Lösungen:

23. **Untervektorräume.** Welche der folgenden Mengen ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ Begründung!

$U := \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = 0, z = 0, x - y = 0\} = \mathbf{Ke}\hat{A}$ mit

$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und daher ein Untervektorraum (das kann man natürlich auch direkt zeigen, indem man die beiden Forderungen in der Definition des UVR nachweist).

$V := \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y - z = 1\}$,

$W := \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, 2x + z = 1, x = 0\}$ und

$X := \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

enthalten alle nicht den Nullpunkt und sind deshalb keine Untervektorräume.

24. **Lineare Abbildungen.** Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründung!

(a) Für

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \end{array}$$

gilt $f = \hat{A}$ mit $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Daher ist f linear.

(b) Für

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & g(a) = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{pmatrix} \end{array}$$

gilt nicht $g(\lambda a) = \lambda g(a)$, denn z.B. mit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\lambda = 2$ gilt $g(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g(2a) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 2g(a)$. Daher ist g nicht linear.

(c) Für

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & 2x + y \end{array}$$

gilt $h = \hat{A}$ mit $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Daher ist h linear.

(d) Für

$$i: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & 2x + 2y + 1 \end{array}$$

gilt $i(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1$. Bei einer linearen Abbildung wird aber stets Null auf Null abgebildet. Daher ist i nicht linear.

25. **Lineare Unabhängigkeit**

(a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und seien $u, v, w \in V$ linear unabhängig.
Man zeige:
Je drei der Vektoren $u, v, w, u + v + w$ sind linear unabhängig.

i. Für die drei Vektoren u, v, w ist die lineare Unabhängigkeit vorausgesetzt; für diesen Fall ist also nichts zu zeigen.
ii. Zeige die lineare Unabhängigkeit von $v, w, u + v + w$:
Seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit $\alpha v + \beta w + \gamma(u + v + w) = 0$.
Dann gilt
$\gamma u + (\alpha + \gamma)v + (\beta + \gamma)w = 0$.
Da u, v, w l.u. sind, folgt $\gamma = 0, \alpha + \gamma = 0, \beta + \gamma = 0$.
Hieraus folgt $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
iii. Die lineare Unabhängigkeit von $u, w, u+v+w$ und $u, v, u+v+w$ wird analog bewiesen.

(3 P.)

(b) Gilt die entsprechende Aussage, wenn man vier linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ hat und vier Vektoren aus der Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$ herausgreift?
Ja, Beweise genau analog. (1 P.)

26. **Basis des Lösungsraums eines homogenen linearen Gleichungssystems, Parametrisierungsabbildung.**

$L \subset \mathbb{R}^4$ sei die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Man bestimme die Lösungsmenge L mit dem Gauß-Algorithmus.
Die Zeilenstufenform von A ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als Lösung ergibt sich daraus

$$x(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} -t_1 - \frac{1}{2}t_2 \\ t_1 - \frac{1}{2}t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

(3 P.)

(b) Man bestimme speziellen Lösungen $a := x(1,0)$ und $b := x(0,1)$ (also die Lösungen zu den Parameterwerten $t_1 = 1.t_2 = 0$ bzw. $t_1 = 0, t_2 = 1$).

$$a = x(1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = x(0,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 P.)

(c) Man zeige: a und b sind linear unabhängig.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha a + \beta b = 0$. Aus der dritten und der vierten Zeile dieser Vektorgleichung folgt $\alpha = \beta = 0$.

(1 P.)

(d) Man zeige: Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^2 & \to & L \\ & \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} & \mapsto & x(t_1, t_2) \end{array}$$

ist linear.

Die Lösung $x(t_1, t_2)$ wird gewonnen, indem man $x_3 = t_1$ und $x_4 = t_2$ setzt und dann aus den beiden ersten Gleichungen zuerst x_2 und dann x_1 berechnet.

Aus dieser Berechnungsvorschrift sieht man:

$x(t_1+t_1', t_2+t_2') = x(t_1, t_2) + x(t_1', t_2')$, $x(\lambda t_1, \lambda t_2) = \lambda x(t_1, t_2)$, d.h., die Abbildung p ist linear.

Die lineare Abbildung p heißt **Parametrisierungsabbildung** für die Lösungsmenge.

(3 P.)

(e) Man zeige: a und b bilden eine Basis des Lösungsraums L.

Zu zeigen ist: Ist $x(t_1, t_2)$ eine beliebeige Lösung, so gilt $x(t_1, t_2) \in \langle a, b \rangle$. Dies ist richtig, da wegen der Linearität der Abbildung p gilt: $x(t_1, t_2) = t_1 a + t_2 b$.

(1 P.)