

Lösungen:

20. Matrizenprodukte und Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Die e_i sind gegeben durch:

$$e_i = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Indizes $i, j \in 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \text{i. } e_i^t \cdot e_j &= (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}) \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \delta_{3j} \end{pmatrix} = \delta_{1i}\delta_{1j} + \delta_{2i}\delta_{2j} + \delta_{3i}\delta_{3j} = \delta_{ij} \\ \text{ii. } e_i \cdot e_j^t &= \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{pmatrix} (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j}) = \begin{pmatrix} \delta_{1i}\delta_{1j} & \delta_{1i}\delta_{2j} & \delta_{1i}\delta_{3j} \\ \delta_{2i}\delta_{1j} & \delta_{2i}\delta_{2j} & \delta_{2i}\delta_{3j} \\ \delta_{3i}\delta_{1j} & \delta_{3i}\delta_{2j} & \delta_{3i}\delta_{3j} \end{pmatrix} \quad (\text{Je 1 P.}) \\ \text{(b)} \quad \text{i. } \sum_{i=1}^3 e_i^t \cdot e_i &= \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = 3 \\ \text{ii. } \sum_{i=1}^3 e_i \cdot e_i^t &= \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} \delta_{1i}\delta_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2i}\delta_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{3i}\delta_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{iii. } \sum_{i,j=1}^3 e_i^t \cdot e_j &= \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} = 3 \\ \text{iv. } \sum_{i,j=1}^3 e_i \cdot e_j^t &= \sum_{i,j=1}^3 \begin{pmatrix} \delta_{1i}\delta_{1j} & \delta_{1i}\delta_{2j} & \delta_{1i}\delta_{3j} \\ \delta_{2i}\delta_{1j} & \delta_{2i}\delta_{2j} & \delta_{2i}\delta_{3j} \\ \delta_{3i}\delta_{1j} & \delta_{3i}\delta_{2j} & \delta_{3i}\delta_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Je 1.5 P.}) \end{aligned}$$

21. Darstellung von Vektoren als Linearkombination von Basisvektoren

- (a) Zeige jeder Spaltenvektor $x \in K^3$ läßt sich auf genau eine Weise als Summe $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i$ darstellen. Beweis durch Widerspruch: Annahme es gäbe min. 2 Darstellungen α_i, α'_i wobei zumindest für ein j , $\alpha_j \neq \alpha'_j$ und

$$x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i, \quad x = \sum_{i=1}^3 \alpha'_i e_i \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^3 \alpha'_i e_i \quad (3)$$

Wird die Gleichung von rechts mit e_j^t multipliziert, erhält man mit 5(a)i

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_j^t \cdot e_i = \sum_{i=1}^3 \alpha'_i e_j^t \cdot e_i \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 \alpha'_i \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\alpha_j = \alpha'_j \quad (6)$$

Dies ist aber in Widerspruch zur Voraussetzung, daß zumindest für ein j , $\alpha_j \neq \alpha'_j$ ist. (2 P.)

(b)

- i. Die Darstellung für Zeilenvektoren $x \in K^3$ ist gegeben durch $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i^t$ gesucht sind die $\alpha_i \in K$. Wird die Gleichung von links mit e_j multipliziert, erhält man mit (a)i aus der vorherigen Aufgabe

$$x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i^t \quad (7)$$

$$x e_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i^t e_j \quad (8)$$

$$x e_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \delta_{ij} \quad (9)$$

$$x e_j = \alpha_j \quad (10)$$

- ii. Die Darstellung für 3×3 Matrizen $A \in K_3^3$ ist gegeben durch $A = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} \cdot e_i e_j^t$. Gesucht sind die $\alpha_{ml} \in K$. Wird die Gleichung von links mit e_l multipliziert, erhält man mit (a)i aus der vorherigen Aufgabe

$$A = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} e_i e_j^t \quad (11)$$

$$A e_l = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} e_i e_j^t e_l \quad (12)$$

$$A e_l = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} e_i \delta_{jl} \quad (13)$$

$$A e_l = \sum_{i=1}^3 \alpha_{il} e_i \quad (14)$$

Wird nun Gl.(14) mit e_m^t von links multipliziert erhält man:

$$e_m^t A e_l = \sum_{i=1}^3 \alpha_{il} e_m^t e_i \quad (15)$$

$$e_m^t A e_l = \sum_{i=1}^3 \alpha_{il} \delta_{mi} \quad (16)$$

$$e_m^t A e_l = \alpha_{ml} \quad (17) \quad (3 \text{ P.})$$

22. Lineare Gleichungssysteme über endlichen Körpern

(a)

Addition						Multiplikation					
	0	1	2	3	4		0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1	2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2	3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1

(je 1 P.)

(b) Man bringe jeweils die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:

$$\text{i. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) \mapsto (\text{mit } Z_2 \mapsto Z_2 - Z_3, Z_3 \mapsto Z_3 - 2Z_1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Die Lösung ist eindeutig, und zwar $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{ii. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right) \mapsto (\text{mit } Z_2 \mapsto Z_2 - 2Z_1, Z_3 \mapsto Z_3 - Z_2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Die Lösungsmenge ist die leere Menge.