

Lösungen:

5. Elementare Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1 \text{ P.})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & -a & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1-2a & 2a & -2 \\ 0 & 0 & 1-2a & -2+4a & -4a & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Ist $1-2a \neq 0$, ist dies die Zeilenstufenform. Die Lösung erhält man nach einigem Rechnen:

$$x(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 - at_1 + at_2 \\ \frac{a+1-(a-\frac{1}{2})t_1+at_2}{a-\frac{1}{2}} \\ \frac{-3+(2a-1)t_1-2at_2}{a-\frac{1}{2}} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

(2 P.)

(b) Im Fall $a = \frac{1}{2}$ ist die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

und die Lösung

$$x(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1+t_2}{2} \\ 1 - \frac{t_1}{2} \\ t_1 \\ t_2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2 P.)

Man könnte auch die Rollen von x_3 und x_5 tauschen und in der dritten Zeile $4a$ als Pivot-Element verwenden. Dann muß entsprechend der Fall $a = 0$ gesondert behandelt werden. Als Lösung für $a \neq 0$ ergibt sich

$$x(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \frac{(1-2a)t_1 - 2t_2 - 2}{4} \\ -\frac{t_1}{2} + 1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{(1-2a)t_1 - 2(1-2a)t_2 - 6}{4a} \end{pmatrix}$$

Im Fall $a = 0$ ist die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

und die Lösung

$$x(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + t_1 \\ 6 + 2t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

6. (a) Exakte Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 32 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 22 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II} - \frac{1}{2}\text{I} \\ \text{III} - \frac{1}{3}\text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 32 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & 6 \\ 0 & 1/12 & 1/45 & 13/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1/12 & 1/3 & 32 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & 6 \\ 0 & 0 & 1/150 & 1/3 \end{pmatrix}$$

rekursives Auflösen: $x = {}^t(6, 12, 60)$

(b) Kaufmännische Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 & 32 \\ 0.50 & 0.33 & 0.25 & 22 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II} - 0.5\text{I} \\ \text{III} - 0.33\text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 & 32 \\ 0 & 0.08 & 0.09 & 6 \\ 0 & 0.09 & 0.09 & 6.44 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 1.12\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 & 32 \\ 0 & 0.08 & 0.09 & 6 \\ 0 & 0 & -0.01 & -0.28 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = {}^t(1.01, 43.5, 28)$

(Je 2.5 P.)

7. Wahrheitstabeln:

(a) .

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \implies B$	$(\neg A \vee B) \iff (A \implies B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

(b) .

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$A \implies B$	$(\neg(A \wedge \neg B)) \iff (A \implies B)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	w	w	f	f	w
f	w	f	f	w	w	w
f	f	w	f	w	w	w

(c) .

A	B	$A \implies B$	$A \wedge (A \implies B)$	$(A \wedge (A \implies B)) \implies B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

(d) .

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

(e) .

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

(Je 2 P.)