

Lösungen:
8. Logische Schaltfunktionen:

- (a) $A|B = \neg(A \wedge B)$ (betrachte die Wahrheitstafeln). (1 P.)
- (b) $A|A = \neg A$ (betrachte die Wahrheitstafeln). (1 P.)
- (c) Seien A, B Aussagen.
 Aufgabe 7 d) $\implies \neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$.
 Negation beider Seiten ergibt: $(A \vee B) \iff \neg(\neg A \wedge \neg B)$.
 Teilaufgaben a) und b) liefern die Behauptung: $(A \vee B) \iff ((A|A)|(B|B))$
 (2 P.)
- (d) Nach Aufgabe 7 a) ist $A \implies B$ logisch äquivalent zu $\neg A \vee B$.
 Nach der vorherigen Teilaufgabe ist das wegen $\neg A \iff A|A$:

$$(((A|A)|(A|A))|(B|B))$$

(1 P.)

Bemerkung: In der technischen Literatur wird $|$ ein **Sheffer-Gatter** genannt.
 Man kann zeigen, daß man jede Boolesche Funktion (sog. binäre Schaltfunktion) durch $|$ ausdrücken kann.

9. Regeln der Mengenalgebra

 Die entsprechenden logischen Regeln sind (für $x \in U$):

a) Idempotenz	$x \in M \wedge x \in M \iff x \in M$	$x \in M \vee x \in M \iff x \in M$
b) Kommutativität	$x \in M \wedge x \in N \iff x \in N \wedge x \in M$	$x \in M \vee x \in N \iff x \in N \vee x \in M$
c) Assoziativität	$x \in L \wedge (x \in M \wedge x \in N) \iff$ $(x \in L \wedge x \in M) \wedge x \in N$	$x \in L \vee (x \in M \vee x \in N) \iff$ $(x \in L \vee x \in M) \vee x \in N$
d) Absorption	$x \in M \wedge (x \in M \vee x \in N) \iff$ $x \in M$	$x \in M \vee (x \in M \wedge x \in N) \iff$ $x \in M$
e) Distributivität	$x \in L \wedge (x \in M \vee x \in N) \iff$ $(x \in L \wedge x \in M) \vee (x \in L \wedge x \in N)$	$x \in L \vee (x \in M \wedge x \in N) \iff$ $(x \in L \vee x \in M) \wedge (x \in L \vee x \in N)$
f) Komplementarität	$x \in M \wedge x \notin M \implies$ Widerspruch (es kann daher kein solches x geben)	$x \in M \vee x \notin M$ ist für jedes $x \in U$ erfüllt.
g) Regeln von de Morgan	$(\neg(x \in M \wedge x \in N)) \iff$ $((x \notin M) \vee (x \notin N))$	$(\neg(x \in M \vee x \in N)) \iff$ $((x \notin M) \wedge (x \notin N))$
h) Konsistenz	$(x \in M \wedge x \in N \iff x \in M)$ $\iff$ $(x \in M \implies x \in N)$	$(x \in M \vee x \in N \iff x \in N)$ $\iff$ $(x \in M \implies x \in N)$

(Pro Regel 1 P., zusätzliche Angaben können mit 1/2 Zusatzpunkt pro Regel honoriert werden).

10. Potenzmenge:

Man beweise oder widerlege (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen für Mengen M, N :

- (a) Aussage richtig. Denn seien M, N Mengen.
 $M \subset N \iff (x \in M \implies x \in N)$
 $\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N) \iff (U \subset M \implies U \subset N)$
 Daher ist zu zeigen:
 $(x \in M \implies x \in N) \iff (U \subset M \implies U \subset N)$

i. $\Rightarrow$:

Sei $U \subset M$ und $x \in U$. Dann folgt $x \in M$ und daraus $x \in N$, also gilt $U \subset N$.

ii. $\Leftarrow$:

$$x \in M \Rightarrow \{x\} \subset M \Rightarrow \{x\} \subset N \Rightarrow x \in N$$

(3 P.)

(b) Aussage falsch. Gegenbeispiel z.B: $M = \{1, 2\}, N = \{1\}$. Dann

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

$$\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, \{1\}\},$$

$$\mathcal{P}(M) \setminus \mathcal{P}(N) = \{\{2\}, \{1, 2\}\},$$

$$(M \setminus N) = \{2\},$$

$$\mathcal{P}(M \setminus N) = \{\emptyset, \{2\}\}.$$

(1 P.)

(c) Aussage richtig. Beweis:

$$U \in \mathcal{P}(M \cap N) \iff U \subset M \cap N \iff (U \subset M) \wedge (U \subset N) \iff$$

$$(U \in \mathcal{P}(M)) \wedge (U \in \mathcal{P}(N)) \iff U \in \mathcal{P}(M) \cap \mathcal{P}(N)$$

(1 P.)

11. Kartesisches Produkt:

Seien M, N Mengen und $m, m' \in M, n, n' \in N$.

(a) i. Fall $m = n$:

Dann gilt:

$$\{\{m\}, \{m, m\}\} = \{\{m\}, \{m\}\} = \{\{m\}\}$$

Aus $\{\{m'\}, \{m', n'\}\} = \{\{m\}\}$ folgt:

$$A. \{m'\} = \{m\}, \text{ also } m' = m.$$

$$B. \{m', n'\} = \{m\}, \text{ also } m' = m \text{ und } n' = m = n.$$

ii. Fall $m \neq n$:

Dann hat $\{m, n\}$ zwei Elemente. Da $\{m'\}$ nur ein Element hat, kann nicht $\{m, n\} = \{m'\}$ sein, somit muß $\{m, n\} = \{m', n'\}$ und $\{m\} = \{m'\}$ gelten.

Es folgt $m = m'$ und $n = n'$.

(3 P.)

(b) Gegenbeispiel: Es ist

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Für dieses Beispiel braucht man tatsächlich

$$M := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\text{Man setze } m = \{\{\emptyset\}\}, n = \emptyset, m' = n' = \{\emptyset\}.$$

Dann ist in diesem Ansatz

$$(m, n) = \{\{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}, (m', n') = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\},$$

$$\text{also } (m, n) = (m', n'), \text{ aber } m \neq m', n \neq n'.$$

Ein anderes Beispiel ist $M := \{1, 2\} \cup \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, 1, 2, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ und $m = \{1\}, n = 2, m' = \{2\}, n' = 1$.

(2 P.)