**Lösungen:**

12. **Durch eine Matrix definierte Abbildung:**

(a) Zu zeigen ist, daß das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar ist. Dazu bringt man $(A|b)$ auf Zeilenstufenform. Nach Voraussetzung gibt es dann auf der linken Seite des Gleichheitszeichens keine Nullzeilen; für jede rechte Seite gibt es daher Lösungen.

(3 P.)

(b) Die Bedingung lautet: $m = n$.

Denn:

i. Im Fall $m = n$ gibt es genau $n$ Pivot-Elemente, also keine freien Parameter. Lösung daher eindeutig.

ii. Ist $m < n$, so gibt es $n$ Variable, aber nur $m < n$ Pivot-Elemente; für die nicht zu Pivot-Elementen gehörenden Variablen dürfen daher beliebige Parameterwerte eingesetzt werden. Lösung nicht eindeutig.

iii. In einer Zeilenstufenform kann der Fall $m > n$ nicht auftreten, da es höchstens $n$ von Null verschiedene Zeilen geben kann.

(2 P.)

13. **Injektiv und surjektiv**

Sei $M$ eine Menge und $x_0 \in M$. Sei $f : M \to M$ eine injektive Abbildung.

(a) Setzt man

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow M \\ y &\longmapsto \begin{cases} x & \text{falls } \exists x \in M[f(x) = y] \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

so wird wird tatsächlich eine Abbildung definiert, da es, da $f$ injektiv ist, zu jedem $y \in M$ höchstens ein $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$.

(2 ).)

(b) Die so definierte Abbildung $g : M \to M$ ist surjektiv, denn ist $x \in M$, so gilt $g(f(x)) = x$.

(1 P.)

14. **Endliche und unendliche Mengen**

Eine Menge $M$ werde hier **E-Menge** genannt, wenn jede injektive Abbildung $f : M \to M$ bijektiv ist. *Dies ist eine mögliche Definition für die Endlichkeit einer Menge.*

(a) $\emptyset$ (d.h., die Abbildung mit $\emptyset$ als Graphen) ist die einzig existierende Abbildung $\emptyset \to \emptyset$; sie ist bijektiv.

(1 P.)

(b) $\{1\}$ oder z.B. $\{1, 2, 3\}$. Alle Abbildungen können durch Tabellen angegeben werden und die Behauptung daran nachgeprüft werden.

(1 P.)

(c) $\mathbb{N}$ ist keine E-Menge, denn die Abbildung $\hat{2} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(1 P.)

(d) O.E $M \neq \emptyset$. Sei $x_0 \in M$.

Sei also vorausgesetzt, daß jede surjektive Abbildung von $M$ nach $M$ injektiv ist. Es ist zu zeigen: $M$ ist eine E-Menge.

Sei $f : M \longrightarrow M$ injektiv. Zu zeigen: $f$ surjektiv.

Um die Voraussetzung anwenden zu können, wird wie in der vorherigen Aufgabe folgende Abbildung definiert:

$$\begin{array}{rcl} g : M & \longrightarrow & M \\ y & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{falls } \exists x \in M[f(x) = y] \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Diese Abbildung ist nach Aufgabe 13 surjektiv, nach Voraussetzung also auch injektiv.

Die Behauptung „$f$ surjektiv" wird durch einen *Beweis durch Widerspruch* gezeigt:

Annahme, $f$ nicht surjektiv. Dann gibt es ein $y \in M \setminus f(M)$, d.h., $y$ ist nicht Bild eines Eelementes $x \in M$. Nach Definition von $g$ gilt $g(y) = x_0$, andererseits gilt auch $g(f(x_0)) = x_0$. Da $g$ injektiv ist, folgt $y = f(x_0) \in f(M)$. Widerspruch. Also $f$ surjektiv.

(4 P.)

*Bemerkung: Ein Existenzbeweis „durch Widerspruch" kann nicht zu einem Algorithmus gemacht werden.*

*Zweite Bemerkung: Die angegebene Definition einer „E-Menge" ist eine Möglichkeit, den Begriff der endlichen Menge einzuführen, ohne daß man die Elemente abzählt. Der Begriff der endlichen Menge kann so also unabhängig von der Einführung der natürlichen Zahlen durch das Axiom von Peano gebildet werden.*

*Ist die in Teilaufgabe d) angegebene hinreichende Bedingung auch notwendig, also äquivalent zum Begriff der Endlichkeit? Wenn man dies zeigen will, braucht man als weiteres mathematisches Axiom das sog* **Auswahlaxiom:**

*Ist $M$ eine nicht-leere Menge, so gibt es eine Abbildung $h : \mathcal{P}(M) \longrightarrow M$, so daß gilt:* $\forall_{U \in \mathcal{P}(M)}[U \neq \emptyset \Longrightarrow h(U) \in U]$

*Diese Aussage kann nicht aus den anderen angebenen Mengen-Axiomen hergeleitet werden.*

*Man kann zeigen: Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum sog.* **Lemma von Zorn** *und zum sog.* **Wohlordnungssatz.**

15. **Rechenregeln für Bild und Urbild**

| | | |
|---|---|---|
| a) | — „$\subset$“<br>$y \in f(A \cup B) \Longrightarrow$<br>$\exists_{x \in A \cup B} f(x) = y$<br>Es gilt also $x \in A \vee x \in B$.<br>Daraus folgt: $y \in f(A) \vee y \in f(B)$.<br>Insgesamt folgt: $y \in f(A) \cup f(B)$<br><br>— „$\supset$“<br>$y \in f(A) \cup f(B) \Longrightarrow$<br>$(y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \Longrightarrow$<br>$\exists_{x \in A} f(x) = y \quad \vee \exists_{x \in B} f(x) = y \Longrightarrow$<br>$\exists_{x \in A \cup B} f(x) = y \Longrightarrow$<br>$y \in f(A \cup B)$ | — „$\subset$“<br>$x \in f^{-1}(A \cup B) \Longrightarrow$<br>$f(x) \in (A \cup B) \Longrightarrow$<br>$f(x) \in A \quad \vee \quad f(x) \in B \Longrightarrow$<br>$x \in f^{-1}(A) \quad \vee \quad x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow$<br>$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$<br><br>— „$\supset$“<br>$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Longrightarrow$<br>$x \in f^{-1}(A) \quad \vee \quad x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow$<br>$f(x) \in A \quad \vee \quad f(x) \in B \Longrightarrow$<br>$f(x) \in (A \cup B) \Longrightarrow$<br>$x \in f^{-1}(A \cup B)$ |
| b) | $y \in f(A \cap B) \Longrightarrow \exists_{x \in A \cap B} f(x) = y$<br>Da dieses $x$ in $A$ liegt, folgt $y \in f(A)$.<br>Da dieses $x$ in $B$ liegt, folgt $y \in f(B)$.<br>Insbesamt folgt: $y \in f(A) \cap f(B)$. | $x \in f^{-1}(A \cap B) \Longrightarrow f(x) \in A \cap B \Longrightarrow$<br>$f(x) \in A \quad \wedge \quad f(x) \in B \Longrightarrow$<br>$x \in f^{-1}(A) \quad \wedge \quad x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow$<br>$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ |
| c) | $x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$ | $x \in f(f^{-1}(A)) \Longrightarrow \exists_{x \in f^{-1}(A)} f(x) = y$<br>Wegen $x \in f^{-1}(A)$ gilt $f(x) \in A$, also $y \in A$. |
| d) | $x \in f^{-1}(\mathcal{C}A) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{C}A \Longrightarrow$<br>$\neg(f(x) \in A) \Longrightarrow \neg(x \in f^{-1}(A)) \Longrightarrow$<br>$x \in \mathcal{C}f^{-1}(A)$ | |

(Je 1 P.; ggflls 1/2 Zusatzpunkt)