

Lösungen:

27. **Untervektorräume.** Ist $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von K^2 in den Fällen $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5$?

(a) $K = \mathbb{R}$: $U = \{0\}$ ist UVR.

(b) $K = \mathbb{C}$: U kein UVR, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in U$ und $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \in U$, aber $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \end{pmatrix} \notin U$

(c) $K = \mathbb{Z}_2$: $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist UVR.

(d) $K = \mathbb{Z}_5$: U kein UVR, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in U$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$, aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \notin U$

(Je 1 P.)

28. **Vollständige Induktion und Linearität.** Es seien V, W Vektorräume und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Man beweise durch vollständige Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

Für Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ und Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gilt:

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

Vollständige Induktion nach n .

(a) Induktionsanfang: $n = 1$. Zu zeigen ist: $f(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 f(v_1)$. Das ist eine der Bedingungen für die Linearität von f , also richtig.

(b) Induktionsschluß: Es sei $n \geq 1$, und es sei vorausgesetzt (Induktionsvoraussetzung): Für Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ und Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gilt: $f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$.

Seien nun $v_1, \dots, v_{n+1} \in V$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$. Dann gilt

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n+1} v_{n+1}) = f((\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + \alpha_{n+1} v_{n+1}) = (\text{da } f \text{ linear})$$

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + \alpha_{n+1} f(v_{n+1}) = (\text{nach Induktionsvoraussetzung})$$

$$\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) + \alpha_{n+1} f(v_{n+1}).$$

29. **Basis und lineare Abbildungen I.** Es seien V, W Vektorräume und $f, g: V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Ferner sei $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Man zeige:

Gilt $f(v_i) = g(v_i)$ für $i = 1, \dots, n$, so gilt $f = g$.

Sei $v \in V$; zu zeigen: $f(v) = g(v)$.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $V \implies$

Es gibt $x_1, \dots, x_n \in K$ mit $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \implies$

$$f(v) = f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) = x_1 g(v_1) + \dots + x_n g(v_n) = g(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = g(v).$$

30. **Basis und lineare Abbildungen II.** Es seien V, W Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Ferner sei $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Man zeige:

(a) Ist f injektiv, so ist $f(B)$ eine Basis von $f(V)$.

i. Sei $w \in f(V)$ und $v \in V$ mit $f(v) = w$. v hat eine (sogar eindeutige) Darstellung $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ mit Koeffizienten $x_1, \dots, x_n \in K$.

Damit gilt $w = f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) \in \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$. Deshalb ist $f(B)$ Erzeugendensystem von $f(V)$.

ii. Noch zu zeigen: $f(B)$ l.u.

Seien dazu $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit $\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0$. Dann gilt

$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$, also, da f injektiv ist, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.

Da $v_1, \dots, v_n$ l.u. sind, sind alle $\alpha_i = 0$.

(3 P.)

(b) Ist f surjektiv, so kann man aus $f(B)$ eine Basis von W auswählen

Wie oben sieht man: $\langle f(B) \rangle = W$. Die Behauptung folgt aus dem Basisauswahlsatz.

(1 P.)

31. **Lineare Abbildungen des $\mathbb{R}^3$.** Man beschreibe geometrisch die Abbildung

$$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nach dem Hinweis betrachtet man die Bilder der Basisvektoren e_i unter dieser Abbildung.

e_2 bleibt fest; e_1 und e_3 werden um den Winkel $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ um die x_2 -Achse gedreht. Die Abbildung ist also eine Drehung um die x_2 -Achse um den Winkel $\frac{\pi}{4}$.