte mit den μ 's) liefert nach endlich vielen Schritten

$$A_\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda^3 - 2\lambda} \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

b, Ist $\lambda \notin \{\pm\sqrt{2}, 0\}$, so ist $\hat{A}_\lambda$ invertierbar, also $\ker \hat{A}_\lambda = \{0\} = \langle \{e_1, e_2, e_3\} \rangle$. Andernfalls $\ker \hat{A}_\lambda = L(A_\lambda) \stackrel{(*)}{=} L\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 2\lambda \end{pmatrix}\right) = \langle \{^t(\lambda^2 - 1, -\lambda, 1)\} \rangle$. Wegen $\dim \ker \hat{A}_\lambda = 2$ wird $\ker \hat{A}_\lambda$ durch zwei l.u. Spaltenvektoren von $\hat{A}_\lambda$ aufgespannt, z.B. $\ker \hat{A}_\lambda = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \rangle$.

c) Ist $\lambda \notin \{\pm\sqrt{2}, 0\}$, so A_λ invertierbar, also $L(A_\lambda, \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}) = \{A_\lambda^{-1} \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}\} = \left\{ \frac{\lambda\mu}{\lambda^3 - 2\lambda} \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ \lambda - 2 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \right\}, \mu \in \mathbb{R}$. Ist $\lambda = 0$, so lautet (*): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \mu \end{array} \right)$, also

$L(A_0, {}^t(\mu, \mu, \mu)) = {}^t(\mu, \mu, 0) + \langle \{^t(-1, 0, 1)\} \rangle, \mu \in \mathbb{R}$. Ist $\lambda = \pm\sqrt{2}$, so folgt

$$L(A_\lambda, {}^t(\mu, \mu, \mu)) = \begin{cases} \langle \{^t(\lambda^2 - 1, -\lambda, 1)\} \rangle, & \mu = 0 \\ \emptyset, & \mu \neq 0 \end{cases} \quad [\text{vgl. (b)}]$$

40. **Affine Unterräume.** Gegeben seien folgende Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Man gebe einen 2-dimensionalen affinen Unterraum $X \subset \mathbb{R}^3$ an mit $p_i \in X$, $i = 0, 1, 2$.

$X := p_0 + \langle p_1 - p_0, p_2 - p_0 \rangle$ enthält die Punkte p_0, p_1, p_2 und ist 2-dimensional, da $p_1 - p_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $p_2 - p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ l.u. sind.

- (b) Man zeige: X ist durch die Punkte p_0, p_1, p_2 eindeutig bestimmt in folgendem Sinne: Ist $X' \subset \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler affiner Unterraum mit $p_i \in X'$, $i = 0, 1, 2$, so gilt $X = X'$.

Aus $p_i \in X'$, $i = 0, 1, 2$ folgt: $X' = p_0 + V'$ mit $p_1 - p_0, p_2 - p_0 \in V'$. Wegen $\dim V' = \dim X' = 2$ folgt $X' = \langle p_1 - p_0, p_2 - p_0 \rangle$, also $X' = X$.

- (c) Gibt es einen 1-dimensionalen affinen Unterraum $Y \subset \mathbb{R}^3$ an mit $p_i \in Y$, $i = 0, 1, 2$?

Aus $p_i \in Y$, $i = 0, 1, 2$ folgt $X \subset Y$, also $\dim Y \geq \dim X = 2$.

- (d) Für beliebige Punkte $q_0, q_1, q_2 \in \mathbb{R}^3$ gebe man eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß diese Punkte einen eindeutig bestimmten 2-dimensionalen affinen Unterraum $Z \subset \mathbb{R}^3$ festlegen.

Die Bedingung lautet: $q_1 - q_0, q_2 - q_0$ l.u.

Beweis:

- i. Es sei vorausgesetzt: $q_1 - q_0, q_2 - q_0$ l.u.

Dann sieht man wie in den obigen Aufgaben: $p_0 + \langle q_1 - q_0, q_2 - q_0 \rangle$ ist der eindeutig bestimmte affine Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der die Punkte q_0, q_1, q_2 enthält.

- ii. Seien $q_1 - q_0, q_2 - q_0$ l.a. Dann gilt $\dim \langle q_1 - q_0, q_2 - q_0 \rangle = 1$. Sei etwa $\langle q_1 - q_0, q_2 - q_0 \rangle = \langle q_1 - q_0 \rangle$.

Nach Steinitz gibt es eine Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ des $\mathbb{Q}_3$, sodaß $\{q_1 - q_0, b_2, b_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Dann sind $q_0 + \langle q_1 - q_0, b_1 \rangle$ und $q_0 + \langle q_1 - q_0, b_2 \rangle$ zwei verschiedene 2-dimensionale affine Unterräume von $\mathbb{R}^3$, die beide die Punkte q_0, q_1, q_2 enthalten.

Letzte Teilaufgabe 2 P., andere Teilaufgaben je 1 P.

41. **Affine Unterräume.** Es seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $X_1, X_2 \subset V$ affine Unterräume. Man beweise oder widerlege:

- (a) $X_1 \cap X_2$ ist affiner Unterraum von V .

- (b) $X_1 \cup X_2$ ist genau dann affiner Unterraum von V , wenn $X_1 \subset X_2$ oder $X_2 \subset X_1$ gilt.

a) wahr: Sofort $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Ist $x \in X_1 \cap X_2$, so $X_1 = x + U_1, X_2 = x + U_2$ und $X_1 \cap X_2 = x + (U_1 \cap U_2)$ mit geeigneten UVR $U_1, U_2 \subset V$.

b) falsch $K := \mathbb{Z}_2, V := \mathbb{Z}_2, X_1 := \{0\}, X_2 := \{1\}, X_1 \cup X_2 = V$