

Lösungen:

1. Setze

x_1 := Preis eines Rindes,

x_2 := Preis eines Schafes,

x_3 := Preis eines Schweins.

Dann hat man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -13 \\ 3 & -9 & 3 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ -600 \end{pmatrix}$$

Überführung der erweiterten Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform durch Anwendung elementarer Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 0 & -33 & 45 & -3000 \\ 0 & 37 & -49 & 3800 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 0 & -33 & 45 & -3000 \\ 0 & 0 & 48 & 14400 \end{pmatrix}$$

In dieser Form kann man von unten nach oben die Lösung ablesen:

$$x_3 = 300, x_2 = 500, x_1 = 1200.$$

Ein Rind kostet also 1200 Geldstücke, ein Schaf 500, ein Schwein 300.

2. (a) Sei $\varphi \in [0, 2\pi[$.

i. Fall $\sin \varphi \cos \varphi \neq 0$

Überführung von $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & b_1 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & b_2 \end{pmatrix}$ in Zeilenstufenform liefert

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & b_1 \\ 0 & \frac{1}{\cos \varphi} & b_2 - b_1 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \end{pmatrix}$$

Man liest als eindeutige Lösung ab:

$$x_2 = b_2 \cos \varphi - b_1 \sin \varphi,$$

$$x_1 = b_1 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi.$$

ii. Im Fall $\sin \varphi = 0$ ist die Matrix A bereits in Diagonalform, so daß man die Lösung direkt ablesen kann. Da in diesem Fall $|\cos \varphi| = 1$ gilt, ergibt sich

$$x_2 = b_2 \cos \varphi,$$

$$x_1 = b_1 \cos \varphi.$$

iii. Im Fall $\cos \varphi = 0$ kann die Matrix A durch Zeilenvertauschung in Diagonalform gebracht werden. Man erhält analog zum vorherigen Fall:

$$x_2 = -b_1 \sin \varphi,$$

$$x_1 = b_2 \sin \varphi.$$

(b) Mit $B := \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ gilt $Bb = x$.

(c) Betrachtet man spezielle Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, so kann man verifizieren: Die Multiplikation mit A bewirkt eine Drehung dieses Vektors um den Winkel φ , die Multiplikation mit B eine Drehung um den Winkel $-\varphi$.

Besonders einfach zu sehen ist das für die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Im Laufe der Vorlesung wird gezeigt werden, daß eine durch Multiplikation mit einer Matrix definierte Abbildung der Ebene durch die Bilder dieser beiden Vektoren bereits vollständig bestimmt ist.

3. Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & 260 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & -60 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 80 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Lösung demnach } x(t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} 90 - t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ 10 - t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

4. Elementare Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t + 7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t + 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6t \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & t + 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6t \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & t + 1 \end{pmatrix}$$

Im Fall $t \neq -1$ hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Im Fall $t = -1$ hat man die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhält als Lösung

$$x(s) = \begin{pmatrix} \frac{-31-s}{4} \\ \frac{7-5s}{8} \\ s \end{pmatrix}$$