

Lösungen:

35. **Elementarmatrizen und invertierbare Matrizen.** Man stelle die folgenden Matrizen jeweils als Produkt von Elementarmatrizen dar:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung führt man die Matrix durch elementare Zeilenumformungen, also durch Multiplikation von links mit Elementarmatrizen, in die Einheitsmatrix über:

$$A \mapsto Q_2^1(-2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$Q_1^2 Q_2^1(-2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$S_2(-1) Q_1^2 Q_2^1(-2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Es gilt also $S_2(-1) Q_1^2 Q_2^1(-2) A = E$ und damit

$$A = (Q_2^1(-2))^{-1} (Q_1^2)^{-1} (S_2(-1))^{-1} = Q_2^1(2) Q_1^2(-1) S_2(-1) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analoges Vorgehen:

$$A \mapsto P_1^4 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$P_2^3 P_1^4 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Es gilt also $P_2^3 P_1^4 A = E$ und daher

$$A = (P_1^4)^{-1} (P_2^3)^{-1} = P_1^4 P_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(je 2 Punkte)

36. **Inverse Matrix.** Man invertiere folgende Matrizen, sofern sie regulär sind:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Man muß zuerst den Rang der Matrix bestimmen: II+I, III+2I, IV-3I ergibt

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Dann III+2IV ergibt

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Man kann sehen, daß der Rang der Matrix kleiner 4 ist, und somit ist die Matrix nicht invertierbar.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich aus der Zeilen-Stufen-Form, welche

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Somit kann man die Matrix invertieren. Man berechnet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}I$ und $\frac{1}{4}II$ ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$II-I$, $III-4I$ ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Austausch von II und III ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$I+III$, $II-3III$ ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{2}III$, $I+II$, $-II$ ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Probe ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(je 2 Punkte)

Wie man sehen kann, ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schon in Zeilen-Stufen-Form und der Rang ist gleich 3. Diese Matrix kann somit invertiert werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I-bIII und II-cIII ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I-aII

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -a & (-b + (ac)) \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Probe ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & (-b + (ac)) \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

37. Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n \times n}$ eine $n \times n$ -Matrix für ein $n \geq 1$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) Für alle $B \in K^{n \times n}$ gilt $AB = BA$.
- (b) Es gibt ein $\lambda \in K$ mit $A = \lambda E$.

Hinweis zu $a \Rightarrow b$: Man zeige zuerst, daß alle Elemente außerhalb der Diagonale 0 sein müssen. Im 2. Schritt soll gezeigt werden, daß alle Diagonalelemente gleich sind.

Wir zeigen zuerst, daß $(b) \rightarrow (a)$. Wir setzen $A = \lambda E$ und formen AB und BA geeignet um.

$$\begin{aligned} AB &= (\lambda E)B = \lambda(EB) = \lambda B \\ BA &= B(\lambda E) = \lambda(BE) = \lambda B \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt: unter der Annahme von (b) gilt $AB = BA$ für alle Matrizen B .

Als nächstes zeigen wir $(a) \rightarrow (b)$. Dazu beweisen wir, daß unter der Annahme (a) die Matrize A eine Diagonalmatrix sein muß. Um einen Widerspruch herzuleiten, nehmen wir an, daß A ein Element $a_{u,s}$ (mit $u \neq s$) verschieden von Null enthält (d.h. A ist keine Diagonalmatrix). Nun konstruieren wir eine Matrix B , die in der s -ten Zeile und d -ten Spalte eine 1 hat (d beliebig); der Rest sind Nullen.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \vdots & & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Annahme (a) folgt, daß $AB = BA$ gelten muß. Das heißt, für alle i und j muß gelten:

$$[AB]_{i,j} = [BA]_{i,j}$$

Insbesondere sollte gelten:

$$[AB]_{u,d} = [BA]_{u,d}$$

was nichts anderes ist als:

$$\sum_{l=1}^n [A]_{u,l} \cdot [B]_{l,d} = \sum_{l=1}^n [B]_{u,l} \cdot [A]_{l,d}$$

Da in B nur $[B]_{s,d}$ ungleich Null ist, vereinfacht sich die linke Seite zu $[A]_{u,s} \cdot [B]_{s,d}$. Dieses Produkt ist ungleich Null, da $[A]_{u,s} \neq 0$ und $[B]_{s,d} = 1$. Die rechte Seite ist Null, da $[B]_{u,l}$ immer Null ist (es wurde $u \neq s$ angenommen). Somit können beide Seiten nicht gleich sein und wir erhalten einen Widerspruch mit der Annahme, daß A keine Diagonalmatrix ist.

Nun zeigen wir, daß A eine Diagonalmatrix mit nur einem λ auf der Diagonalen ist. Wir nehmen wieder an, es gäbe verschiedene λ 's auf der Diagonalen und leiten einen Widerspruch her. Also, es gäbe auf der Diagonalen von A ein λ_i und ein λ_j mit $\lambda_i \neq \lambda_j$. Aus der Annahme (a) folgt, daß $AB = BA$ ist (für alle B) und somit muß $AB - BA = 0$ gelten. Für die i - j -Komponente heißt das

$$[AB - BA]_{i,j} = [B]_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)$$

Die rechte Seite ist (im Allgemeinen) Null, nur wenn $\lambda_i = \lambda_j$ ist. Somit können nur ein λ auf der Diagonalen von A vorkommen und folglich hat A die Form λE , was zu zeigen war.