Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

G. Kraus

Wintersemester 2005/06

Kapitel 1

Der Gauß-Algorithmus

1.1 Reelle lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Vektoren

1.1.1 Lineare Gleichungssysteme

Beispiele
Betrachten wir folgende lineare Gleichungssysteme für drei Unbekannte x, y, z:

1.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}$$

Ganzzahlige Lösung.
Lösung erfordert Addition/Subtraktion und „aufgehende" Division von ganzen Zahlen.
Lösung eindeutig bestimmt.

2.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Rationale Lösung.
Lösung erfordert Addition/Subtraktion und „nicht aufgehende" Division von ganzen Zahlen.
Lösung eindeutig bestimmt.

3.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & & & 2z & = & 1 \end{array}$$

Rationale Lösungen.
Lösung erfordert Addition/Subtraktion und „nicht aufgehende" Division von ganzen Zahlen.
Nicht eindeutig bestimmte Lösung, sondern einparametrige Schar von Lösungen.

4.

x + y + z = 1 x - y + z = 1 x + z = 1	Gleichungssystem nicht lösbar. Rechnung erfordert Addition/Subtraktion Division von ganzen Zahlen.

Wir sehen:

1. Für ähnlich aussehende Gleichungssysteme können völlig unterschiedliche Aussagen bzgl. der Lösbarkeit gelten.

2. Die Lösbarkeit muß unterschiedlich beurteilt werden, je nachdem, in welchem Zahlenbereich man die Lösungen sucht.

3. Das Lösungsverfahren ist nicht auf ganze oder rationale Zahlen usw. beschränkt, sondern funktioniert stets, wenn man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann.

1.1.2 Matrix-Schreibweise

Definition 1.1.2.1 (Matrizen und Vektoren) *Es seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.*

1. *Ein rechteckiges Schema reeller Zahlen*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   heißt Matrix mit m Zeilen und n Spalten und Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

   Die Menge solcher Matrizen wird mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet. Schreibt man $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so bedeutet das, daß A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten und Koeffizienten in $\mathbb{R}$ ist.

2. *$m = 1$: $\mathbb{R}_n := \mathbb{R}^{1 \times n}$ Zeilenvektoren.*

3. *$n = 1$: $\mathbb{R}^m := \mathbb{R}^{m \times 1}$ Spaltenvektoren.*

4. *Speziell sind die Zeilen- und Spaltenvektoren einer Matrix definiert.*

Definition 1.1.2.2 (Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor) *Es seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.*

Ferner sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $m \times n$-Matrix und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor.

Unter dem **Produkt** *Ax versteht man dann den Vektor*

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Bemerkung 1.1.2.3 (Matrix-Schreibweise eines linearen Gleichungssystems)
Es seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.
Ferner sei

— $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *eine $m \times n$-Matrix,*

— $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *ein Vektor,*

— $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ *ein weiterer Vektor.*

Dann ist

$$Ax = b$$

eine abkürzende Schreibweise für

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

1.1.3 Spezielle Matrizen und die entsprechenden linearen Gleichungssysteme.

Beispiel 1.1.3.1 *Die Einheitsmatrix E_n.*
Beispiel 1.1.3.2 *Nichtsinguläre Diagonalmatrizen.*
Beispiel 1.1.3.3 *Allgemeine Diagonalmatrizen, Fallunterscheidung bzgl. der rechten Seiten.*
Beispiel 1.1.3.4 *Obere Dreiecksmatrizen, Fallunterscheidung bzgl. der rechten Seiten.*
Beispiel 1.1.3.5 *Untere Dreiecksmatrizen, Fallunterscheidung bzgl. der rechten Seiten.*
Beispiel 1.1.3.6 *Zeilenstufenform, Fallunterscheidung bzgl. der rechten Seiten.*

1.2 Der Algorithmus

1.2.1 Spezialfälle

Beispiel 1.2.1.1 *Die Einheitsmatrix E_n. Eindeutige Lösung.*
Beispiel 1.2.1.2 *Nichtsinguläre Diagonalmatrizen. Eindeutige Lösung.*
Beispiel 1.2.1.3 *Allgemeine Diagonalmatrizen, Fallunterscheidung bzgl. der rechten Seiten. Parameterdarstellung des Lösungsvektors als Funktion der nicht zu den Pivot-Elementen gehörenden Variablen.*
(Begriff Rang aber vermeiden, nur Beispiel anführen.)
Beispiel 1.2.1.4 *Obere Dreiecksmatrizen, Fallunterscheidung bzgl. der rechten Seiten.*
Beispiel 1.2.1.5 *Untere Dreiecksmatrizen.*
Beispiel 1.2.1.6 *Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix, Fallunterscheidung bzgl. der rechten Seiten.*

1.2.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme

Bemerkung 1.2.2.1 1. *Die Gültigkeit eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ wird durch folgende Operationen nicht geändert:*

   (a) *Vertauschung von einzelnen Gleichungen.*

   (b) *Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\neq 0$.*

   (c) *Addition einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.*

   (d) *Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.*

2. *Umformulierung in elementare Zeilenumformungen, angewandt auf die erweiterte Matrix $(A|b)$.*

3. *Lösungen bleiben invariant, wenn Gleichungssystem durch elementare Zeilenumformungen uaf Zeilenstufenform gebracht wird.*

Algorithmus 1.2.2.2 (Gauß-Algorithmus)

Bemerkung 1.2.2.3 1. *Nicht immer lösbar, kommt auf die rechten Seiten an.*

Beispiel 1.2.2.4

1.2.3 Homogene lineare Gleichungssysteme

Bemerkung 1.2.3.1 1. *Stets lösbar, Nullvektor immer Lösung.*

2. *Produkt einer Lösung mit einem Faktor ergibt wieder Lösung.*

3. *Summe von Lösungen ist wieder Lösung.*

1.2.4 Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems

Bemerkung 1.2.4.1

1. *Stets lösbar, Nullvektor immer Lösung.*
2. *Lösung i.a. nicht eindeutig. Lösungsmenge. Beispiele.*
3. *Produkt einer Lösung mit einem Faktor ergibt wieder Lösung.*
4. *Summe von Lösungen ist wieder Lösung.*

1.2.5 Die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems

Bemerkung 1.2.5.1

1. *Nicht immer lösbar. Lösungsmenge dann die* **leere Menge** $\emptyset$.
2. *Lösung i.a. nicht eindeutig. Lösungsmenge. Beispiele.*
3. *Produkt einer Lösung mit einem Faktor ergibt i.a. nicht wieder eine Lösung.*
4. *Summe von Lösungen ist i.a. nicht wieder Lösung.*
5. x, y *Lösungen* $\Longrightarrow$ $x - y$ *Lösung des homogenen Systems.*
6. *Lösungsmenge = partikuläre Lösung + Lösungsmenge des homogenen Systems.*

Kapitel 2

Grundbegriffe der Mengenlehre

2.1 Die mathematische Sprache

2.1.1 Mathematische Aussagen

Aus mathematischen Begriffen und aus Begriffen der Umgangssprache können Sätze
gebildet werden.
Definition 2.1.1.1 *Ein Satz heißt*
Aussage,
wenn ihm in eindeutiger Weise einer der Werte
„wahr“ (w) oder „falsch“ (f)
zugeordnet werden kann.
(Wahrheitswerte)

Nicht jeder Aussagesatz im Sinne der Grammatik ist eine Aussage im Sinne der obigen Definition, z.B. kann der Satz
Diese Aussage ist falsch.
weder wahr noch falsch sein. Auf solche in sich widersprüchliche hat als erster der aus Kreta stammende, ca. um 600 oder 500 v. Chr. in Athen wirkende Priester und Seher Epimenides aufmerksam gemacht mit dem Satz
Alle Kreter sind Lügner.
Man muß dieses Satz verstehen als „Ein Kreter sagt nie die Wahrheit“.

2.1.2 Verknüpfung mathematischer Aussagen

Man kann aus Aussagen neue Aussagen gewinnen durch sog.
Junktoren
oder logische Verknüpfungen. Wir betrachten zunächst eine
einstellige Verknüpfung.
Wir führen ein neues Symbol ein und erklären, wie es in bestimmten Sätzen verwendet wird und welche Bedeutung es dabei hat, so daß wir mit Hilfe des neuen Symbols neue Sätze von wohlbestimmter Bedeutung bilden können.

Definition 2.1.2.1 *Das Symbol*
$\neg$ *heißt Negation.*
Es wird in folgender Weise zur Bildung von Sätzen benutzt: Sei A eine Aussage, also ein Satz, dem eindeutig einer der Werte w oder f zugeordnet werden kann. Die Bedeutung des Satzes
$\neg A$
ist dann festgelegt durch
Ist A wahr, so ist $\neg A$ falsch, ist A falsch, so ist $\neg A$ wahr.

In dieser Definition wurde ein neuer mathematischer Begriff eingeführt durch die Angabe, in welchem Zusammenhang er verwendet werden darf und welche Bedeutung er dabei haben soll. Wir werden auf ähnliche Weise weitere Junktoren einführen. Die Angabe der Bedeutung kann besonders bequem durch eine
Wahrheitstafel erfolgen:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Bemerkung 2.1.2.2 *Sei A eine Aussage.*
Dann ist
$\neg A$ eine Aussage.

Beweis: Die Bedeutung von $\neg A$ ist gerade dadurch definiert, daß die Werte w und f angenommen werden — eine andere Bedeutung ist nicht festgelegt. Die Zuordnung dieser Werte ist eindeutig. $\square$
Mit dem Zeichen
$\square$
wird jeweils das Ende eines Beweises bezeichnet.
Mit Wahrheitstafeln kann man zweistellige Verknüpfungen besonders bequem definieren:
Definition 2.1.2.3 *Seien A, B Aussagen. Die Sätze*
(Konjunktion) „A und B" $A \wedge B$ (Disjunktion) „A oder B" $A \vee B$ (Implikation oder Subjunktion) „Aus A folgt B" $A \Longrightarrow B$
(Äquivalenz oder Bijunktion) „A ist (logisch) äquivalent zu B" $A \Longleftrightarrow B$
sind durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Bemerkung 2.1.2.4 *Seien A, B Aussagen. Die Sätze $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Longrightarrow B$, $A \Longleftrightarrow B$*
sind dann ebenfalls Aussagen.

Beweis: Die Zuordnung der Werte w und f ergibt sich in eindeutiger Weise aus der Wahrheitstafel. □

Bemerkung 2.1.2.5 *Der Junktor „oder“ ist zu unterscheiden von entweder — oder*

Bemerkung 2.1.2.6 *Die Junktoren* $\Longrightarrow$ *und* $\Longleftrightarrow$ *sind durch die angegebene Wahrheitstafel alleine definiert. Sind z.B. A und B wahre Aussagen, so besteht die Implikation* $A \Longrightarrow B$
stets, auch wenn A und B nichts miteinander zu tun haben.
So gilt etwa die Implikation
3 ist eine Primzahl $\Longrightarrow$ *Der Mond ist rund.*

2.1.3 Prädikate und Quantoren

Definition 2.1.3.1 *Es seien* $x, y, \ldots$ *Symbole. Ein Satz P heißt*
Prädikat in den Variablen $x, y, \ldots,$
wenn P bei jeder möglichen Ersetzung der Variablen $x, y, \ldots$ *zu einer Aussage wird.*

Definition 2.1.3.2 *Die Symbole*
$\forall$ *(für alle)*
und
$\exists$ *(es gibt)*
sind durch ihre folgende Bedeutung definiert:
Sei x eine Variable und $P(x)$ *ein Prädikat in der Variablen x. Dann bedeute*
$\forall x[P(x)]$*:*
Für jede mögliche Ersetzung von x erhält $P(x)$ *den Wert w.*
$\exists x[P(x)]$*:*
Es gibt (mindestens) eine Ersetzung von x, für die $P(x)$ *w wird.*

2.2 Mengen

2.2.1 Der naive Mengenbegriff

Der Mengenbegriff wurde von
Georg Cantor (1845 - 1918) in der folgenden Form eingeführt:
„Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Hier ist festgelegt, wohin man mit dem Mengenbegriff hinauswill:
„Zusammenfassung zu einem Ganzen:“ Es wird ein
neues mathematisches Objekt gebildet.
Z.B. Ist die einelementige Menge $\{x\}$ von dem Element x zu unterscheiden.
„Bestimmte Objekte:“ Von jedem Objekt unserer Anschauung oder unseres Denkens muß
feststehen, ob es zu der Menge gehört oder nicht.
„Wohlunterschieden:“ Z.B. Ist
$\{a, a, b\}$ keine Menge,

wenn man diese Bezeichnung so versteht, daß das Element a mehrfach vorkommt.

2.2.2 Die Antinomie von Bertrand Russell

Der englische Philosoph und Mathematiker Bertrand Russell (1872 – 1970) hat durch den folgenden Gedankengang bewiesen, daß der Mengenbegriff von Cantor nicht ohne Einschränkungen gebraucht werden kann:
Nehmen wir an, man könnte wirklich, wie es Cantor postuliert, beliebige Begriffe unserer Anschauung oder unseres Denkens stets zu einer Menge zusammenfassen. Dann könnte man auch
die Menge aller Mengen
bilden. Diese Menge werde mit
$\mathcal{M}$
bezeichnet.
Man kann nun für jede Menge M fragen, ob sie Element von sich selbst ist.
Z.B. gilt
$\mathcal{M} \in \mathcal{M}$,
aber
$\{1\} \notin \{1\}$.
Unter den Annahmen von Cantor könnte man nun auch folgende Menge definieren:
$\mathcal{N} := \{M \in \mathcal{M} : \quad M \notin M\}$.
Für diese Menge könnte man dann schließen:
$\mathcal{N} \in \mathcal{N} \Longrightarrow \mathcal{N} \notin \mathcal{N}$
und
$\mathcal{N} \notin \mathcal{N} \Longrightarrow \mathcal{N} \in \mathcal{N}$.
Diese Überlegung zeigt, daß man Mengen nur nach gewissen Kriterien und Regeln bilden kann. Insbesondere kann die Menge aller Mengen nicht gebildet werden.

2.2.3 Zur axiomatischen Einführung des Mengenbegriffs

Definition 2.2.3.1 *Die Begriffe „Menge“ (Bezeichnung i.a. $M, N, \dots$) und „Element“ (Bezeichnung i.a. $x, y, \dots$) sind dadurch festgelegt, daß folgende Axiome gelten sollen:*

1. **Axiome der Elementbeziehung und Existenz**

   (a) *Für jedes Element x und jede Menge M gilt genau eine der Aussagen $x \in M$ (x ist Element von M) oder $x \notin M$ (x ist nicht Element von M).*

(b) $\forall x \exists M[x \in M]$,
in Worten: Zu jedem x gibt es eine Menge, welche x als Element enthält.

Alles, jeder Begriff, der für x eingesetzt werden kann, ist also ein Element irgendeiner Menge.

2. **Axiom der Gleichheit:**

   $\forall M, N[M = N \Longleftrightarrow \forall x[x \in M \Longleftrightarrow x \in N]]$

   Zwei Mengen sind also nach Definition genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

3. **Teilmengenaxiom (Axiom der Aussonderung)**

   Sei M eine Menge, P ein Prädikat in der Variablen x. Dann ist

   $N := \{x : x \in M \land P(x)\}$

   eine Menge. Die so gebildete Menge N ist eine

   Teilmenge von M (Bezeichnung $N \subset M$),

   d.h.

   $\forall x[x \in N \Longrightarrow x \in M]$

4. **Axiom für die Existenz der Vereinigungsmenge**

   (a) *Es seien M, N Mengen. Dann gibt es eine Menge $M \cup N$ (Vereinigungsmenge von M und N), für die gilt:*
   $\forall x[x \in M \cup N \Longleftrightarrow (x \in M \lor x \in N)]$

   (b) *Sei $\mathcal{M}$ eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind. Dann gibt es eine Menge $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ (Vereinigungsmenge der Mengen von $\mathcal{M}$), für die gilt:*
   $\forall x[x \in \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \Longleftrightarrow \exists M \in \mathcal{M} : x \in M]$

5. **Axiom für die Existenz der Potenzmenge**

   Sei M eine Menge. Dann gibt es eine Menge

   $\mathcal{P}(M)$ *(Potenzmenge von M)*

   mit

   $\forall x[x \in \mathcal{P}(M) \Longleftrightarrow x \subset M]$

   Die Potenzmenge wird auch mit

   2^M

   bezeichnet.

Bemerkung 2.2.3.2 *1. Nach Axiom 1a ist jeder Begriff Element einer Menge. Insbesondere ist jede Menge Element einer Menge. Daraus folgt aber nicht die Existenz der Menge aller Mengen.*

2. *Für jedes x gibt es*

   die Menge $\{x\}$,

   die dadurch definiert ist, daß sie das Element x und sonst kein Element enthält.

   Beweis: Nach 1a gibt es eine Menge M mit $x \in M$. Nach 3 folgt die Existenz der Menge

   $\{x\} := \{y \in M : y = x\}$

   Es handelt sich hier um die Anwendung des Teilmengenaxioms mit dem Prädikat

   $P(y)$: „$y = x$“ $\square$.

3. *Zu je zwei voneinander verschiedenen Elementen x, y gibt es die Menge*

   $\{x, y\}$,

   die genau diese beiden Elemente enthält.

   Beweis:

   $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$ $\square$

4. *Die Menge $\{x\}$ gestattet auch die Schreibweisen $\{x, x\}$, $\{x, x, x\}$ usw.*

5. *Jede Menge M enthält die Teilmenge*

   $\emptyset := \{x \in M : x \notin M\}$ *(leere Menge)*

   Die leere Menge ist charakterisiert durch

   $\forall x[x \notin \emptyset]$

   und daher

   eindeutig bestimmt.

6. *Die o.g. Axiome beschreiben den Mengenbegriff. Für den Aufbau der Mathematik werden einige wenige weitere Axiome benötigt, insbesondere:*

   (a) **Axiom von Peano** *Es gibt die Menge der natürlichen Zahlen (Genaueres siehe Vorlesung „Aufbau des Zahlensystems“).*

   (b) *Das* **Auswahlaxiom** *(vgl. Übungen).*

Definition 2.2.3.3 (Durchschnitt und Komplementärmengen) *1. Sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine Menge, deren Elemente Mengen sind. Sei $M_0 \in \mathcal{M}$. Die Menge*

$\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \in M_0 : \forall M \in \mathcal{M}[x \in M]\}$

heißt

Durchschnitt der Mengen von $\mathcal{M}$.

2. *Seien M, N Mengen. Die Menge*

   $M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\}$

   heißt

   Komplementärmenge von N in M.

Bemerkung 2.2.3.4 1. *Die Durchschnittsmenge der Mengen von M ist von der Auswahl der Menge M_0 unabhängig.*

   Beweis: Der Durchschnitt ist, unabhängig von M_0, vollständig charakterisiert durch die Bedingung

   $x \in \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M \Longleftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}[x \in M]$ □

2. *Seien $M \neq N$ Mengen. Nach einer Bemerkung oben existiert dann die Menge $\{M, N\}$. Anwendung der Definition des Durchschnitts auf diese Menge liefert den Durchschnitt*

   $M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$

Satz 2.2.3.5 (Regeln der Mengenalgebra) *Es seien L, M, N Mengen. Für einige der unten angeführten Aussagen (Komplementarität, Regeln von de Morgan) ist es sinnvoll, alle diese Mengen als Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge U zu betrachten; wir schreiben dann auch*
$\mathcal{C}M := U \setminus M$.

a)	*Idempotenz*	$M \cap M = M$	$M \cup M = M$
b)	*Kommutativität*	$M \cap N = N \cap M$	$M \cup N = N \cup M$
c)	*Assoziativität*	$L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N$	$L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N$
d)	*Absorption*	$M \cap (M \cup N) = M$	$M \cup (M \cap N) = M$
e)	*Distributivität*	$L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$	$L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$
f)	*Komplementarität*	$M \cap \mathcal{C}M = \emptyset$	$M \cup \mathcal{C}M = U$
g)	*Regeln von de Morgan*	$\mathcal{C}(M \cap N) = \mathcal{C}M \cup \mathcal{C}N$	$\mathcal{C}(M \cup N) = \mathcal{C}M \cap \mathcal{C}N$
h)	*Konsistenz*	$M \cap N = M \Longleftrightarrow M \subset N$	$M \cup N = N \Longleftrightarrow M \subset N$

Der Beweis dieser Regeln geht jeweils durch Anwendung der entsprechenden logischen Schlußregeln auf die bei den Mengendefinitionen vorkommenden Prädikate.
Beim Beweis können einfache Diagramme zur Verdeutlichung verwendet werden, sog. Venn-Diagramme:

2.2.4 Das kartesische Produkt von Mengen

Satz und Definition 2.2.4.1 *(Produktmenge)*
Seien M, N Mengen. Dann gibt es eine Menge
$M \times N$ *(Produktmenge)*
so daß gilt:
$\forall z[z \in M \times N \Longleftrightarrow \exists x \in M, y \in N[z = \{\{x\}, \{x, y\}\}]]$
Statt $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ schreibt man auch
(x, y) *(Paarbildung)*

Beweis: Es ist $M \times N = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M \cup N)) : \exists x \in M, y \in N[z = \{\{x\}, \{x, y\}\}] = \{\{x\}\} \cup \{\{x\} \cup \{y\}\}]] \square$

Bemerkung 2.2.4.2

1. *Auch in der Paarbildung werden, wie bei der Bildung der Menge $\{x, y\}$, zwei Elemente x, y zusammengefaßt. Im Unterschied zu der Menge $\{x, y\}$ kommt es dagegen im Paar (x, y)*

   auf die Reihenfolge an.

   Dagegen dürfen im Paar (x, y) die beiden Elemente die gleichen sein, das Paar (x, x) ist also erlaubt, während $\{x, x\}$ nur als alternative Schreibweise der Menge $\{x\}$ Geltung hat und keine neue Menge ist!

2. $M \times N = \emptyset \Longleftrightarrow M = \emptyset \vee N = \emptyset$

3. *Im Fall $M = N$ schreibt man*

   $M \times M = M^2$

4. *Im Fall $M = N = I\!R$ kann man die Paare $(x, y) \in I\!R^2$ eindeutig*

   den Punkten der Anschauungsebene zuordnen (Darstellung von Punkten der Ebene durch Koordinaten).

   Auf diese Weise begann mit René Descartes (Renatus Cartesius, 1596 - 1650) die Analytische Geometrie und damit die Algebraisierung der Geometrie—in der traditionellen, auf die Griechen zurückgehenden Mathematik stand die Geometrie im Vordergrund, und man konnte eher von einer geometrischen Algebra sprechen.

5. *Entsprechend Bildung von*

   Tripeln, Quadrupeln, Quintupeln, n-Tupeln.

   In der Koordinatengeometrie werden die Punkte der dreidimensionalen Raumes durch Tripel beschrieben, z.B. (x, y, z). Quadrupel, Quintupel usw. können in entsprechender Weise zur Beschreibung höherdimensionaler Räume verwendet werden, die in der Mathematik als Verallgemeinerung der zwei- bzw. dreidimensionalen Anschauungsräume eingeführt werden.

2.3 Abbildungen

2.3.1 Abbildungen

Unter einer Funktion (oder Abbildung—diese beiden Begriffe werden i.w. synonym verwendet) versteht man eine Vorschrift, die
jedem Wert des Definitionsbereiches in eindeutiger Weise ein Element des Wertebereiches zuordnet.
Es ist nicht notwendig, die Existenz solcher Abbildungsvorschriften gesondert zu postulieren, denn man kann die mengentheoretischen Axiome zu der folgenden Definition benutzen:

Definition 2.3.1.1 (Abbildungen) *Seien M, N Mengen. Eine Teilmenge $G \subset M \times N$ heißt*
Abbildung (oder Funktion) von M in (oder nach) N,
wenn folgendes gilt:

1. $\forall x \in M \exists y \in N[(x, y) \in G]$

   D.h.: Jedem Wert x des Definitonsbereiches (Quelle) M wird ein Wert y des Bildbereiches (Ziel) N zugeordnet.

2. $\forall x \in M \forall y_1, y_2 \in N[(x, y_1), (x, y_2) \in G \Longrightarrow y_1 = y_2]$

   D.h.: Die Zuordnung des Funktionswertes ist eindeutig.

Schreibweisen: Statt $(x, y) \in G$ verwendet man meist Schreibweisen wie z.B.
$x \longmapsto y$ oder $y = f(x)$
Statt $G \subset M \times N$ verwendet man dementsprechend Bezeichnungen wie z.B.
$f : M \longrightarrow N$
Der Zusammenhang mit der von uns vorgenommenen Definition über den Graphen wird hergestellt, indem man zu einer als $f : M \to N$ geschriebenen Funktion den Graphen explizit angibt als
$G_f := \{(x, y) \in M \times N : y = f(x)\}$

Beispiel 2.3.1.2

1. *Für jede Menge M ist die* **identische Abbildung** $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$ *definiert durch* $G_{\mathrm{id}_M} = \{(x, y) \in M \times M : y = x\}$. *Die identische Abbildung, die auch mit 1_M bezeichnet wird, ist also die Zuordnung $x \longmapsto x$ für alle $x \in M$.*

2. *Sind M und N Mengen und $y_0 \in N$, so ist die* **konstante Abbildung** *auf y_0 definiert durch ihren Graphen $G = \{(x, y) \in M \times N : y_0 = y\}$.*

3. *Ist M eine Teilmenge der Menge N, so ist die* **Inklusionsabbildung** *ι gegeben durch ihren Graphen $G = \{(x, y) \in M \times N \ : \ x = y\}$*

4. *Ist $f : M \to N$ eine Abbildung und $M' \subset M$ eine Teilmenge, so ist die* **Beschränkung** *$f|M' \longrightarrow N$ definiert durch ihren Graphen $G_{f|M'} := G_f \cap M' \times N$.*

5. *Abbildungen zwischen endlichen Mengen können in Form von Tabellen angegeben werden.*

6. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine reelle Matrix.*

   A definiert folgende Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \hat{A}: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

7. *Spezialfall* $m = n = 1, a \in I\!R$. *Abbildung*

$$\begin{array}{rrcl} \hat{a}: & I\!R & \to & I\!R \\ & x & \mapsto & ax \end{array}$$

8. *Spezialfall* $m = n, A = E_n \in I\!R^{n\times n}$. *Abbildung*

$$\begin{array}{rrcl} \hat{A}: & I\!R^n & \to & I\!R^n \\ & x & \mapsto & E_n x \end{array}$$

   ist die identische Abbildung.

2.3.2 Injektiv, surjektiv, bijektiv

Definition 2.3.2.1 *Seien* M, N *Mengen und* $f : M \to N$ *eine Abbildung mit dem Graphen* G_f.

1. f **injektiv** $:\iff \forall x, y \in M[f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y]$
2. f **surjektiv** $:\iff \forall y \in N \exists x \in M[f(x) = y]$
3. f **bijektiv** $:\iff f$ *injektiv* $\wedge f$ *surjektiv*

Bemerkungen und Beispiele 2.3.2.2 1. *Die identische Abbildung ist stets bijektiv.*

2. *Die konstante Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn das Ziel eine einpunktige Menge ist; sie ist injektiv genau dann, wenn der Definitionsbereich höchstens ein einziges Element besitzt.*
3. *Eine Inklusionsabbildung ist stets injektiv.*
4. *Jede Abbildung* $f : \emptyset \longrightarrow N$ *ist injektiv; der Graph jeder solchen Abbildung ist* $\emptyset$.
5. *Eine Abbildung* $\hat{A} : I\!R^n \to I\!R^m$ *ist genau dann injektiv, wenn die Zeilenstufenform von* A *genau* n *von Null verschiedene Zeilen hat.*

   Beweis: Da A n *Spalten hat, kann die Zeilenstufenform von* A *höchstens* n *von Null verschiedene Zeilen haben.*

   In diesem Fall gibt es n *Pivot-Elemente, und es sind* 0 *Variable frei wählbar. Die Lösung ist also eindeutig.*

   Hat die Zeilenstufenform von A *weniger als* n *von Null verschiedene Zeilen, so gibt es weniger als* n *Pivot-Elemente und damit frei wählbare Variable.*
6. *Spezialfall:* $\hat{a} : I\!R \to I\!R$ *injektiv* $\iff a \neq 0$

7. *Übungsaufgabe: Hat die Zeilenstufenform von A m von Null verschiedene Zeilen, so ist die Abbildung $\hat{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv.*

   Kann es mehr als m von Null verschiedene Zeilen geben?

2.3.3 Die inverse Abbildung

Satz 2.3.3.1 *Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung mit dem Graphen G_f. Dann ist*

$$G := \{(y, x) \in N \times M : (x, y) \in G_f\}$$

eine Abbildung von N nach M.
Beweis: Es sind die beiden Bedingungen in der Definition einer Abbildung zu zeigen:

1. Sei $y \in N$.

   f surjektiv $\Longrightarrow \exists x \in M[f(x) = y]$, d.h. $(y, x) \in G$.

2. Sei $y \in N$, und seien $x_1, x_2 \in M$ mit $(y, x_1) \in G$, $(y, x_2) \in G$, d.h. $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y$.

   f injektiv $\Longrightarrow x_1 = x_2$

□
Definition 2.3.3.2 *Die im Satz definierte Abbildung heißt* **inverse Abbildung** *(Umkehrabbildung) zu f und wird mit f^{-1} bezeichnet.*

2.3.4 Komposition von Abbildungen

Satz 2.3.4.1 *Seien L, M, N Mengen und $f : L \to M$, $g : M \to N$ Abbildungen mit den Graphen $G_f \subset L \times M$, $G_g \subset M \times N$. Dann ist*

$$G := \{(x, z) \in L \times N : \exists y \in M\ [f(x) = y \wedge g(y) = z]\}$$

eine Abbildung von L nach N.
In anderer Schreibweise ist $G := \{(x, z) \in L \times N : \exists y \in M\ [(x, y) \in G_f \wedge (y, z) \in G_g]\}$
Beweis: Es sind die beiden Bedingungen in der Definition einer Abbildung zu zeigen:

1. Sei $x \in L$. Zu zeigen ist: $\exists z \in N[(x, z) \in G]$.

   f Abbildung $\Longrightarrow \exists y \in M[y = f(x)]$

   g Abbildung $\Longrightarrow \exists z \in N[z = g(y)]$

   Mit diesem z gilt $(x, z) \in G$.

2. Sei $x \in L$, und seien $z_1, z_2 \in N$ mit $(x, z_1) \in G \wedge (x, z_2) \in G$. Dann gibt es $y_1, y_2 \in M$ mit $f(x) = y_1$ und $f(x) = y_2$.

   f Abbildung $\Longrightarrow y_1 = y_2$.

   g Abbildung $\Longrightarrow z_1 = z_2$.

□

Definition 2.3.4.2 *Die im Satz definierte Abbildung heißt* **Komposition** *(Produkt) von f und g und wird mit $g \circ f$ bezeichnet.*

Satz 2.3.4.3 1. *Für die Komposition von Abbildungen gilt das* **Assoziativgesetz** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2. *Für die Komposition einer Abbildung mit der identischen Abbildung gilt stets $f \circ \mathrm{id} = f$ bzw. $\mathrm{id} \circ f = f$.*

Beweis: Betrachtung der jeweiligen Zuordnungen.

Satz 2.3.4.4 *Seien L, M, N Mengen und $f : L \to M$, $g : M \to N$ bijektive Abbildungen. Dann ist $g \circ f$ bijektiv, und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Beweis: Nachrechnen!

2.3.5 Bild und Urbild

Definition 2.3.5.1 *Sei $f : M \to N$ eine Abbildung, und seien $A \subset M$, $B \subset N$ Teilmengen.*

1. $f(A) := \{y \in N : \exists x \in A[f(x) = y]\}$ *heißt* **Bild** *von A unter f.*

2. $f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\}$ *heißt* **Urbild** *von B unter f.*

Bemerkung 2.3.5.2 1. $f : M \to N$ *surjektiv* $\Longleftrightarrow f(M) = N$

2. *Statt $f^{-1}(\{y\})$ schreibt man meist $f^{-1}(y)$.*

Satz 2.3.5.3 (Rechenregeln) .

a)	$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
b)	$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$	$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
c)	$f^{-1}(f(A)) \supset A$	$f(f^{-1}(A)) \subset A$
d)	$f^{-1}(\mathcal{C}A) = \mathcal{C}f^{-1}(A)$	

Kapitel 3

Algebraische Grundstrukturen

3.1 Gruppen

3.1.1 Verknüpfungen

Definition 3.1.1.1 *Sei G eine Menge. Eine* **Verknüpfung** *auf G ist eine Abbildung $* : G \times G \longrightarrow G$.*

Beispiel 3.1.1.2

1. *Addition auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \ldots \mathbb{C}$.*
2. *Multiplikation auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \ldots \mathbb{C}$.*
3. *X Menge, $G := \mathcal{P}(X)$, $G \times G \longrightarrow G$, $(A, B) \longmapsto A \cap B$.*
4. *X Menge, $G := Abb(X, X)$, $G \times G \longrightarrow G$,$(f, g) \longmapsto g \circ f$.*
5. *G endliche Menge, Angabe der Verknüpfung durch Tabelle.*

Definition 3.1.1.3 *Sei G eine Menge und $* : G \times G \longrightarrow G$ eine Verknüpfung auf G.*

1. $*$ **assoziativ** $:\Longleftrightarrow \forall x, y, z \in G\ [x * (y * z) = (x * y) * z]$
2. $*$ **kommutativ** $:\Longleftrightarrow \forall x, y \in G\ [x * y = y * x]$
3. $e \in G$ **neutrales Element** *bzgl.* $*\ :\Longleftrightarrow \forall x \in G\ [x * e = e * x = x]$
4. *Sei $e \in G$ neutrales Element bzgl. $*$ und seien $x, \bar{x} \in G$. $\bar{x}$ heißt* **inverses Element** *zu x* $:\Longleftrightarrow x * \bar{x} = \bar{x} * x = e$.

Bemerkung 3.1.1.4 *Sei G eine Menge und $* : G \times G \longrightarrow G$ eine Verknüpfung auf G.*

1. *Ein neutrales Element ist eindeutig bestimmt.*

   Denn sind e_1, e_2 neutrale Elemente, so folgt $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$.

2. *$x \in G \wedge *$ assoziatativ $\Longrightarrow$ Das inverse Element $\bar{x}$ ist eindeutig bestimmt.*

   Beweis: Seien $\bar{x}, \tilde{x}$ inverse Elemente. Dann

   $\bar{x} = \bar{x} * e = \bar{x} * (x * \tilde{x}) = (\bar{x} * x) * \tilde{x} = e * \tilde{x} = \tilde{x}$.

3. *$x \in G$, $\bar{x} \in G$ invers zu x $\wedge *$ assoziatativ $\Longrightarrow$ $\bar{x}$ hat inverses Element, und zwar ist $\bar{\bar{x}} = x$.*

3.1.2 Gruppen

Definition 3.1.2.1 *Sei G eine Menge und $* : G \times G \longrightarrow G$ eine Verknüpfung auf G. Das Paar $(G, *)$ heißt*

1. **Gruppe** $:\Longleftrightarrow$
   (a) *$*$ assoziativ.*
   (b) *G besitzt ein neutrales Element.*
   (c) *Zu jedem $x \in G$ gibt es ein inverses Element.*
2. **abelsche Gruppe** $:\Longleftrightarrow$
   (a) *$(G, *)$ ist Gruppe.*
   (b) *$*$ ist kommutativ.*

Bemerkung 3.1.2.2 1. *Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreibt man oft G statt $(G, *)$.*

2. *$(G, *)$ Gruppe $\Longrightarrow G \neq \emptyset$.*

Beispiel 3.1.2.3 1. *Die einpunktige Menge $\{e\}$ ist mit der Verknüpfung $e * e = e$ eine abelsche Gruppe.*

2. *$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ abelsche Gruppen.*
3. *$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n, \mathbb{R}^{m \times n}$ abelsche Gruppen.*
4. *$(2\mathbb{Z}, +)$ abelsche Gruppe, analog für $m\mathbb{Z} = \{mn \ : n \in \mathbb{Z}\}$ $(m \in \mathbb{Z})$.*
5. *Sei $m \in \mathbb{Z}$. Definiere $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, \ldots, m-1\}$ und betrachte folgende Addition $\odot$ auf $\mathbb{Z}_m$:*

   Für $k, l in \mathbb{Z}_m$ sei $k \odot l$ der Rest von $k + l$ bei Division durch m.

   Dann ist $(\mathbb{Z}_m, \odot)$ eine abelsche Gruppe.

   Beweis: ...
6. *$(\mathbb{Q}^*, .), (\mathbb{R}^*, .), (\mathbb{C}^*, .)$ abelsche Gruppen.*
7. *Definition Matrizenmultiplikation (s.u.), $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot)$ nicht-abelsche Gruppe.*

Bemerkung 3.1.2.4 *Wenn die Verknüpfung in einer Gruppe nicht explizit angegeben ist, wird sie meistens als Multiplikation geschrieben. Das inverse Element wird dann mit x^{-1} bezeichnet.*
Wird die Verknüpfung als Addition geschrieben, wird das inverse Element meist mit $-x$ bezeichnet, das neutrale Element meist mit 0.

Definition 3.1.2.5 *Sei G eine Gruppe und $H \subset G$.*
H **Untergruppe** $:\Longleftrightarrow$

1. $\forall x, y \in H\ [x * y \in H]$
2. $e \in H$
3. $\forall x \in H\ [\bar{x} \in H]$

Bemerkung 3.1.2.6

1. *Eine Untergruppe einer Gruppe ist selbst wieder Gruppe.*
2. *$(G, *)$ Gruppe, $H \subset G$, $H \neq \emptyset$. Dann*
   H Untergruppe $\Longleftrightarrow\ \forall x, y \in H\ x * \bar{y} \in H$.
   (Untergruppenkriterium.)
   Beweis: $\Longrightarrow$: *Klar.*
   $\Longleftarrow$: *Sei e das neutrale Element von G.*
   (a) $H \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \in H \Longrightarrow e = x * \bar{x} \in H$.
   (b) $\forall x \in H\ [\bar{x} = e * \bar{x} \in H]$.
   (c) $\forall x, y \in H\ [x * y = x\bar{\bar{y}} \in H]$.
3. *G Gruppe mit neutralem Element $e \Longrightarrow G$ enthält $\{e\}$ als Untergruppe.*
4. *ÜA: $H_i, i \in I$ Untergruppen $\Longrightarrow \bigcap_{i\in I} H_i$ Untergruppe.*
5. *Das inverse Element zu x wird mit x^{-1} bezeichnet, bei additiv geschriebenen Gruppen mit $-x$.*

3.1.3 Homomorphismen

Definition 3.1.3.1 *Seien $(G, *)$ und $(H, *)$ Gruppen und $f : G \longrightarrow H$ eine Abbildung.*
f Homomorphismus (von Gruppen) $:\Longleftrightarrow\ \forall x, y \in G\ [f(x * y) = f(x) * f(y)]$

Bemerkung 3.1.3.2

1. *Die Verknüpfungen $*$ für G und H sind voneinander unabhängig.*
2. *Beispiel: Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \longmapsto 2^n$ ist ein Homomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}^*, .)$.*
3. *G, H Gruppen, $f : G \longrightarrow H$ Homomorphismus $\Longrightarrow\ f(e_G) = e_H$.*
   Beweis: Sei $\tilde{e} := f(e_G)$.
   $e_G e_G = e_G \Longrightarrow$
   $\tilde{e}\tilde{e} = f(e_G)f(e_G) = f(e_G) = \tilde{e} \Longrightarrow$
   $\tilde{e} = (\tilde{e}^{-1}\tilde{e})\tilde{e} = \tilde{e}^{-1}(\tilde{e}\tilde{e}) = \tilde{e}^{-1}\tilde{e} = e_H$

4. *G, H Gruppen, $f : G \longrightarrow H$ Homomorphismus $\Longrightarrow$ $\forall x \in G\ [f(x^{-1}) = f(x)^{-1}]$.*

   Beweis: Sei $x \in G$; zu zeigen:

   (a) $f(x^{-1})f(x) = e_H$.
   (b) $f(x)f(x^{-1}) = e_H$.

   $f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(e_G) = e_H$.

   Die zweite Behauptung entsprechend.

5. *G Gruppe $\Longrightarrow id_G$ Homomorphismus.*

6. *G, H, K Gruppen, $f : G \longrightarrow H$, $g : H \longrightarrow K$ Homomorphismen $\Longrightarrow g \circ f : G \longrightarrow K$ Homomorphismus.*

Definition 3.1.3.3 *Seien G, H Gruppen und $f : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus.*

1. *f Monomorphismus $:\Longleftrightarrow$ f injektiv.*

2. *f Epimorphismus (Homomorphismus auf) $:\Longleftrightarrow$ f surjektiv.*

3. *f Isomorphismus $:\Longleftrightarrow$ f bijektiv.*

4. *Zwei Gruppen G und H heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $f : G \longrightarrow H$ gibt.*

Definition 3.1.3.4 *Seien G, H Gruppen und $f : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus.*
$\ker f := f^{-1}(e)$ *heißt* **Kern** *von f.*

Bemerkung 3.1.3.5 *Kern und Bild eines Homomorphismus sind Untergruppen.*

3.1.4 Beispiel einer nicht-abelschen Verknüpfung: Das Matrizenprodukt

Definition 3.1.4.1 *Seien $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ natürliche Zahlen. Die Abbildung*

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R}^{(k\times m)} \times \mathbb{R}^{(m\times n)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{(k\times n)} \\ & \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \sum_{\mu=1}^m a_{1\mu}b_{\mu1} & \dots & \sum_{\mu=1}^m a_{1\mu}b_{\mu n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\mu=1}^m a_{k\mu}b_{\mu1} & \dots & \sum_{\mu=1}^m a_{k\mu}b_{\mu n} \end{pmatrix} \end{array}$$

(sog **Zeilen-Spalten-Faltung***) heißt* **Matrizenprodukt**.
Andere Schreibweise: $(a_{\kappa\mu})(b_{\mu\nu}) = (c_{\kappa\nu})$ mit $c_{\kappa\nu} = \sum_\mu a_{\kappa\mu}b_{\mu\nu}$.

Satz 3.1.4.2 (Regeln zum Matrizenprodukt)

1. *Das Matrizenprodukt ist* **assoziativ**, *aber* **nicht kommutativ**.

2. *Distributivgesetze: $(A + B)C = AB + AC$, $A(B + C) = AB + AC$.*

3. *Für Matrizen A und B und $\lambda \in I\!R$ gilt $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.*

4. *Für Matrizen A und B gilt ${}^t(AB) =^t B\ {}^tA$*

Beweis: Nachrechnen, d.h.:

1. Assoziativgesetz: Seien $A = (a_{\kappa\lambda}) \in K^{(k\times l)}$, $B = (b_{\lambda\mu}) \in K^{(l\times m)}$, $C = (c_{\mu\nu}) \in K^{(m\times n)}$.

   Dann ist

   $AB = (d_{\kappa\mu}) \in K^{(k\times m)}$ mit $d_{\kappa\mu} = \sum_{\lambda=1}^{l}\ a_{\kappa\lambda}b_{\lambda\mu}$

   und

   $(AB)C = (e_{\kappa\nu}) \in \mathbb{R}^{(k\times n)}$ mit

   $e_{\kappa\nu} = \sum_{\mu=1}^{m}\ d_{\kappa\mu}c_{\mu\nu} =$

   $\sum_{\mu=1}^{m}\ \left(\sum_{\lambda=1}^{l}\ a_{\kappa\lambda}b_{\lambda\mu}\right)\ c_{\mu\nu} =$

   $\sum_{\mu=1}^{m}\ \sum_{\lambda=1}^{l}\ a_{\kappa\lambda}b_{\lambda\mu}c_{\mu\nu},$

   andererseits

   $BC = (f_{\lambda\nu}) \in \mathbb{R}^{(l,n)}$ mit $f_{\lambda\nu} = \sum_{\mu=1}^{m}\ b_{\lambda\mu}c_{\mu\nu}$

   und

   $A(BC) = (g_{\kappa\nu}) \in \mathbb{R}^{(k\times n)}$ mit

   $g_{\kappa\nu} = \sum_{\lambda=1}^{l}\ a_{\kappa\lambda}f_{\lambda\nu} =$

   $\sum_{\lambda=1}^{l}\ a_{\kappa\lambda}\ \left(\sum_{\mu=1}^{m}\ b_{\lambda\mu}c_{\mu\nu}\right) =$

   $\sum_{\lambda=1}^{l}\ \ \sum_{\mu=1}^{m}\ a_{\kappa\lambda}b_{\lambda\mu}c_{\mu\nu}.$

   Die Koeffizienten der beiden Matrizenprodukte sind also Summen der gleichen Summanden und stimmen überein.

   Nicht kommutativ, Beweis durch ein Gegenbeispiel, etwa

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Distributivgesetze: entsprechende Rechnung.

3. Assoziativität bzgl. der Multiplikation mit Skalaren: elementare Rechnung.

4. Transposition eines Matrizenprodukts: elementare Rechnung.

Bemerkung 3.1.4.3 *Matrizen, auch quadratische Matrizen, besitzen i.a. kein inverses Element bzgl. der Multiplikation. Matrizen, für die es eine inverse Matrix gibt, heißen invertierbar oder nicht-singulär. Solche Matrizen werden später noch genauer betrachtet. Sie bilden ein wichtiges Beispiel nicht-abelscher Gruppen.*

3.2 Ringe und Körper

3.2.1 Ringe

Definition 3.2.1.1 *1. Ein* **Ring** *ist ein Tripel* $(R, +, \cdot)$ *(kurz: R) wie folgt:*

(a) $(R, +)$ *abelsche Gruppe (mit neutralem Element* 0*).*

(b) Für $\cdot$ *gilt das Assoziativgesetz.*

(c) Distributivgesetze:
$\forall a, b, c \in R\ [a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc]$

2. $(R, +, \cdot)$ **kommutativ** $\Longleftrightarrow$ $\cdot$ *kommutativ.*

3. $(R, +, \cdot)$ **Ring mit 1** $\Longleftrightarrow$ $(R, \cdot)$ *R besitzt ein neutrales Element bzgl.* $\cdot$.

4. $(R, +, \cdot)$ **Integritätsring** *(oder Integritätsbereich, nullteilerfreier Ring)* $\Longleftrightarrow \forall a, b \in R\ [ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0]$

Beispiel 3.2.1.2 *1.* $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *kommutative Integritätsringe mit 1.*

2. $2\mathbb{Z}$ *kommutativer Integritätsring.*

3. Sei $(G, +)$ *abelsche Gruppe, R die Menge der Endomorphismen* $f : G \longrightarrow G$*. Für* $f, g \in R$ *sei*

$f + g : G \longrightarrow G, \quad \forall x \in G\ [(f+g)(x) := f(x) + g(x)]$

$f \circ g : G \longrightarrow G, \quad \forall x \in G\ [(f \circ g)(x) := f(g(x))]$

Dann ist $(R, +, \circ)$ *ein (i.a. nicht kommutativer) Ring mit 1.*

Satz 3.2.1.3 (Rechenregeln) *Sei R Ring und seien* $a, b \in R$*.*

1. $0a = a0 = 0$
2. $-(ab) = (-a)b = a(-b)$
3. $(-a)(-b) = ab$
4. $(-a) = (-1)a$
5. $0 = 1 \Longrightarrow R = \{0\}$

Beweis: Einfache Verifikationen

3.2.2 Körper

Definition 3.2.2.1 *Ein* **Körper** *ist ein Ring* $(K, +, \cdot)$ *(kurz: K) wie folgt:*

1. $(K^* = K \setminus \{0\}, \cdot)$ *Gruppe.*
2. K *kommutativ.*

Bemerkung 3.2.2.2 1. *Körper:* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

2. *Man kann zeigen:* $\mathbb{Z}_p$ *Körper* $\Longleftrightarrow p$ *prim.*

   Übungsaufgabe! Beweis:

   — $\Longleftarrow$: $k \in \{1, \ldots, p-1\}$
   $\Longrightarrow (k, p) = 1$
   $\Longrightarrow$ *(wg. euklid. Algorithmus)* $\exists r, s \in \mathbb{Z}\ [1 = rk + sp]$
   $\Longrightarrow rk \equiv 1 \bmod p$
   $\Longrightarrow \bar{r}\bar{k} = \bar{1}$

   — $\Longrightarrow$: *Sei* $p \in \mathbb{N}$ *nicht prim.*

   (a) $p = 0 \Longrightarrow \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ *kein Körper, da* 2 *nicht invertierbar in* $\mathbb{Z}$.
   (b) $p = 1 \Longrightarrow \mathbb{Z}_p = \{\bar{1}\} \Longrightarrow \mathbb{Z}_p^* = \emptyset$, *also keine Gruppe.*
   (c) $p > 1$ *nicht prim* $\Longrightarrow p = rs,\ 1 < r < p$
   $\Longrightarrow \bar{r} \neq \bar{0}, \bar{s} \neq \bar{0}$, *aber* $\bar{r}\bar{s} = \bar{p} = \bar{0}$, *also kann* $\bar{r}$ *kein inverses Element besitzen.*

Kapitel 4

Vektorräume

4.1 Matrizen und Vektoren über beliebigen Körpern

Sei K ein Körper. Matrizen und Vektoren mit Koeffizienten in K werden in vollständiger Analogie zu atrizenb und Vektoren mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ eingeführt, also:

4.1.1 Addition von Matrizen

Definition 4.1.1.1 *Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.*

1. *Ein rechteckiges Schema*

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

   heißt Matrix mit m Zeilen und n Spalten und Koeffizienten in K.

   Die Menge solcher Matrizen wird mit $K^{m\times n}$ oder K_n^m bezeichnet. Es sind auch andere Bezeichnungen verbreitet wie z.B. $M(m \times n, K)$ oder $K^{(m,n)}$ oder ${}^mK^n$.

2. *$m = 1$: $K_n := K_n^1 = K^{1\times n}$ Zeilenvektoren.*

3. *$n = 1$: $K^m := K_1^m = K^{m\times 1}$ Spaltenvektoren.*

4. *Speziell sind die Zeilen- und Spaltenvektoren einer Matrix definiert.*

Definition 4.1.1.2 *Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.*
Die Abbildung

$$\begin{array}{lccc} + : & K^{(m\times n)} \times K^{(m\times n)} & \longrightarrow & K^{(m\times n)} \\ & \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

heißt **Addition (Summe) von Matrizen**.
In den Fällen $m = 1$ und $n = 1$ spricht man von der Addition von Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.
Aussage 4.1.1.3 (Eigenschaften der Matrizenaddition) .

1. *Assoziativgesetz.*

2. *Kommutativgesetz.*

3. *Neutrales Element (Nullmatrix bzw. Nullvektor (genauer: Nullzeilenvektor, Nullspaltenvektor)).*

   Es gibt nicht einen *Nullvektor bzw.* eine *Nullmatrix; es ist jeweils die Zeilen- und Spaltenanzahl mitanzugeben.*

4. *Zu jedem Element existiert ein inverses Element bzgl. der Addition.*

4.1.2 Die transponierte Matrix

Definition 4.1.2.1 *Ist $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{(m\times n)}$ eine Matrix, so heißt die Matrix ${}^tA := ({}^ta_{\nu\mu}) \in K^{(n\times m)}$ mit ${}^ta_{\nu\mu} := a_{\mu\nu}$ die* **transponierte Matrix**.
Bemerkung 4.1.2.2 *Für $x \in K^m$ ist ${}^tx \in K_m$.*

4.1.3 Das Produkt von Matrizen mit Skalaren

Definition 4.1.3.1 *Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.*
Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} + : & K \times K^{(m\times n)} & \longrightarrow & K^{(m\times n)} \\ & \left(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

heißt Multiplikation der Matrix mit dem Skalar λ.
In den Fällen $m = 1$ und $n = 1$ spricht man von der Multiplikation von Zeilen- bzw. Spaltenvektoren mit Skalaren.
Aussage 4.1.3.2 *Seien $m, n \geq 1$. Es gilt:*

1. *Assoziativgesetz*

   $\forall_{\lambda,\mu\in K, A\in K^{(m\times n)}} (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

2. *Distributivgesetze:*

   (a) $\forall_{\lambda,\mu\in K, A\in K^{(m\times n)}} (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

   (b) $\forall_{\lambda\in K, A,B\in K^{(m\times n)}} \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

4.1.4 Das Matrizenprodukt

Definition 4.1.4.1 *Seien $k, m, n \in I\!N^*$ natürliche Zahlen. Die Abbildung*

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & K^{(k\times m)} \times K^{(m\times n)} & \longrightarrow & K^{(k\times n)} \\ & \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \sum_{\mu=1}^m a_{1\mu}b_{\mu 1} & \dots & \sum_{\mu=1}^m a_{1\mu}b_{\mu n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\mu=1}^m a_{k\mu}b_{\mu 1} & \dots & \sum_{\mu=1}^m a_{k\mu}b_{\mu n} \end{pmatrix} \end{array}$$

(sog **Zeilen-Spalten-Faltung***) heißt* **Matrizenprodukt***.*
Andere Schreibweise: $(a_{\kappa\mu})(b_{\mu\nu}) = (c_{\kappa\nu})$ mit $c_{\kappa\nu} = \sum_\mu a_{\kappa\mu}b_{\mu\nu}$.

Satz 4.1.4.2 (Regeln zum Matrizenprodukt)

1. *Das Matrizenprodukt ist* **assoziativ***, aber* **nicht kommutativ***.*
2. *Distributivgesetze: $(A+B)C = AB + AC$, $A(B+C) = AB + AC$.*
3. *Für Matrizen A und B und $\lambda \in K$ gilt $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.*
4. *Für Matrizen A und B gilt ${}^t(AB) =^t B\ {}^tA$*

Beweis: Nachrechnen, d.h.:

1. Assoziativgesetz: Seien $A = (a_{\kappa\lambda}) \in K^{(k\times l)}$, $B = (b_{\lambda\mu}) \in K^{(l\times m)}$, $C = (c_{\mu\nu}) \in K^{(m\times n)}$.

   Dann ist

   $AB = (d_{\kappa\mu}) \in K^{(k\times m)}$ mit $d_{\kappa\mu} = \sum_{\lambda=1}^l a_{\kappa\lambda}b_{\lambda\mu}$

   und

   $(AB)C = (e_{\kappa\nu}) \in K^{(k\times n)}$ mit

   $e_{\kappa\nu} = \sum_{\mu=1}^m d_{\kappa\mu}c_{\mu\nu} =$

   $\sum_{\mu=1}^m \left(\sum_{\lambda=1}^l a_{\kappa\lambda}b_{\lambda\mu}\right) c_{\mu\nu} =$

   $\sum_{\mu=1}^m \sum_{\lambda=1}^l a_{\kappa\lambda}b_{\lambda\mu}c_{\mu\nu}$,

   andererseits

   $BC = (f_{\lambda\nu}) \in K^{(l,n)}$ mit $f_{\lambda\nu} = \sum_{\mu=1}^m b_{\lambda\mu}c_{\mu\nu}$

   und

   $A(BC) = (g_{\kappa\nu}) \in K^{(k\times n)}$ mit

   $g_{\kappa\nu} = \sum_{\lambda=1}^l a_{\kappa\lambda}f_{\lambda\nu} =$

   $\sum_{\lambda=1}^l a_{\kappa\lambda} \left(\sum_{\mu=1}^m b_{\lambda\mu}c_{\mu\nu}\right) =$

   $\sum_{\lambda=1}^l \sum_{\mu=1}^m a_{\kappa\lambda}b_{\lambda\mu}c_{\mu\nu}$.

   Die Koeffizienten der beiden Matrizenprodukte sind also Summen der gleichen Summanden und stimmen überein.

   Nicht kommutativ, Beweis durch ein Gegenbeispiel, etwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Distributivgesetze: entsprechende Rechnung.

3. Assoziativität bzgl. der Multiplikation mit Skalaren: elementare Rechnung.

4. Transposition eines Matrizenprodukts: elementare Rechnung.

4.2 Vektorräume und lineare Gleichungssysteme

4.2.1 Vektorräume

Definition 4.2.1.1 *Sei K ein Körper mit dem Nullelement* 0 *und dem Einselement* 1.
*Ein K-***Vektorraum** *(kurz: VR) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ (kurz meist nur V geschrieben) wie folgt:*

1. *$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe; es ist also V eine Menge $\neq \emptyset$ und $+ : V \times V \longrightarrow V$ eine Verknüpfung auf V; die Elemente von V heißen* **Vektoren**.

   Das neutrale Element in V bzgl. $+$ wird ebenfalls mit 0 *bezeichnet und heißt* **Nullvektor**.

   $+$ heißt **Vektoraddition**.

2. *$\cdot : K \times V \longrightarrow V$ ist eine Abbildung (***Multiplikation mit Skalaren***).*

3. *Es gilt:*

   (a) *$\forall \alpha, \beta \in K, v \in V$ $[\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v]$ (Assoziativgesetz für $\cdot$).*

   (b) *$\forall \alpha, \beta \in K, v, w \in V$*

      i. *$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$*

      ii. *$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$*

      (Distributivgesetze)

   (c) *$\forall v \in V$ $[1v = v]$ (Unitarität)*

Beispiel 4.2.1.2 1. *K Körper $\Longrightarrow (K, +, \cdot)$ K-VR.*

2. *K Körper, $m, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow K_n, K^m, K^{m\times n}$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren) sind K-VR.*

3. $a < b \in I\!R \Longrightarrow \mathcal{C}([a,b]) := \{f : [a,b] \longrightarrow I\!R \ : \ f \text{ stetig } \}$ *ist* $I\!R$*-VR.*

   Analog VRe der differenzierbaren Funktionen auf offenen Intervallen oder der integrierbaren Funktionen auf einem Intervall.

4.2.2 Lineare Abbildungen

Definition 4.2.2.1 *Seien* V, W K*-Vektorräume,* $f : V \longrightarrow W$ *Abbildung.*
f K**-linear** *(kurz: linear) oder Vektorraumhomomorphismus* $:\Longleftrightarrow$
$\forall \alpha, \beta \in K, v, w \in V \ [f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)]$

Satz 4.2.2.2 *Sei* K *ein Körper. Seien* $m, n \geq 1$ *natürliche Zahlen und* $A = (aij) \in K^{m \times n}$*. Die Abbildung*

$$\begin{array}{rrcl} \hat{A}: & K^n & \longrightarrow & K^m \\ & x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

ist linear.

Beweis: Folgt aus 4.1.4.2

Beispiel 4.2.2.3 *Beispiele linearer Abbildungen sind:*

1. *Die Nullabbildung* $\forall x \in V \ [f(x) = 0]$.

   Diese Abbildung kann im Fall $V = K^m$ *auch als Produkt mit der Nullmatrix geschrieben werden.*

2. *Die identische Abbildung. Im Fall* $V = K^m$ *Produkt mit der Einheitsmatrix* E_m*.*

3. *Streckung* $\hat{\alpha} : V \longrightarrow V,\ v \longmapsto \alpha v$ *(mit* $\alpha \in K$*).*

   Im Fall $V = K^m$*Produkt mit* αE_m*.*

4. *Die Projektionsabbildungen* $\pi_i : K^n \longrightarrow K,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1.$

   Produkt mit ${}^t e_i$*.*

5. *Die Auswertungsabbildungen* $Abb(M, V) \longrightarrow V,\ f \longmapsto f(a)$ *(mit* $a \in M$*).*

6. *Ableitung differenzierbarer Funktionen, Bildung des Integrals.*

Satz 4.2.2.4

1. *Die Komposition von zwei linearen Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung.*

2. *Wird die lineare Abbildung* $f : K^k \to K^m$ *durch die Matrix* $A \in K^{k \times m}$ *gegeben, die lineare Abbildung* $g : K^m \to K^n$ *durch die Matrix* $B \in K^{m \times n}$*, so wird die Komposition* $g \circ f : K^k \to K^n$ *gegeben durch die Matrix* $BA \in K^{k \times n}$*.*

4.2.3 Untervektorräume, Kern und Bild

Definition 4.2.3.1 *V VR, $U \subset V$, $U \neq \emptyset$.*
U **Untervektorraum** $:\Longleftrightarrow$

1. $\forall v, w \in U \ [v + w \in U]$
2. $\forall \alpha \in K, v \in U \ [\alpha v \in U]$

Bemerkung 4.2.3.2 *$U \subset V$ UVR $\Longrightarrow U$ ist Vektorraum.*
Satz 4.2.3.3 *$f : V \to W$ lineare Abbildung $\Longrightarrow$*

1. $\mathbf{Ke}f := f^{-1}(0) \subset V$ *Untervektorraum.*
2. $\mathbf{Im}f := f(V) \subset W$ *Untervektorraum.*

Beispiel 4.2.3.4 *1.*

$$\begin{array}{rccl} f: & K^2 & \longrightarrow & K^2 \\ & x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) $\mathbf{Ke}f = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \mid x_1 = 0\}$

(b) $\mathbf{Im}f = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \mid x_1 = x_2\}$

2. *Ist $A \in K^{m \times n}$, so ist $\mathbf{Ke}\hat{A} \subset K^n$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.*

4.2.4 Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Definition 4.2.4.1 *K Körper, V K-VR. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Der Vektor $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ heißt eine* **Linearkombination** *(L.K.) der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, die α_i die Koeffizienten in dieser Linearkombination.*
Beispiel 4.2.4.2 *1. Linearkombinationen von Vektoren e_i im $\mathbb{R}^n$.*

2. *Verschiedene Fälle von Linearkombinationen von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.*

Definition 4.2.4.3 *K Körper, V K-VR.*

1. *Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.*

   $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle :=$ *Menge der LK der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$*

2. *Analog für eine Teilmenge $M \subset V$:*

   $\langle M \rangle = span(M) := \{v \in V : \exists n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K, v_1, \ldots, v_n \in M \ [v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n]\}$

Bemerkungen und Beispiele 4.2.4.4 *1. Im Fall* $M = \{a\}$ *ist* $\langle M \rangle = Ka = \{\alpha a \ : \ \alpha \in K\}$.

2. $M = \{e_1, \dots, e_n\} \in K^n \Longrightarrow \langle M \rangle = K^n$.

3. $M \subset V \Longrightarrow \langle M \rangle$ *ist ein UVR von* V.

Definition 4.2.4.5 $M \subset V$ *Teilmenge.* M **Erzeugendensystem** *von* V $:\Longleftrightarrow \langle M \rangle = V$

Definition 4.2.4.6 K *Körper,* V K*-VR.*

1. $\forall v_1, \dots, v_n \in V$ $[v_1, \dots, v_n$ **linear unabhängig** *(kurz: l.u.)* $:\Longleftrightarrow$

   $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ $[\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0]]$

2. $\forall M \subset V$ $[M$ *l.u.* $:\Longleftrightarrow$

   $\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1} \forall_{v_1, \dots, v_n \in M}$ *pw. verschieden* $v_1, \dots, v_n$ *l.u.*

   (d.h., je endlich viele Vektoren aus M *sind l.u.)*

3. $\forall M \subset V$ $[M$ **linear abhängig** *(l.a.)* $:\Longleftrightarrow$ M *nicht l.u.]*

Bemerkung 4.2.4.7 *1.* $v_1, \dots, v_n$ *l.u.* $\Longrightarrow$ *Der Nullvektor läßt sich nur auf genau eine Weise (alle Koeffizienten* $= 0$*) als LK von* $v_1, \dots, v_n$ *darstellen.*

2. *Seien* $v_1, \dots, v_n \in K^m$ *und* $A \in K^{m \times n}$ *die Matrix mit den Spaltenvektoren* $v_1, \dots, v_n$*. Dann gilt:*

   $v_1, \dots, v_n$ *l.u.* $\Longleftrightarrow$ *Das homogene lineare Gleichungssystem* $Ax = 0$ *besitzt nur die triviale Lösung* $x = 0$.

3. *Sind unter den Vektoren* $v_1, \dots, v_n$ *zwei gleich oder ist der Nullvektor einer dieser Vektoren, so sind* $v_1, \dots, v_n$ *l.a.*

4. *Zwei Vektoren* v_1, v_2 *sind l.a.* $\Longleftrightarrow$ v_2 *ist Vielfaches von* v_1 *oder* v_1 *ist Vielfaches von* v_2 *(gleichgerichtete Vektoren). Lin. Unabh. von zwei Vektoren bedeutet also: verschiedene Richtung.*

5. $\forall v_1, \dots, v_n \in V$ $[v_1, \dots, v_n$ *l.a.* $\Longleftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$

   (a) $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ $[\alpha_i \neq 0]$

   (b) $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0]$

6. $M \subset V$ *l.u.,* $M' \subset M \Longrightarrow M'$ *l.u.*

4.2.5 Basis, Dimension

Definition 4.2.5.1 *K Körper, V K-VR.*

1. $\forall B \subset V$ [*B* **Basis** *(von V)* $:\Longleftrightarrow$
   (a) *B l.u.*
   (b) $\langle B \rangle = V$ *(B Erzeugendensystem, Erzeugendenmenge)]*
2. $\dim V := \begin{cases} n & \text{Es gibt eine Basis von } V \text{ mit } n \text{ Elementen} \\ \infty & V \text{ besitzt keine endliche Basis} \end{cases}$
   heißt Dimension von V.

Bemerkungen und Beispiele 4.2.5.2

1. *Es wird gezeigt werden: Hat eine Basis die Länge n, dann jede. Die Dimension ist also wohldefiniert.*
2. *$e_1, \ldots, e_n$ Basis von K^n (sog. kanonische Basis). Also $\dim K^n = n$.*
3. *Einen VR oder UVR kann man nicht explizit angeben derart, daß man z.B. alle Elemente aufzählt, jedenfalls dann nicht, wenn der Körper ∞ viele Elemente hat. Die vollständige Angabe eines endlichdimensionalen VRs bzw. UVRs ist stattdessen möglich durch die Angabe einer Basis.*
4. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von $V \Longleftrightarrow$ Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.*
5. *$v_1, \ldots, v_n$ Basis von $V \Longleftrightarrow$*
   (a) *$v_1, \ldots, v_n$ Erzeugendensystem von V.*
   (b) *$\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}} v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem von V.*

   D.h.: Eine Basis ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h., daß jede echte Teilmenge einer Menge von Basisvektoren kein Erzeugendensystem mehr ist.

   Beweis:

   (a) *"$\Longrightarrow$" Sei $v_1, \ldots, v_n$ Basis von V und $i \in \{1, \ldots, n\}$.*
   Annahme, $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ Erzeugendensystem von V. Dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in K$ mit
   $v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n$.
   Daraus folgt:
   $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_1 + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n = 0$.
   Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $v_1, \ldots, v_n$.

   (b) *„$\Longleftarrow$"*
   Sei $v_1, \ldots, v_n$ Erzeugendensystem von V, und $\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ sei $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem von V.
   Zu zeigen: $v_1, \ldots, v_n$ l.u.

Annahme, $v_1, \ldots, v_n$ *l.a.*
Dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$*, die nicht alle* 0 *sind, mit* $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$.
Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ *mit* $\alpha_i \neq 0$*. Dann gilt:*
$v_i = \frac{1}{\alpha_i}(-\alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \ldots - \alpha_n v_n)$.
Daraus folgt, daß bereits $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ *Erzeugendensystem von* V *ist, im Widerspruch zur Annahme.*

6. *(sog. Basisauswahlsatz) Ist* V *ein Vektorraum, und bilden* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *ein Erzeugendensystem von* V*, so kann man unter den Vektoren* $v_1, \ldots, v_n$ *eine Basis von* V *auswählen.*

   Beweis:

   (a) *Ist* $v_1, \ldots, v_n$ *bereits eine Basis, so ist nichts zu zeigen. Fertig.*
   (b) *Andernfalls ist* $v_1, \ldots, v_n$ *kein minimales Erzeugendensystem, also kann man einen der Vektor weglassen und erhält weiterhin ein Erzeugendensystem. Zurück zu 6a.*

   Somit hat man nach endlich vielen Schritte eine Basis ausgewählt.

7. $v_1, \ldots, v_n$ *Basis von* $V \iff$

   (a) $v_1, \ldots, v_n$ *l.u.*
   (b) $\forall_{v \in V} v_1, \ldots, v_n, v$ *l.a.*

   D.h.: Eine Basis ist eine maximale Menge von l.u. Vektoren, d.h., eine, die nicht als solche vergrößert werden kann.

   Beweis:

   (a) „$\Longrightarrow$“
   Es ist zu zeigen: $\forall_{v \in V} v_1, \ldots, v_n, v$ *l.a.*
   Sei $v \in V$*. Wegen* $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ *gibt es* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ *mit* $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$*. Daraus folgt*
   $(-1)v + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$*, also sind diese* $n+1$ *Vektoren l.a.*
   (b) „$\Longleftarrow$“
   Es ist zu zeigen: $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
   Sei $v \in V$*. Dann sind* $v_1, \ldots, v_n, v$ *l.a., also gibt es* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha \in K$*, die nicht alle* 0 *sind, mit* $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha v = 0$.
   In disem Fall muß gelten: $\alpha \neq 0$*. Denn aus* $\alpha = 0$ *würde folgen:* $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$*, also, da* $v_1, \ldots, v_n$ *l.u.:* $\forall_i\ \alpha_i = 0$*, ein Widerspruch.*
   Damit ist $v = \frac{1}{\alpha}(-\alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_n v_n)$*, also* $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Satz 4.2.5.3 (Steinitzscher Austauschsatz für endlich-dimensionale Vektorräume)
K Körper, V K-VR, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis.
$v_1, \ldots, v_k \in V$ *l.u.* $\Longrightarrow$

1. *$k \leq n$*
2. *Man kann die Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ so numerieren, daß auch $\{v_1, \dots, v_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis ist.*

Beweis: Vollständige Induktion nach k.

1. $k = 0$: Nichts zu zeigen.
2. Sei $k \in \mathbb{N}$ und die Behauptung vorausgesetzt für l.u. Mengen von k Elementen.

   Seien $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$ l.u.

   (a) Dann sind auch $v_1, \dots, v_k$ l.u. $\Longrightarrow$ (nach Induktionsvoraussetzung) $k \leq n$

   (b) Es wird gezeigt, daß sogar $k < n$ gilt.
   Annahme $k = n \Longrightarrow$ (nach Induktionsvoraussetzung)
   $v_1, \dots, v_k$ Basis von $V \Longrightarrow$
   $v_{k+1} \in \langle\{v_1, \dots, v_k\}\rangle \Longrightarrow$
   $v_1, \dots, v_{k+1}$ nicht l.u.

   (c) Nach Induktionsvoraussetzung gilt bei geeigneter Numerierung der b_i:
   $\{v_1, \dots, v_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ Basis. $\Longrightarrow$
   $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \;\; v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i b_i$.
   Da $v_1, \dots, v_{k+1}$ l.u. sind, muß mindestens einer der Koeffizienten $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ von Null verschieden sein (sonst wäre v_{k+1} eine L.K. von $v_1, \dots, v_k$)
   Nach evtl. Umnumerierung der $b_{k+1}, \dots, b_n$ kann man annehmen: $\alpha_{k+1} \neq 0$

   (d) $\{v_1, \dots, v_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n\}$ l.u.
   Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i v_i + \sum_{i=k+2}^{n} \lambda_i b_i = 0. \Longrightarrow$
   $0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n} \lambda_i b_i =$
   $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \lambda_{k+1}(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i b_i) + \sum_{i=k+2}^{n} \lambda_i b_i =$
   $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i + \lambda_{k+1}\alpha_i) v_i + \lambda_{k+1}\alpha_{k+1} b_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n}(\lambda_{k+1}\alpha_i + \lambda_i) b_i$
   Da $\{v_1, \dots, v_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ Basis, also l.u. ist, verschwinden alle Koeffizienten, insbesondere gilt
   $\lambda_{k+1}\alpha_{k+1} = 0 \Longrightarrow$ wegen $\alpha_{k+1} \neq 0$
   $\lambda_{k+1} = 0$
   Damit folgt $\forall i = 1, \dots, n \; [\lambda_i = 0]$.

   (e) $\langle\{v_1, \dots, v_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n\}\rangle = V$.
   Sei $v \in V$.
   $\{v_1, \dots, v_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ Basis $\Longrightarrow$

$\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in K\ [v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i b_i]$.
Wegen $b_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}(v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=k+2}^{n} \alpha_i b_i)$
folgt $b_{k+1} \in \langle\{v_1, \ldots, v_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n\}\rangle \Longrightarrow$
$v \in \langle\{v_1, \ldots, v_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n\}\rangle$.

Korollar 4.2.5.4 *V VR; in V gebe es eine endliche Basis B der Länge n.*

1. *Jede Basis von V ist endlich.*
2. *Jede Basis von V hat n Elemente.*
3. *Sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ l.u., so gibt es Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_n \in B$, so daß $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist (sog. Basisergänzungssatz)).*

Beweis:

1. B_1 Basis von $V \Longrightarrow B_1$ l.u. $\Longrightarrow$ (nach 4.2.5.3) $|B_1| \leq n$.
2. B_1 Basis von V, $k := |B_1|$. Dann $k \leq n$ (voriger Punkt).

   Durch Vertauschen der Rollen von B und B_1 erhält man: $n \leq k$.

Bemerkung 4.2.5.5 *Sei V ein endlich-dimensionaler VR , $U \subset V$ UVR. Dann:*

1. *U ist endlich erzeugt, d.h.: Es gibt endlich viele Vektoren $u_1, \ldots, u_m \in U$ mit $U = \langle u_1, \ldots, u_m\rangle$.*

   Beweis: Annahme, U wäre nicht endlich erzeugt. Sind dann $m \in \mathbb{N}$ und l.u. Vaktoren $u_1, \ldots, u_m \in U$ gegeben, so gilt $\langle u_1, \ldots, u_m\rangle \subsetneq U$. Es gibt daher ein $u_{m+1} \in U \setminus \langle u_1, \ldots, u_m\rangle$; insbesondere sind $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}$ l.u.

   Auf diese Weise kann man — unter der Annahme, U ist nicht endlich erzeugt — eine unendliche Menge von l.u. Vektoren in $U \subset V$ konstruieren. Dies steht im Widerspruch zum Steinitzschen Austauschsatz.

2. $\dim U \leq \dim V$
3. $\dim U = \dim V \Longleftrightarrow U = V$

Beispiel 4.2.5.6 *Basis des Lösungsraums eines homogenen linearen Gleichungssystems.*
Sei A eine $m \times n$-Stufenmatrix von Rang r; das Pivot-Element in der μ-ten Zeile sei $a_{\mu\nu_\mu}$, $\mu = 1, \ldots, r$. Sei $\Phi : K^{n-r} \to L(A)$ die Parametrisierungsabbildung für die Lösungsmenge $L(A)$.
Behauptung: Eine Basis von $L(A)$ ist gegeben durch $l_1, \ldots, l_{n-r}$ mit $l_i := \Phi(e_i)$.

Die vollständige Begründung wäre jetzt etwas aufwendig. Es ist klar, daß die l_i Lösungen sind und daher $\langle l_1, \ldots, l_{n-r}\rangle \subset L(A)$ gilt. Zu zeigen bleibt:

1. *Diese letzte Inklusion ist tatsächlich eine Gleichheit von Mengen.*
2. *Die l_i sind l.u.*

Der Beweis benutzt Aussagen für lineare Abbildungen aus dem nächsten Abschnitt.

4.2.6 Isomorphismen, Lösungsraum homogener linearer Gleichungssysteme mit Stufenmatrix, Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

Definition 4.2.6.1 *Es seien K ein Körper, V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. f heißt*

1. *Monomorphismus* $:\Longleftrightarrow \mathbf{Ke} f = 0$
2. *Epimorphismus* $:\Longleftrightarrow \mathbf{Im} f = W$
3. *Isomorphismus* $:\Longleftrightarrow$ *f Monomorphismus und Epimorphismus,*

Bemerkung 4.2.6.2 *Bezeichnungen wie oben.*

1. *f Monomorphismus $\Longleftrightarrow$ f injektiv.*

   Beweis:

   (a) „$\Longrightarrow$“
   Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Zu zeigen: $x = y$.
   Beweis: $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0 \Longrightarrow x - y \in \mathbf{Ke} f \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow x = y$.

   (b) „$\Longleftarrow$“
   Klar.

2. *Ein Epimorphismus f wird auch eine surjektive Abbildung oder „Abbildung auf“ genannt.*

3. *f Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ f besitzt eine lineare Umkehrabbildung $g : W \to V$, d.h., eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit folgenden Eigenschaften: $g \circ f = \mathrm{id}_V, f \circ g = \mathrm{id}_W$.*

   Beweis: Es ist zu zeigen: Besitzt eine lineare Abbildung $f : V \to W$ eine Umkehrabbildung $g : W \to V$, so ist g auch linear.

   Seien $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$; zu zeigen: $g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2)$.

   Sei $v_1 := g(w_1), v_2 := g(w_2)$. Dann gilt:

   $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) =$ *(da f linear)* $= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$.

   Anwendung von g liefert

   $g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = g(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2)$.

4. *$f: V \to W$ Monomorphismus, $v_1, \ldots, v_n \in V$ l.u. $\Longrightarrow f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ l.u.*

   Beweis. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit $\alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = 0$. Zu zeigen: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

   Es gilt $f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = 0$; da f injektiv ist, folgt hieraus: $(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

   Die Behauptung folgt, da $v_1, \ldots, v_n \in V$ l.u. sind.

5. *$f: V \to W$ lineare Abbildung, $v_1, \ldots, v_n \in V$ Erzeugendensystem von $V \Longrightarrow f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ Erzeugendensystem von $\mathbf{Im} f$.*

   Beweis: $w \in \mathbf{Im} f \Longrightarrow \exists_{v \in V}\ f(v) = w$.

   $v_1, \ldots, v_n \in V$ Erzeugendensystem von $V \Longrightarrow \exists_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K}\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \Longrightarrow$

   $w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) \Longrightarrow w \in \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$.

6. *$f: V \to W$ Epimorphismus, $v_1, \ldots, v_n \in V$ Erzeugendensystem von $V \Longrightarrow f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ Erzeugendensystem von W.*

   Spezialfall der vorherigen Aussage.

7. *Die vorherigen Aussagen gelten auch für ∞e l.u. Mengen bzw. Erzeugendensysteme.*

8. *$f: V \to W$ Isomorphismus $\Longrightarrow$ Das Bild einer Basis von V ist eine Basis von W, insbesondere: $\dim V = \dim W$.*

9. *Ein Monomorphismus $f: V \to W$ definiert einen Isomorphismus auf das Bild, Bezeichnung $f|V \to \mathbf{Im} f$.*

Satz 4.2.6.3 *Sei A eine $m \times n$-Stufenmatrix von Rang r. Dann gilt:*

1. *Die Parametrisierungsabbildung $\Phi: K^{n-r} \to L(A)$ ist ein Isomorphismus.*

2. *Eine Basis von $L(A)$ ist gegeben durch $l_1, \ldots, l_{n-r}$ mit $l_i := \Phi(e_i)$.*

3. *$\dim L(A) = n - r$*

Beweis:

1. (a) Φ ist nach Konstruktion linear und injektiv, also ein Monomorphismus.

(b) Zu zeigen: $\Phi : K^{n-r} \to L(A)$ ist surjektiv.

Der Beweis wird für den folgenden Spezialfall formuliert: Die Pivot-Elemente stehen alle auf der Hauptdiagonalen, d.h., in den ersten r Zeilen stehen die jeweils ersten von Null verschiedenen Elemente $a_{\mu\nu(\mu)}$ in der Hauptdiagonalen. (Es gilt also $\nu(\mu) = \mu$ für $\mu = 1, \ldots, r$).

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L(A)$. Dann ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi(\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$.

Der allgemeine Fall geht entsprechend.

2. Nach Bemerkung 8 oben sind die l_i eine Basis von $L(A)$. Insbesondere gilt:

3. $\dim L(A) = n - r$.

Satz 4.2.6.4 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen) *V, W VR, $\dim V < \infty$, $f : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung $\Longrightarrow$*
$\dim \mathbf{Im} f = \dim V - \dim \ker f$

Bei einer linearen Abbildung kann die Dimension von $\mathbf{Im} f$ also nie größer sein als $\dim V$; sie ist vielmehr um $\dim \mathbf{Ke} f$ kleiner als $\dim V$. Im Falle eines Monomorphismus oder Isomorphismus gilt $\dim Kef = 0$, also (in Übereinstimmung mit Bemerkung oben) $\dim \mathbf{Im} f = \dim V$.
Beweis: Sei $r := \dim \mathbf{Ke} f$, und sei $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von $\mathbf{Ke} f$. Dann kann man diese Basis von $\mathbf{Ke} f$ zu einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von V ergänzen.
O.E. ist $r < n$. Sei $U := \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$. Dann $\dim U = n - r$.
Es reicht zu zeigen:
Die Abbildung $g := f|U \to W$, definiert also durch $g(u) := f(u)$ für $u \in U$, ist ein Isomorphismus.

1. g Monomorphismus, also $\mathbf{Ke} g = 0$.

   Seu $u \in \mathbf{Ke} g$. Dann ist $u \in U = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$ und $f(u) = 0$, also $u \in \mathbf{Ke} f = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, also

   $u \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle \cap \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$.

   Es gibt also $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit

   $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n$. Daras folgt $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r - \alpha_{r+1} v_{r+1} - \dots - \alpha_n v_n = 0$. Da $v_1, \dots, v_n$ l.u. sind, verschwinden alle Koeffizienten α_i. Deshalb ist $u = 0$.

2. g Epimorphismus, also $\mathbf{Im} g = \mathbf{Im} f$.

   Wegen $U \subset V$ gilt $\mathbf{Im} g \subset \mathbf{Im} f$; zu zeigen ist: $\mathbf{Im} f \subset \mathbf{Im} g$.

   Sei $w \in \mathbf{Im} f$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Da $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ist, gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n$.

   Wegen $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in \mathbf{Ke} f$ folgt

   $f(u) = f(\alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \mathbf{Im} g$.

Beispiel 4.2.6.5 *Sei A eine $m \times n$-Stufenmatrix mit r von Null verschiedenen Zeilen und $\hat{A} : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$.*
Dann gilt nach 4.2.6.3: $\dim L(A) = n - r$. Daraus folgt: $\dim \mathbf{Im} \hat{A} = r$. Im nächsten Abschnitt wird man diese Aussage verallgemeinern und besser verstehen.

4.2.7 Der Rang einer Matrix

Definition 4.2.7.1 *Sei K ein Körper, und sei $A \in K^{m \times n}$ eine $m \times n$-Matrix. Seien $a_i := (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in K_n$, $i = 1, \dots, m$ die Zeilenvektoren von A und*

$$a^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m, \ j = 1, \dots, n \text{ die Spaltenvektoren von } A.$$

1. *$Z(A) := \langle a_1, \ldots, a_m \rangle \subset K_n$ heißt der Zeilenraum von A,*

   $\mathrm{ZRg}(A) := \dim Z(A)$ *heißt Zeilenrang von A.*

2. *$S(A) := \langle a^1, \ldots, a^n \rangle$ heißt der Spaltenraum von A,*

   $\mathrm{SRg}(A) := \dim S(A)$ *heißt Spaltenrang von A.*

Bemerkung 4.2.7.2 *1. Elementare Zeilenumformungen ändern den Zeilenraum nicht, also auch nicht den Zeilenrang.*

2. *Ist A eine Stufenmatrix mit r vonb Null verschiedenen Zeilen, so gilt* $\mathrm{ZRg}(A) = r$.

3. *Für $i = 1, \ldots, n$ gilt $Ae_i = a^i$.*

4. *Für die lineare Abbildung $\hat{A} : K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax$ gilt:*

$$S(A) = \mathbf{Im}\ \hat{A}$$

Beweis: Sei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m$. *Dann:*

$y \in \mathbf{Im}\hat{A} \Longleftrightarrow$

$\exists_{x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n} \quad y = Ax.$

Setzt man hier ein: $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, so wird die letzte Gleichung

$y = A(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1Ae_1 + \ldots + x_nAe_n = x_1a^1 + \ldots + x_na^n.$
Damit:

$y \in \mathbf{Im}\hat{A} \Longleftrightarrow$

$\exists_{x_1,\ldots,x_n \in K}\ y = x_1a^1 + \ldots + x_na^n \Longleftrightarrow y \in \langle a^1, \ldots, a^n \rangle = S(A).$
Es folgt:

5. $\mathrm{SRg}(A) = \dim \mathbf{Im}\ \hat{A}$.

Satz 4.2.7.3 *Für jede Matrix A gilt* $\mathrm{ZRg}(A) = \mathrm{SRg}(A)$
Beweis:
Sei $A \in K^{m \times n}$.

1. Nach der letzten Bemerkung gilt $\mathrm{SRg}(A) = \dim \mathbf{Im}\ \hat{A}$.

2. Sei andererseits $\bar{A}$ eine Stufenmatrix, die aus A durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht. Dann gilt:

   (a) $L(A) = L(\bar{A})$.

   (b) $\mathrm{ZRg}(A) = \mathrm{ZRg}(\bar{A}))$.

Nach Satz 4.2.6.3 folgt: $\dim L(A) = n - \mathrm{ZRg}(A)$.

Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ergibt sich andererseits:

$\dim L(A) = n - \dim \mathbf{Im}\ \hat{A} = n - \mathrm{SRg}(A)$.

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt die Behauptung.

Definition 4.2.7.4 *Für eine Matrix A sei* $\mathrm{Rg}(A) := \mathrm{ZRg}(A) = \mathrm{SRg}(A)$. *(Rang von A)*

4.2.8 Elementarmatrizen

Definition 4.2.8.1 *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die folgenden Matrizen in $K^{n\times n}$ heißen n-reihige* **Elementarmatrizen***:*

1. *Typ I:*

$$S_i(\lambda) := (\delta_{\mu\nu} + \delta_{i\mu}\delta_{i\nu}(\lambda - 1))_{\mu,\nu=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   ($i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda \in K \setminus \{0\}$).

   Quadratische Matrix wie die Einheitsmatrix E, jedoch in der i-ten Zeile und Spalte λ statt 1.

2. *Typ II:*

$$Q_i^j := (\delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu i}\delta_{\nu j})_{\mu,\nu=1,\ldots,n} = \ldots$$

   ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$).

   Quadratische Matrix wie die Einheitsmatrix E, jedoch in der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine zusätzliche 1.

3. *Typ III:*

$$Q_i^j(\lambda) := (\delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu i}\delta_{\nu j}\lambda)_{\mu,\nu=1,\ldots,n} = \ldots$$

   ($i, j \in \{1, \ldots, n\}, \lambda \in K \setminus \{0\}$).

   Wie Typ II, jedoch in der i-ten Zeile und j-ten Spalte $\lambda \neq 0$.

4. *Typ IV:*

$$P_i^j := (\delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu i}\delta_{\nu j} + \delta_{\mu j}\delta_{\nu i} - \delta_{\mu i}\delta_{\nu i} - \delta_{\mu j}\delta_{\nu j})_{\mu,\nu=1,\ldots,n} = \ldots$$

   ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$).
   Quadratische Matrix wie die Einheitsmatrix E, jedoch in der i-ten Zeile die 1 nicht in der Hauptdiagonalen, sondern in der j-ten Spalte, in der j-ten Zeile die 1 nicht in der Hauptdiagonalen, sondern in der i-ten Spalte.

Die folgende Aussage ist unmittelbar einzusehen:
Satz 4.2.8.2 *Ist $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix und $S \in K^{m\times m}$ eine m-reihige Elementarmatrix, so ist SA die Matrix, die aus aus A durch folgende elementare Zeilenumformung entsteht:*

1. *Typ I, $S = S_i(\lambda)$: Multiplikation der i-ten Zeile mit λ.*
2. *Typ II, $S = Q_i^j$: Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.*
3. *Typ III, $S = Q_i^j(\lambda)$: Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.*
4. *Typ III, $S = P_i^j$: Vertauschung der i-ten und der j-ten Zeile.*

Elementare Spaltenumformungen sind analog zu elementaren Zeilenumformungen definiert. Es gilt entsprechend:
Satz 4.2.8.3 *Ist $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix und $T \in K^{n\times n}$ eine n-reihige Elementarmatrix, so ist AT die Matrix, die aus aus A durch folgende elementare Spaltenumformung entsteht:*

1. *Typ I, $T = S_i(\lambda)$: Multiplikation der i-ten Spalte mit λ.*
2. *Typ II, $T = Q_i^j$: Addition der j-ten Spalte zur i-ten Spalte.*
3. *Typ III, $T = Q_i^j(\lambda)$: Addition des λ-fachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte.*
4. *Typ III, $T = P_i^j$: Vertauschung der i-ten und der j-ten Spalte.*

Korollar 4.2.8.4
1. *Multiplikation einer Matrix mit einer Elementarmatrix von links läßt den Zeilenrang invariant.*
2. *Multiplikation einer Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts läßt den Spaltenrang invariant.*

4.2.9 Die inverse Matrix

Definition 4.2.9.1 *Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar oder regulär, wenn es eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ gibt mit $AB = BA = E$; dabei sei $E = E_n = (\delta_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ die n-reihige Einheitsmatrix.*

Bemerkung 4.2.9.2 *Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar und sind $B, C \in K^{n\times n}$ Matrizen mit $AB = BA = E$ und $AC = CA = E$, so gilt: $B = C$.*

Beweis: $B = (CA)B = C(AB) = C$.

Definition 4.2.9.3 *Sei $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Die nach vorheriger Bemerkung eindeutig bestimmte Matrix B mit $AB = BA = E$ heißt die zu A inverse Matrix, Bezeichnung: $B = A^{-1}$.*

Bemerkung 4.2.9.4 .

1. *$A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\iff \hat{A} : K^n \to K^n,\ x \mapsto Ax$ ist ein Isomorphismus.*
2. *Die inverse Matrix ist wieder invertierbar, und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.*
3. *Für zwei n-reihige invertierbare Matrizen A, B gilt: AB ist invertierbar, und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
4. *Elementarmatrizen sind invertierbar, und es gilt:*
   (a) $(S_i(\lambda))^{-1} = S_i(\frac{1}{\lambda})$
   (b) $(Q_i^j)^{-1} = Q_i^j(-1)$
   (c) $(Q_i^j(\lambda))^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$
   (d) $(P_i^j)^{-1} = P_i^j$

Satz 4.2.9.5 1. *Jede Matrix kann durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf folgende Normalform gebracht werden:*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

2. *Zu jeder Matrix $A \in K^{(m,n)}$ gibt es invertierbare Matrizen $S \in K^{(m,m)}$ und $T \in K^{(n,n)}$, so daß gilt*

$$SAT^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

Beweis:

1. A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen mit $b_{\mu\nu_\mu} = 1$ für $\mu < r$.
2. Spaltenvertauschungen, so daß $\nu_\mu = \mu$ wird.

3. Durch elementare Spaltenumformungen wird erreicht: $b_{\mu\nu} = 0$ für ($\mu > r$ und) $\nu > \mu$.

4. S und T seien die Produkte der Elementarmatrizen, die zu den elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen des ersten Schrittes gehören.

Beispiel 4.2.9.6

Zweiter Beweis für Satz 4.2.7.3: Sei $A \in K^{(m,n)}$, und sei $B = SAT^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die zu A nach dem vorherigen Satz zugeordnete Matrix.
Die Behauptung ist offensichtlich für B. Da der Zeilenrang bei elementaren Zeilenumformungen und der Spaltenrang bei elementaren Spaltenumformungen konstant bleibt, gilt auch offensichtlich:

1. $\mathrm{SRg}(AT^{-1}) = \mathrm{SRg}(A)$

2. $\mathrm{ZRg}(SA) = \mathrm{ZRg}(A)$

Das reicht aber nicht, es ist vielmehr zu zeigen:

1. $\mathrm{SRg}(SAT^{-1}) = \mathrm{SRg}(B) = \mathrm{SRg}(A)$

2. $\mathrm{ZRg}(SAT^{-1}) = \mathrm{ZRg}(B) = \mathrm{ZRg}(A)$

Beweis:

1. Betrachte das kommutative Diagramm aus linearen Abbildungen

$$\begin{array}{cccccc} & K^n & \xrightarrow{\hat{A}} & K^m & \\ \hat{T} & \downarrow & & \downarrow & \hat{S} \\ & K^n & \xrightarrow{\hat{B}} & K^m & \end{array}$$

   Die senkrechten Abbildungen sind Isomorphismen, daher gilt $\dim \mathrm{Im}\hat{A} = \dim \mathrm{Im}\hat{B}$ und damit die erste Behauptung.

2. Wegen

   $\mathrm{ZRg}(B) = \mathrm{SRg}({}^tB) = \mathrm{SRg}^t(SAT^{-1}) = \mathrm{SRg}({}^tT^{-1t}A^tS) =$ (nach dem ersten Teil des Beweises)

   $= \mathrm{SRg}({}^tA) = \mathrm{ZRg}(A)$.

Die folgende Aussage ist zwar einfach, aber wichtig:
Satz 4.2.9.7 *1. Für quadratische $n \times n-$ Matrizen $A \in K^{(n,n)}$ gilt: A invertierbar $\Longleftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = n$.*

2. Jede invertierbare Matrix ist endliches Produkt von Elementarmatrizen.

Der Beweis ergibt sich aus dem folgenden Algorithmus, mit dem gleichzeitig $\mathrm{Rg}(A)$ bestimmt und — im Fall $\mathrm{Rg}(A) = n$ — die inverse Matrix A^{-1} bestimmt werden kann.

1. A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen; dabei ergibt sich auch $r = \mathrm{Rg}(A)$.

2. Im Fall $\mathrm{Rg}(A) = n$ ist A eine Dreiecksmatrix, und man kann A durch weitere elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n überführen

3. Die gleichen elementaren Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix E anwenden (sinnvollerweise simultan zu den Umformungen von A) liefert die inverse Matrix A^{-1}.

Denn: Die Ausführung der elementaren Umformungen ist äquivalent einer Multiplikation mit Elementarmatrizen $S_1, \dots, S_k$. Im Fall $\mathrm{Rg}(A) = n$ ergibt sich also: $S_k S_{k-1} \dots S_1 A = E_n$.
Sei $B := S_k S_{k-1} \dots S_1$.
Dann ist B als Produkt von Elementarmatrizen (die alle invertierbar sind) invertierbar; ferner gilt $BA = E$.
Es wird behauptet: $B = A^{-1}$.
Da $BA = E$ bereits gezeigt ist, ist hierzu noch zu zeigen: $AB = E$. Das sieht man wie folgt:
$AB = EAB = (B^{-1}B)AB = B^{-1}(BA)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$
Beispiel 4.2.9.8

4.2.10 Affine Unterräume und inhomogene lineare Gleichungssysteme

Definition 4.2.10.1 *Sei V ein K-VR.*

1. *Eine Teilmenge $X \subset V$ heißt* **affiner Unterraum** *von V, wenn $X = \emptyset$ ist oder wenn es einen UVR $U \subset V$ und einen Vektor $v \in V$ gibt mit $X = v + U = \{v + u \ : \ u \in U\}$.*

2. *Ist $X = v + U$ ein affiner Unterraum von V, so heißt $\dim V := \dim U$ die* **Dimension** *von V.*

3. $\dim \emptyset := -\infty$.

Bemerkung 4.2.10.2 *1. $X = v + U$ affiner Unterraum $\Longrightarrow U = \{x - x' \ : \ x, x' \in X\}$*

2. *Aus der letzten Bemerkung folgt: Der UVR U ist durch den affinen Unterraum X eindeutig bestimmt. Insbesondere ist die Dimension eines affinen Unterraums wohldefiniert.*

3. *$X = v + U$ affiner Unterraum, $v' \in X \Longrightarrow X = v' + U$.*

Definition 4.2.10.3 *Es seien K ein Körper, $m, n \in I\!N$ und $A \in K^{m \times n}, x \in K^n, b \in K^m$.*

1. *Die Gleichung*

$$Ax = b$$

   heißt **inhomogenes Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A und rechter Seite b für die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$** .

2. $L(A, b) := \{x \in K^n \ : \ Ax = b\}$ *heißt* **Lösungsmenge** *des Gleichungssystems $Ax = b$.*

3. *Die Matrix $(A, b) = \ldots \in K^{m \times (n+1)}$ heißt* **erweiterte Koeffizientenmatrix** *des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.*

Satz 4.2.10.4 *Seien $A \in K^{m \times n}, b \in K^m$.*

1. *$L(A, b)$ ist ein affiner Unterraum von K^n.*

2. $L(A, b) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A, b)$.

3. $L(A, b) \neq \emptyset \Longrightarrow \dim L(A, b) = n - \mathrm{Rg}(A)$.

Beweis:

1. Ist $L(A, b) \neq \emptyset$ und $y \in L(A, b)$ (*partikuläre oder spezielle Lösung*), so gilt

   $\forall x \in K^n$ [$Ax = b \Longleftrightarrow A(x - y) = Ax - Ay = 0 \Longleftrightarrow$

   $x - y \in L(A)$, d.h., $x - y$ Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$].

   Es folgt: $L(A, b) = y + L(A)$.

   ($L(A, b)$ *allgemeine Lösung* von $Ax = b$.)

2. Seien $a^1, \ldots, a^n \in K^m$ die Spaltenvektoren von A. Dann gilt

   $\forall \nu \in \{1, \ldots, n\}$ $[a^\nu = Ae_\nu = \hat{A}(e_\nu)]$

   und damit

   $\mathrm{Im}(\hat{A}) = \langle a^1, \ldots, a^n \rangle$.

   Ebenso gilt:

   $\mathrm{Im}(\widehat{(A, b)}) = \langle a^1, \ldots, a^n, b \rangle$.

   Es ist also:

   $L(A, b) \neq \emptyset \Longleftrightarrow$

   $b \in \mathrm{Im}(\hat{A}) \Longleftrightarrow$

   $\mathrm{Im}(\widehat{(A, b)}) = \mathrm{Im}(\hat{A}) \Longleftrightarrow$ (wegen $\mathrm{Im}(\hat{A}) \subset \mathrm{Im}(\widehat{(A, b)})$)

   $\dim \mathrm{Im}(\widehat{(A, b)}) = \dim \mathrm{Im}(\hat{A}) \Longleftrightarrow$

   $\mathrm{Rg}(A, b) = \mathrm{Rg}(A)$.

3. Sei $y \in L(A, b)$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems.

   Wegen $L(A, b) = y + L(A)$ folgt $\dim L(A, b) = \dim L(A) = n - \mathrm{Rg}(A)$

Bemerkung 4.2.10.5 *Seien $A \in K^{m\times n}, b \in K^m$.*

1. *Für jede reguläre Matrix $S \in K^{m\times m}$ gilt $L(SA, Sb) = L(A, b)$.*

   Denn $\hat{S} : K^m \to K^m$ ist ein Isomorphismus, insbesondere injektiv.

2. *Algorithmus zur Bestimmung der Lösungsmenge $L(A, b)$ (***Gaußsches Eliminationsverfahren für inhomogene lineare Gleichungssysteme***). Der Algorithmus liefert zugleich einen weiteren Beweis für Teil 2 von Satz 4.2.10.4.*

   (a) *(A, b) durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform $(\bar{A}, \bar{b})$ bringen. Nach Bemerkung oben gilt: $L(A, b) = L(\bar{A}, \bar{b})$.*
   Sei $r := \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(\bar{A})$.

   (b) *Spezialfall: In den ersten r Zeilen stehen die jeweils ersten von Null verschiedenen Elemente $\bar{a}_{\mu\nu(\mu)}$ in der Hauptdiagonalen (d.h.: $\nu(\mu) = \mu$ für $\mu = 1, \ldots, r$). Man sieht unmittelbar:*

      i. $\bar{b}r + 1 \neq 0 \Longrightarrow L(\bar{A}, \bar{b}) = \emptyset$

      ii. $\bar{b}r + 1 = 0 \Longrightarrow L(\bar{A}, \bar{b}) \neq \emptyset$, *genauer:*

      $$\forall \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n-r} \exists_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in K^r \ [\bar{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \bar{b}_m \end{pmatrix}].$$

      Zur Berechnung der $x_1, \ldots, x_r$ werden die vorgegebenen Werte von $x_{r+1}, \ldots, x_n$ in die ersten r Gleichungen von $\hat{\bar{A}}x = \bar{b}$ eingesetzt und dann nacheinander die Werte von x_r, x_{r-1} bis x_1 berechnet.

   (c) *Der allgemeine Fall (nicht notwendig $\nu(\mu) = \mu$) kann wieder durch Umnumerierung der Variablen (d.h., durch Spalternvertauschungen der Koeffizientenmatrix) auf den Spezialfall zurückgeführt werden. Nach der Lösung muß die ursprüngliche Numerierung wieder hergestellt werden.*

   (d) *Einfacher ist es wiederum, den allgemeinen Fall in direkter Entsprechung zum Spezialfall zu behandeln. Gibt man die Werte der x_j mit $j \neq \nu(\mu), \mu \in \{1, \ldots, r\}$ vor — also ebenfalls einen $(n-r)$-Vektor, kann man nacheinander $x_{\nu(r)}, x_{\nu(r-1)}, \ldots, x_{\nu(1)}$ berechnen, indem man die ersten r Zeilen von hinten her abarbeitet.*

   (e) *Man erhält eine bijektive* **Parametrisierungsabbildung** $\Phi : K^{n-r} \longrightarrow L(A, b)$.

   (f) *Zur Angabe der allgemeinen Lösung $L(A, b)$ bestimmt man nach obigem Algorithmus eine spezielle Lösung y und die allgemeine*

Lösung $L(A)$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems, d.h., eine Basis $l_1, \ldots, l_{n-r}$ von $L(A)$ (ein sog. **Fundamentalsystem** *von Lösungen der homogenen linearen Gleichung).*
Es ist dann $L(A, b) = y + L(A) = y + \langle l_1, \ldots, l_{n-r} \rangle$.

3. *Man sagt, das Gleichungssystem $Ax = b$ heißt* **universell lösbar**, *wenn es lösbar ist bei beliebiger Wahl von $b \in K^m$.*

   Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt: $\mathrm{Im}(\hat{A}) = K^m$, *d.h.,* $\mathrm{Rg}(A) = m$.

4. *Das Gleichungssystem $Ax = b$ heißt* **eindeutig lösbar**, *wenn gilt:* $\dim L(A, b) = 0$.

   Eine notwendige und hinreichende Bedingung ist: $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A, b) = n$.

Beispiel 4.2.10.6 ...

4.2.11 Die einer linearen Abbildung zugeordnete Matrix

Lemma 4.2.11.1 (Prinzip der linearen Fortsetzung) *Es seien V und W K-Vektorräume und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.*
Zu vorgegebenen Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i, i = 1, \ldots, n$.
Kurz: Ist $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so läßt sich jede Abbildung $\mathcal{V} \to W$ eindeutig zu einer linearen Abbildung $V \to W$ fortsetzen.
Beweis: ÜA 29.
Seien $w_1, \ldots, w_n \in W$ gegeben.

1. Existenz einer linearen Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i, i = 1, \ldots, n$:

   (a) Definition der Abbildung
   Sei $v \in V$; es ist $f(v) \in W$ anzugeben.
   v hat eine Darstellung $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n \in K$. Setze $f(v) := x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n$.

   (b) Linearität der so definierten Abbildung f:
   Sind $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ und $v' = x'_1 v_1 + \ldots + x'_n v_n$ sowie $\alpha, \alpha' \in K$, so gilt
   $f(\alpha v + \alpha' v') =$
   $f((\alpha x_1 + \alpha' x'_1) v_1 + \ldots + (\alpha x_n + \alpha' x'_n) v_n) =$
   $(\alpha x_1 + \alpha' x'_1) w_1 + \ldots + (\alpha x_n + \alpha' x'_n) w_n =$
   $\alpha f(v) + \alpha' f(v')$

2. f ist eindeutig bestimmt:

   Seien $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen mit $f(v_i) = w_i, i = 1, \ldots, n$, $g(v_i) = w_i, i = 1, \ldots, n$.

   Dann gilt für $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \in V$:

   $f(v) = f(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n = g(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = g(v)$.

Bemerkungen und Beispiele 4.2.11.2 *1. Sei V ein K-Vektorraum und $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\kappa_{\mathcal{V}} : K^n \longrightarrow V$ mit $\kappa_{\mathcal{V}}(e_i) = v_1, i = 1, \ldots, n$, nämlich*

$$\begin{array}{cccc} \kappa_{\mathcal{V}} : & K^n & \longrightarrow & V \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i v_i \end{array}$$

2. Seien $m, n \in I\!N$ und $f : K^n \longrightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine Matrix $A \in K^{(m,n)}$ mit $f = \hat{A}$.

Beweis: Ist $f : K^n \longrightarrow K^m$ gegeben, so sei $A \in K^{(m,n)}$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $a^i = f(e_i), i = 1, \ldots, n$. Die Aussage folgt dann aus 4.2.11.1.

3. Drehmatrix: Bei Drehung der Ebene $I\!R^2$ um den Nullpunkt um den Winkel φ gehen die kanonischen Basisvektoren e_1, e_2 über in die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \text{und} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die Drehung wird also bzgl. der kanonischen Basis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Satz 4.2.11.3 *1. Es seien*

(a) V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V,

(b) W ein m-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von w,

(c) $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

Dann gibt es genau eine $m \times n$-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, *so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{f} & W & \\ \kappa_{\mathcal{V}} & \uparrow & & \uparrow & \kappa_{\mathcal{W}} \\ & K^n & \xrightarrow{\hat{A}} & K^m & \end{array}$$

Die Matrix A heißt die der linearen Abbildung f bei Wahl der Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ **zugeordnete Matrix**, *Bezeichnung: $A = \mathcal{M}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(f)$.*

2. *Der Komposition von linearen Abbildungen entspricht das Produkt der zugeordneten Matrizen.*

3. *Im Fall $m = n$ gilt: Ist f ein Isomorphismus, so ist die zugeordnete Matrix regulär und der Umkehrabbildung ist die inverse Matrix zugeordnet.*

Beweis:
Anwendung der Bemerkung oben auf die lineare Abbildung $\kappa_{\mathcal{W}}^{-1} \circ f \circ \kappa_{\mathcal{V}}$

Bemerkung 4.2.11.4 *Die Spaltenvektoren von A sind also die den Bildern $f(v_i)$ bzgl. der Basis $\mathcal{W}$ zugeordneten Spalten, d.h.:*
Für $\nu = 1, \dots, n$: $f(v_\nu)) = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu} w_\mu$.
Dies folgt aus $\hat{A}(e_\nu) = Ae_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu} e_\mu$.

4.2.12 Basiswechsel (Koordinatentransformationen)

Der folgende Spezialfall einer zugeordneten Matrix ist von besonderem Interesse:

Definition 4.2.12.1 *Sei V ein n-dimensionaler K-VR, und seien $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basen von V. Die Matrix*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} := \mathcal{M}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)$$

heißt die zum **Basiswechsel** *$\mathcal{V}$ zu $\mathcal{W}$ gehörige* **Transformationsmatrix**.

Bemerkungen und Beispiele 4.2.12.2 1. *Die Transformationsmatrix ist also durch folgendes kommutatives Diagramm definiert:*

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{id_V} & V & \\ \kappa_{\mathcal{V}} & \uparrow & & \uparrow & \kappa_{\mathcal{W}} \\ & K^n & \xrightarrow{\hat{\mathcal{T}}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}} & K^m & \end{array}$$

2. *Die Spaltenvektoren von $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ enthalten die Koeffizienten bei der Darstellung der Basisvektoren v_i bzgl. der neuen Basis.*

3. *$V = K^n$, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basen. Dann ist $\kappa_{\mathcal{V}}$ bzgl. der kanonischen Basis durch eine Matrix A gegeben, die die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Spaltenvektoren hat, und $\kappa_{\mathcal{W}}$ ist durch eine Matrix W mit den Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ als Spaltenvektoren gegeben.*

   Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ ist dann $B^{-1}A$.

   Denn das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & K^n & \xrightarrow{id} & K^n & \\ \kappa_{\mathcal{V}} & \uparrow & & \uparrow & \kappa_{\mathcal{W}} \\ & K^n & \xrightarrow{\hat{\mathcal{T}}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}} & K^m & \end{array}$$

   ist

$$\begin{array}{ccccc} & K^n & \xrightarrow{id} & K^n & \\ \hat{A} & \uparrow & & \uparrow & \hat{B} \\ & K^n & \xrightarrow{\hat{\mathcal{T}}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}} & K^m & \end{array}$$

   Daraus liest man ab: $B\mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = A$; daraus folgt die Behauptung.

4. *Ist $V = K^n$ und speziell $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die kanonische Basis, $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine weitere Basis. Dann ist $\kappa_{\mathcal{E}}$ die identische Abbildung, während $\kappa_{\mathcal{W}}$ durch eine Matrix B gegeben ist, die die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ als Spaltenvektoren hat.*

   Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{E}}$ ist dann die zu B inverse Matrix B^{-1}.

5. *Es gilt stets $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = (\mathcal{T}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}})^{-1}$*

6. *Wie hatten bereits die Matrix einer Drehung im $\mathbb{R}^2$ bestimmt; in entsprechender Weise erhält man die Matrix für eine Drehung im $\mathbb{R}^3$, wenn die Drehachse eine Achse des kanonischen Koordinatensystems ist. Z.B. wird eine Drehung um die x_3-Achse, also um die durch den Vektor e_3 aufgespannte Gerade, durch folgende Matrix beschrieben:*

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Zur Berechnung der Matrix einer Drehung um eine beliebige Achse empfiehlt es sich, zunächst eine Koordinatentransformation vorzunehmen:

7. *Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um den Winkel φ um die durch den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^3$ gegebene Gerade (Winkelhalbierende der x_2, x_3-Ebene).*

Wir wollen die Matrix $B = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *von* f *bzgl. der kanonischen Basis* $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *berechnen.*

Eine für die Behandlung dieser Abbildungsaufgabe geeignete Basis $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ *erhält man, wenn man die kanonische Basis* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *um die* x_1-*Achse um den Winkel* $\pi/4 = 45°$ *dreht; man erhält die Basisvektoren*

$$w_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Sei B *die Matrix mit den Spaltenvektoren* w_1, w_2 *und* w_3*, also*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix des Basiswechsels ist dann

$$\mathcal{T}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{E}} = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Da die Matrix B *in diesem Fall eine Drehmatrix ist, erhält man die inverse Matrix* B^{-1} *in einfacher Weise als die Drehmatrix zum Drehwinkel* $-\pi/4 = -45°$ *um die* x_1-*Achse.*

In Bezug auf diese neue Basis $\mathcal{W}$ *haben wir nun eine Drehung um die durch* w_2 *bestimmte Achse; bzgl. dieser Basis wird die Drehung um den Winkel* φ *daher durch die Matrix*

$$N = \mathcal{M}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Um die die Drehung beschreibende Matrix $M = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *bzgl. der kanonischen Basis* $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *zu erhalten, muß zuerst die Transformationsmatrix für den Basiswechsel, also die Matrix* B^{-1} *angewandt* *werden, dann die Drehmatrix N und schließlich wieder die Transformationsmatrix des umgekehrten Basiswechsels, also die Matrix B.*

Insgesamt ergibt sich als Drehmatrix bzgl. der kanonischen Basis:

$$M = BNB^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 1/2\sqrt{2}\sin(\varphi) & -1/2\sqrt{2}\sin(\varphi) \\ -1/2\sqrt{2}\sin(\varphi) & 1/2+1/2\cos(\varphi) & 1/2-1/2\cos(\varphi) \\ 1/2\sqrt{2}\sin(\varphi) & 1/2-1/2\cos(\varphi) & 1/2+1/2\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

(Berechnung der Matrizenmultiplikation mit Maple.)

Man kann dies auch so ausdrücken:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \mathcal{T}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{E}} \mathcal{M}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}}(f) \mathcal{T}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{W}}$$

Der folgende Satz verallgemeinert die Situation des letzten Beispiels:
Satz 4.2.12.3 *Es seien*
Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ Basen von V.
Sei ferner $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\mathcal{M}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}}(f) = \mathcal{T}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \mathcal{M}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f) \mathcal{T}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$$

Beweis: aus dem entsprechenden Diagramm liest man ab: $\mathcal{M}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}}(f)\mathcal{T}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = \mathcal{T}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}\mathcal{M}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f)$.
Daraus folgt $\mathcal{M}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}}(f) = \mathcal{T}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}\mathcal{M}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f)(\mathcal{T}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}})^{-1} = \mathcal{T}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}\mathcal{M}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f)\mathcal{T}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$

Allgemeiner gilt:
Satz 4.2.12.4 *Es seien*
Es seien

— *V ein n-dimensionaler, W ein m-dimensionaler K-Vektorraum,*

— *$\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathcal{V}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ Basen von V,*

— *$\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ und $\mathcal{W}' = \{w'_1, \ldots, w'_m\}$ Basen von W.*

Sei ferner $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\mathcal{M}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{W}'}(f) = \mathcal{T}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}'} \mathcal{M}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(f) \mathcal{T}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}}$$

4.2.13 Ähnliche und äquivalente Matrizen

Definition 4.2.13.1 *Zwei Matrizen $A, B \in K^{(m.n)}$ heißen*

1. **äquivalent**, *wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{(m,m)}$ und $T \in K^{(n,n)}$ gibt mit $B = SAT^{-1}$.*

2. **ähnlich**, *wenn $m = n$ gilt und wenn es eine invertierbare Matriz $S \in K^{(n,n)}$ gibt mit $B = SAS^{-1}$.*

Bemerkung 4.2.13.2 *1. Zwei Matrizen A und B sind äquivalent genau dann, wenn sie bei geigneten Koordinatentransformationen im K^m bzw. K^n die gleiche lineare Abbildung erzeugen.*

Dies ergibt sich aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{cccccc} & K^n & \xrightarrow{\hat{A}} & K^m & \\ \hat{T} & \downarrow & & \downarrow & \hat{S} \; , \\ & K^n & \xrightarrow{\hat{B}} & K^m & \end{array}$$

Vgl. auch die letzten Sätze 4.2.12.3, 4.2.12.4 des vorigen Abschnitts.

2. $\mathrm{Rg}(A) = r \Longrightarrow A$ *äquivalent zu Normalform*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dots$$

3. A, B *äquivalent* $\Longleftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$.

4. A, B *ähnlich* $\Longleftrightarrow B$ *geht aus A durch Anwendung derselben Koordinatentransformation im Urbild- und im Bildraum hervor.*

5. *Eine der wichtigsten Fragestellungen der linearen Algebra ist es, eine Problemstellung durch geeignete Basistransformationen zu vereinfachen (Eigenwerttheorie, Hauptachsentransformation, Jordansche Normalform).*

   Einige solche Fragestellungen werden später in dieser Vorlesung behandelt.

Kapitel 5

Determinanten und Eigenwerttheorie

5.1 Determinanten

5.1.1 Permutationen

Definition 5.1.1.1 *Sei $n > 0$ eine natürliche Zahl. $S_n :=$ Menge der bijektiven Abbildungen $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Die Elemente von S_n heißen* **Permutationen** *der Elemente von $\{1, \ldots, n\}$.*

Bemerkung 5.1.1.2

1. *Ist M eine beliebige endliche Menge, so wird die Menge $Aut(M)$ der bijektiven Abbildungen von M auf sich ebenfalls als Menge der Permutationen bezeichnet.*

2. *Sei M eine beliebige endliche Menge und $f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow M$ eine bijektive Abbildung. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} S_n & \longrightarrow & Aut(M) \\ \sigma & \longmapsto & f \circ \sigma \circ f^{-1} \end{array}$$

bijektiv.

3. *Tabellenschreibweise von Permutationen:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

4. *Zyklenschreibweise von Permutationen:*

$$(1 \quad \sigma(1) \quad \sigma \circ \sigma(1) \quad \ldots)$$

Z.B. gilt für $n = 5$:

$$(123)(45) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Satz 5.1.1.3 *Sei $n > 0$. S_n hat $n!$ Elemente. Kurz: $\#(S_n) = n!$.*
Beweis: Induktion nach n.

1. $n = 1$: $\mathrm{id}_{\{1\}} : \{1\} \longrightarrow \{1\}$ ist die einzige Abbildung; sie ist bijektiv.

2. Sei $n > 0$, und sei vorausgesetzt: $\#(S_n) = n!$. Für eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, \ldots, n+1\} \longrightarrow \{1, \ldots, n+1\}$$

gibt es für das Bild von $n + 1$ die $n + 1$ Möglichkeiten $1, 2, \ldots, n + 1$. Gilt $\sigma(n + 1) = j \in \{1, \ldots, n + 1\}$, so ist

$$\sigma|\{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{j\}$$

eine bijektive Abbildung zwischen zwei $n-$elementigen Mengen; dafür gibt es nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Möglichkeiten.

Daraus folgt: $\#(S_{n+1}) = (n + 1)n! = (n + 1)!$.

$\square$
Bemerkung 5.1.1.4 *S_n ist (mit der Komposition als Verknüpfung) eine Gruppe; sie heißt die* **symmetrische Gruppe**.

5.1.2 Das Signum einer Permutation

Definition 5.1.2.1 *Sei $n \in I\!N$.*
Eine Permutation $\tau \in S_n$ heißt **Transposition**, *wenn gilt:*
$\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ [

1. $\tau(i) \neq i$

2. $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, \tau(i)\}$ $[\tau(j) = j]]$

Bemerkung 5.1.2.2 1. *In Zyklenschreibweise schreibt sich eine Transposition als (ij).*

2. $i \neq j \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow \exists \sigma \in S_n$ $[(ij) = \sigma(12)\sigma^{-1}$

Beweis: Im Fall $n = 2$ gilt $(ij) = (12)$, und man kann $\sigma = (1)$ wählen.

Ist $n > 2$ und $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$, so folgt die Behauptung mit $\sigma := (1i)(2j)$.

Satz 5.1.2.3 *Sei $n \in I\!N, n \geq 2$. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist Produkt (d.h. Komposition) von endlich vielen Transpositionen.*
Beweis: Sei $\sigma \in S_n$.

1. $\sigma = (1) \Longrightarrow \sigma = (12)(12)$.

2. Sei $\sigma \neq (1)$, und sei $i := \min\{j \in \{1, \dots, n\} \ : \ \sigma(j) \neq j\}$; dann gilt $\sigma(i) > i$.

   Für $\sigma_1 := (i\sigma(i))\sigma$ gilt dann: $\min\{j \in \{1, \dots, n\} \ : \ \sigma_1(j) \neq j\} > i$;

   Definiert man in entsprechender Weise $\sigma_2 := (j\sigma(j))(i\sigma(i))\sigma$ und fährt so fort, muß das Verfahren abbrechen, also die identische Abbildung ergeben. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung 5.1.2.4 *Reihenfolge und Anzahl der Transpositionen sind nicht eindeutig bestimmt.*
Definition 5.1.2.5 *Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $\sigma \in S_n$.*

$$\mathrm{sign}(\sigma) := \varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} := \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{i-1} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

heißt **Signum, Signatur** *oder* **Vorzeichen** *von σ.*
Bemerkung 5.1.2.6 *1. Nach Definition ist $\varepsilon(\sigma) \in \mathbb{Q}$.*

2. Es wird gezeigt, daß das Signum nur die Werte $+1$ und -1 annehmen kann (also insbesondere ganzzahlig ist).

3. $\varepsilon((1)) = 1$ (Klar)

4. $\varepsilon((12)) = -1$

Beweis: Sei $\sigma := (12)$.

$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} =$

$\frac{2-1}{1-2}$ *(Faktor mit $i = 1, j = 2$)*

$\prod_{j>2} \frac{2-j}{1-j}$ *(Faktoren mit $i = 1, j > 2$)*

$\prod_{j>2} \frac{1-j}{2-j}$ *(Faktoren mit $i = 2, j > 2$)*

$\prod_{j>i>2} \frac{i-j}{i-j}$

Das letzte Produkt hat den Wert 1, der erste Faktor den Wert -1, das zweite und das dritte Produkt haben zusammen den Wert 1.

Satz 5.1.2.7 *Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $\sigma, \tau \in S_n$. Dann gilt: $\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$.*
Beweis: Es ist
$\varepsilon(\tau\sigma) =$
$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau\sigma(i)-\tau\sigma(j)}{i-j} =$
$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau\sigma(i)-\tau\sigma(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$
Der zweite Faktor in diesem Produkt ist $\varepsilon(\sigma)$; der erste Faktor ist gleich
$\prod_{1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) < \sigma(j)} \frac{\tau\sigma(i)-\tau\sigma(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)} \prod_{1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)} \frac{\tau\sigma(i)-\tau\sigma(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)} =$
und damit (nach Umbenennung von i und j im zweiten Faktor:
$\prod_{1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) < \sigma(j)} \frac{\tau\sigma(i)-\tau\sigma(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)} \prod_{1 \leq j < i \leq n, \sigma(j) > \sigma(i)} \frac{\tau\sigma(i)-\tau\sigma(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)} =$
$\prod_{1 \leq i, j \leq n, \sigma(i) < \sigma(j)} \frac{\tau\sigma(i)-\tau\sigma(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)} =$
$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} =$
$\varepsilon(\tau)$

Korollar 5.1.2.8 *Sei $n \in I\!N, n \geq 2$ und $\sigma \in S_n$. Dann gilt:*

1. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)^{-1}$

   Beweis: $\varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}\sigma) = \varepsilon((1)) = 1$

2. σ *Transposition* $\Longrightarrow \varepsilon(\sigma) = -1$

   Beweis. Sei $\sigma = (ij)$ Transposition. Nach Bemerkung oben gibt es eine Permutation $\tau \in S_n$ mit $(ij) = \tau(12)\tau^{-1}$. Daraus folgt:

   $\varepsilon((ij)) = \varepsilon(\tau(12)\tau^{-1}) = \ldots = -1$

3. $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

   Beweis: Sind $\tau_1, \ldots, \tau_k$ Transpositionen mit $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k$, so folgt: $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1) \ldots \varepsilon(\tau_k)$

5.1.3 Determinanten

In diesem Abschnitt wird folgende Bezeichnung verwendet: Für eine $(n \times n)$-Matrix $A \in K^{(n,n)}$ seien $a_1, \ldots, a_n \in K^{(1,n)}$ die Zeilenvektoren von A. Ist also $A = (a_{\mu\nu})$, so sei für $\mu = 1, \ldots, n$ $a_\mu := (a_{\mu 1}, \ldots, a_{\mu n})$ und somit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Definition 5.1.3.1 (Determinante) *Eine Abbildung* $\det : K^{(n,n)} \to K$ *heißt* **Determinante**, *wenn gilt:*

1. det *hängt linear von jedem der Zeilenvektoren ab, d.h., ist $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^{(n,n)}$, $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ und ist $a_\mu = \beta b_\mu + \gamma c_\mu$ mit Zeilenvektoren $b_\mu, c_\mu \in K^{(1,n)}$ und Körperelementen $\beta, \gamma \in K$, so ist*

$$\det(A) = \beta \det(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_\mu \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) + \gamma \det(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c_\mu \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})$$

   Man sagt auch, det *ist eine n-**lineare** Abbildung in den Zeilenvektoren von A.*

2. det *ist eine* **alternierende** *Abbildung in den Zeilenvektoren von A, d.h.: Besitzt A zwei gleiche Zeilen $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \mu_1 \neq \mu_2$, so ist* $\det(A) = 0$.

3. **Normierung:** $\det(E_n) = 1$

Schreibweise: Statt $\det(A)$ wird auch $\det A$ oder $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$ geschrieben.

Bemerkung 5.1.3.2 (Eigenschaften von Determinanten) *Sei* $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^{(n,n)}$

1. *Ist eine Zeile* a_i *der Nullvektor, gilt* $\det A = 0$

   Folgerung aus der Linearität der Abbildung $\det$ *an der* i*-ten Stelle.*

2. *Entsteht* $\bar{A}$ *aus* A *durch eine elementare Zeilentransformation vom Typ I, d.h., Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor* $\lambda \in K, \lambda \neq 0$*, so gilt* $\det\bar{A} = \lambda \det A$.

   Beweis: Folgt aus der n*-Linearität von* $\det$.

3. $\forall \lambda \in K \ [\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

   Beweis: n*-malige Anwendung der vorherigen Bemerkung.*

4. *Entsteht* $\bar{A}$ *aus* A *durch eine elementare Zeilentransformation vom Typ IV, d.h. Vertauschung von zwei Zeilen, so gilt* $\det\bar{A} = -\det A$.

   Beweis: Seien $\mu_1 < \mu_2 \in \{1, \dots, n\}$ *und* $\bar{A} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$*. Dann gilt:*

   $\det A + \det(\bar{A}) =$

   $$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_{\mu_1}+a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_{\mu_1}+a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_1}+a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_{\mu_1}+a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

5. *Gilt* $1+1 \neq 0$ *in* K *(d.h.:* $\mathrm{char}(K) \neq 2$*), so ist die in der Definition angegebene Eigenschaft „alternierend" äquivalent zu der Eigenschaft in der letzten Bemerkung.*

   Beweis: Es sei vorausgesetzt:

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^{(n,n)}\ \forall \mu_1 < \mu_2 \in \{1,\dots,n\}\ [\det(A) = -\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}))].$$

   Es gelte nun für $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$*:* $a_{\mu_1} = a_{\mu_2}$ *für zwei Zeilenindices* $\mu_1 < \mu_2$*. Dann folgt*

$$0 = \det A + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \\ \vdots \\ a_{\mu_1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

   $\det A + \det A =$

   $(1+1)\det A$

und daraus $\det A = 0$.

6. *Entsteht* $\bar{A}$ *aus* A *durch eine elementare Zeilentransformation vom Typ II oder III, d.h., Addition des* λ*-fachen der* j*-ten Zeile zur* i*-ten Zeile (* $\lambda \in K, \lambda \neq 0$*), so gilt* $\det\bar{A} = \det A$.

   Beweis: $\det\bar{A} =$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

   $\det A$

7. *Ist* $A = (a_{\mu\nu})$ *eine obere Dreiecksmatrix, so folgt:* $\det A = a_{11} \dots a_{nn}$*; entsprechend für untere Dreiecksmatrizen.*

   Beweis:

   (a) *Sind alle Hauptdiagonalelemente* $\neq 0$*, folgt:*
   A kann durch elementare Zeilenumformungen vom Typ III in eine Diagonalmatrix $\bar{A}$ *übergeführt werden, wobei die Elemente in der Hauptdiagonalen ungeändert bleiben; nach der vorherigen Bemerkung gilt*
   $\det A = \det\bar{A} = a_{11} \dots a_{nn} \det E_n = a_{11} \dots a_{nn}$.

   (b) *Sind nicht alle Hauptdiagonalelemente* $\neq 0$*, so sei i der größte Index mit* $a_{ii} = 0$*; es gelte also* $a_{i+1,i+1}, \dots, a_{nn} \neq 0$.
   A kann dann durch elementare Zeilenumformungen vom Typ III in eine Matrix $\bar{A}$ *mit i-tem Zeilenvektor* $a_i = 0$ *übergeführt werden; es folgt:*
   $\det A = \det\bar{A} = 0$

8. $\det A = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Rg} A < n$

   Beweis: A kann durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform $\bar{A}$ *gebracht werden; dann gilt* $\det\bar{A} = \pm\det A$*. Die Behauptung folgt nun aus der vorherigen Bemerkung.*

9. *Ist A von der Gestalt* $\begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ *mit quadratischen Matrizen A_1, A_2, so gilt*

   $\det A = \det A_1 \det A_2$.

   Analog für Matrizen der Form $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$

   Beweis: A_2 kann durch elementare Zeilenumformungen von A, die die Matrizen A_1 und C ungeändert lassen, in Zeilenstufenform $\bar{A}_2$ überführt werden; es sei k_2 die Anzahl der dabei auftretenden Zeilenvertauschungen.

   Ebenso kann A_1 durch elementare Zeilenumformungen von A, die A_2 ungeändert lassen, in Zeilenstufenform $\bar{A}_1$ überführt werden; aus C wird dabei $\bar{C}$. Es sei k_1 die Anzahl der jetzt auftretenden Zeilenvertauschungen.

   Für die Matrix $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & \bar{C} \\ 0 & \bar{A}_2 \end{pmatrix}$ *folgt die Behauptung aus der vorvorigen Bemerkung; andererseits gilt:*

   $\det \bar{A} = (-1)^{k_1+k_2} \det A$,

   $\det \bar{A}_i = (-1)^{k_i} \det A_i, i = 1, 2,$

   woraus die Behauptung für A folgt.

10. **Determinantenmultiplikationssatz:** *Ist auch $B \in K^{(n,n)}$, so folgt:*

    $\det(AB) = \det A \ \det B$.

    Beweis: Ist $\mathrm{Rg} A < n$, *also* $\dim \mathrm{Im} \hat{A} < n$, *so folgt nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen:* $\mathrm{Rg}(AB) = \dim \mathrm{Im} \hat{A}\hat{B} \leq \dim \mathrm{Im} \hat{A} < n$ *und damit die Behauptung.*

    Ist $\mathrm{Rg} A = n$, *also $A \in GL(n, K)$, so ist $A = S_1 \dots S_k$ mit Elementarmatrizen $S_1, \dots, S_k \in K^{(n.n)}$.*

    Damit (d.h.: vollständige Induktion nach k) ist zu zeigen: Ist A eine Elementarmatrix und $B \in K^{(n,n)}$, so folgt: $\det(AB) = \det A \det B$.

    Zum Beweis dieser Behauptung betrachtet man die einzelnen Fälle, und zwar müssen nur die Fälle Typ I und Typ II betrachtet werden, da die Typen III und IV auf diese Fälle zurückgeführt werden können.

    (a) *Typ I:* $A = S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. *Dann*

    $\det A = \lambda$

    $\det(AB) = \det \bar{B}$,

wobei $\bar{B}$ *die Matrix ist, die aus* B *hervorgeht, wenn man die* i*-te Zeile von* B *mit* λ *multipliziert. Es gilt also*

$\det\bar{B} = \lambda\det B.$

Daraus folgt die Behauptung.

(b) *Typ II:* $A = Q_i^j := (\delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu i}\delta_{\nu j})_{\mu,\nu=1,\dots,n}$

Da dies eine Dreiecksmatrix ist, in der jedes Hauptdiagonalelement 1 *ist, gilt* $\det A = 1$.

Andererseits ist $\det(AB) = \det\bar{B}$,

wobei $\bar{B}$ *die Matrix ist, die aus* B *hervorgeht, wenn man die* j*-te Zeile von* B *zur* i*-ten Zeile addiert; es gilt also*

$\det\bar{B} = \det B.$

11. $A \in GL(n, K) \Longrightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Beweis: $1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$.

12. $\sigma \in S_n \Longrightarrow \det \begin{pmatrix} {}^te_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ {}^te_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma)$.

Beweis: Klar, denn ist σ *Produkt von* k *Transpositionen, kann die Matrix durch die entsprechenden* k *Zeilenvertauschungen in die Einheitsmatrix überführt werden; bei jeder Zeilenvertauschung ändert sich das Vorzeichen.*

Man kann auch so argumentieren: $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ *die Darstellung von* σ *als Produkt von Transpositionen, so ist* $\begin{pmatrix} {}^te_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ {}^te_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ *Produkt der den Transpositionen zugeordneten Elementarmatrizen* $P^i_{\tau(i)}, i = 1, \dots, k$. *Die Behauptung folgt dann aus dem Determinantenmultiplikationssatz.*

13. **Leibniz-Formel:** $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{(n,n)} \Longrightarrow$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Beweis: Nutzt man die Linearität von det *nacheinander für die 1. Zeile* a_1, *die 2. Zeile* a_2 *usw. bis zur* n*-ten Zeile* a_n *aus, folgt man aus* $a_i = \sum_{\nu_i=1}^n a_{i\nu_i}\, {}^te_{\nu_i}$ $(i = 1, \dots, n)$:

$\det A =$

$\sum_{\nu_1=1}^n a_{1\nu_1} \det \begin{pmatrix} {}^te_{\nu_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$

$$\sum_{\nu_1=1}^n a_{1\nu_1} \sum_{\nu_2=1}^n a_{2\nu_2} \det \begin{pmatrix} {}^t e_{\nu_1} \\ {}^t e_{\nu_2} \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \det \begin{pmatrix} {}^t e_{\nu_1} \\ {}^t e_{\nu_2} \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \ldots =$$

$$\sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n \ldots \sum_{\nu_n=1}^n a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \ldots a_{n\nu_n} \det \begin{pmatrix} {}^t e_{\nu_1} \\ \vdots \\ {}^t e_{\nu_n} \end{pmatrix}$$

In dieser Summe von n^n Summanden sind nur die Summanden von Null verschieden, bei denen die Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_n$ eine Permutation von $1, \ldots, n$ sind; bei den übrigen Summanden kommen zwei gleiche Zeilenvektoren vor, so daß die in diesem Summanden enthaltene Determinante verschwindet. Damit ist:

$\det A =$

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} {}^t e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ {}^t e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

14. *Die Determinante ist eindeutig bestimmt.*

15. *Die Determinante ist ein Polynom in den n^2 Koeffizienten der Matrix.*

    Der Totalgrad dieses Polynoms ist n; der Grad bzgl. jedes einzelnen Koeffizienten (wenn man die übrigen Koeffizienten festhält) ist 1.

    In jedem Summanden kommt aus jeder Zeile genau ein Koeffizient vor; ebenso kommt in jedem Summanden aus jeder Spalte genau eine Koeffizient vor.

16. *Ist $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, so folgt:* $\det A$ *hängt differenuzierbar, insbesondere stetig von den Koeffizienten ab.*

    (Polynome sind differenzierbare Funktionen).

17. $\det {}^t A = \det A$

    Folgt unmittelbar aus der Leibniz-Formel.

18. *Die Determinante hängt n-linear und alternierend von den Spaltenvektoren der Matrix ab.*

19. *Bei der Herleitung der Leibniz-Formel muß nicht dividiert werden. Man kann daher auf diese Weise Determinanten auch über Ringen (für Matrizen, deren Koeffizienten Elemente nicht eines Körpers, sondern eines Ringes sind) definieren.*

20. *Spezialfälle:*

    (a) $n = 2:$

    $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

    (b) $n = 3:$

    $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} = \end{pmatrix} =$$

    $$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

    $$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

    Merkregel: Regel von Sarrus ...

21. *Die Summe in der Leibniz-Formel hat $n!$ Summanden. Für die praktische Berechnung von Determinanten eignet sich die Leibniz-Formel daher nur für kleinere Werte von n, da $n!$ schnell sehr groß wird. So ist z.B.*

    10! = 3628800

    100! =
    93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915
    608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000

    $\simeq .9332621544 \cdot 10^{158}$

    1000! =
    40238726007709377354370243392300398571937486421071463254379991042993851239862902
    05920442084869694048004799886101971960586316668729948085589013238296699445909974
    24504087073759918823627727188732519779505950995276120874975462497043601418278094
    64649629105639388743788648733711918104582578364784997701247663288983595573543251
    31853239584630755574091142624174743493475534286465766116677973966688202912073791
    43853719588249808126867838374559731746136085379534524221586593201928090878297308
    43139284440328123155861103697680135730421616874760967587134831202547858932076716
    91324484262361314125087802080002616831510273418279777047846358681701643650241536
    91398281264810213092761244896359928705114964975419909342221566832572080821333186
    11681155361583654698404670897560290095053761647584772842188967964624494516076535
    34081989013854424879849599533191017233555566021394503997362807501378376153071277
    61926849034352625200015888535147331611702103968175921510907788019393178114194545
    25722386554146106289218796022383897147608850627686296714667469756291123408243920
    81601537808898939645182632436716167621791689097799119037540312746222899880051954
    44414282012187361745992642956581746628302955570299024324153181617210465832036786
    90611726015878352075151628422554026517048330422614397428693306169089796848259012
    54583271682264580665267699586526822728070757813918581788896522081643483448259932
    66043367660176999612831860788386150279465955131156552036093988180612138558600301
    43569452722420634463179746059468257310379008402443243846565724501440282188525247
    09351906209290231364932734975655139587205596542287497740114133469627154228458623

77387538230483865688976461927383814900140767310446640259899490222221765904339901
88601856652648506179970235619389701786004081188972991831102117122984590164192106
88843871218556461249607987229085192968193723886426148396573822911231250241866493
53143970137428531926649875337218940694281434118520158014123344828015051399694290
15348307764456909907315243327828826986460278986432113908350621709500259738986355
42771967428222487575867657523442202075736305694988250879689281627538488633969099
59826280956121450994871701244516461260379029309120889086942028510640182154399457
15680594187274899809425474217358240106367740459574178516082923013535808184009699
63725242305608559037006242712434169090041536901059339838357779394109700277534720
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000

$\simeq .4023872601 \cdot 10^{2568}$

Satz 5.1.3.3 *Sei K ein Körper und $n \in I\!N, n \geq 1$. Die Determinante* $\det :$ $K^{(n,n)} \to K$ *existiert.*

Beweis. Im Fall $n = 1$ sei $\det(a_{1,1}) := a_{1,1}$; dann sind offensichtlich die definierenden Eigenschaften einer Determinante erfüllt.

Sei $n > 1$. Man definiert $\det : K^{(n,n)} \to K$ durch $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$; es ist zu zeigen:

1. det hängt linear von jedem der Zeilenvektoren ab.

   Beweis: Direktes Nachrechnen!

2. det ist eine **alternierende** Abbildung in den Zeilenvektoren von A.

   Beweis: A besitze zwei gleiche Zeilen $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \mu_1 \neq \mu_2$. Sei $\tau := (\mu_1 \mu_2)$. Es sei $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$ ("gerade Permutationen"). Ist σ eine ungerade Permutation (d.h. $\varepsilon(\sigma) = -1$, so ist $\sigma \circ \tau$ gerade und $\sigma \circ \tau \circ \tau = \sigma$. Daraus folgt:

   $S_n = A_n \cup A_n \tau$ und daher

   $\det A =$

   $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} =$

   $\sum_{\sigma \in A_n} \; a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} \; a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma\circ\tau(n)}$.

   Nun gilt für jedes $\sigma \in A_n$:

   $a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdot \ldots a_{\mu_1\sigma\circ\tau(\mu_1)} \cdot \ldots a_{\mu_2\sigma\circ\tau(\mu_2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma\circ\tau(n)} =$

   $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots a_{\mu_1\sigma(\mu_2)} \cdot \ldots a_{\mu_2\sigma(\mu_1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} =$

   $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots a_{\mu_2\sigma(\mu_2)} \cdot \ldots a_{\mu_1\sigma(\mu_1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} =$

   $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$

   Daher heben sich die Summanden der letzten Summe weg, so daß die Behauptung folgt.

3. **Normierung:** $\det(E_n) = 1$

   Beweis: $\det(E_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\delta_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \delta_{n\sigma(n)}$.

   In dieser Summe ist nur der Summand mit $\sigma = (1)$ von Null verschieden.

Lemma 5.1.3.4 *Es seien*

1. *V ein n-dimensionaler K-Vektorraum,*
2. *$\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ Basen von V,*
3. *$f : V \longrightarrow V$ Endomorphismus.*

Dann gilt

$$\det(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f) = \det(M_{\tilde{\mathcal{V}}}^{\tilde{\mathcal{V}}}(f)$$

Beweis: Die Matrix $A := M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f)$ ist durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ K^n \arrow[u, "\kappa_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "\hat{A}"] & K^n \arrow[u, "\kappa_{\mathcal{V}}"'] \end{tikzcd}$$

definert, die Matrix $\tilde{A} := M_{\tilde{\mathcal{V}}}^{\tilde{\mathcal{V}}}(f)$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ K^n \arrow[u, "\kappa_{\tilde{\mathcal{V}}}"] \arrow[r, "\hat{\tilde{A}}"] & K^n \arrow[u, "\kappa_{\tilde{\mathcal{V}}}"'] \end{tikzcd}$$

Sei $B := M_{\tilde{\mathcal{V}}}^{\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{V}}}^{\mathcal{V}}$ die Transformationsmatrix zur Koordinatentransformation $\mathcal{V} \mapsto \tilde{\mathcal{V}}$, definiert durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] & V \\ K^n \arrow[u, "\kappa_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "\hat{B}"] & K^n \arrow[u, "\kappa_{\tilde{\mathcal{V}}}"'] \end{tikzcd}$$

In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, phantom, "="] & V \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, phantom, "="] & V \\ K^n \arrow[u, "\kappa_{\tilde{\mathcal{V}}}"] \arrow[r, "\widehat{B^{-1}}"] & K^n \arrow[u, "\kappa_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "\hat{A}"] & K^n \arrow[u, "\kappa_{\mathcal{V}}"'] \arrow[r, "\hat{B}"] & K^n \arrow[u, "\kappa_{\tilde{\mathcal{V}}}"'] \end{tikzcd}$$

ist dann die unterste Zeile von ganz links nach ganz rechts die Abbildung $\hat{\tilde{A}}$, d.h., es gilt:
$\tilde{A} = BAB^{-1}$.
Aus dem Determinantenmultiplikationssatz folgt die Behauptung.

Definition 5.1.3.5 *Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.*

$$\det(f) := \det(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f)$$

Bemerkung 5.1.3.6

1. *Nach dem Lemma ist* $\det(f)$ *unabhängig von der Auswahl der Basis.*

2. $\det(f)$ *hat eine einfache geometrische Bedeutung, auf die später genauer eingegangen wird, und zwar ist* $\det(f)$ *der Verzerrungsfaktor für Volumina bei Anwendung der Abbildung f, d.h.: Hat eine Teilmenge, z.B. ein Quader $Q \subset V$ das Volumen 1, so hat die Menge $f(Q)$ das Volumen* $\det(f)$.

3. *In der Analysis kommt diese letzte Bedeutung in der Integralrechnung zum Tragen, und zwar bzgl. der Funktionaldeterminante in der Transformationsformel für n-dimensionale Integrale.*

4. *Das Vorzeichen von* $\det(f)$ *bestimmt, ob die Abbildung f die Orientierung des Raumes erhält (z.B. Drehungen) oder umdreht (z.B. Spiegelungen)*

Beispiel 5.1.3.7 *Sei*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei einer 5×5-Matrix ist die Berechnung nach der Leibniz-Formel noch gut möglich; sie erfordert die Berechnung von 5! = 120 Summanden, die jeweils aus 5 Faktoren bestehen, es müssen also 5!(5-1) = 480 Multiplikationen durchgeführt werden.*
In diesem Fall hat man in jeder Zeile eine 0, so daß man mit 4!(5-1)= 96 Multiplikationen auskommt.*
Aber bereits hier ist es günstiger, die Matrix nach dem Gauß-Verfahren in Zeilenstufenform zu bringen (bei nichtverschwindender Matrix also in obere Dreiecksform). Für eine Dreiecksmatrix ist die Determinate das Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen. Für größere n ist das Verfahren nach Gauß grundsätzlich vorzuziehen. Nur bei dünn besetzten Matrizen (sparse matrices) ist die Leibniz-Formel (bzw. die daraus hergeleitete Laplace-Entwicklung) oft mehr angeraten.

Die Rechnung kann z.B. wie folgt durchgeführt werden:

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -4\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-4\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -8\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$-8\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} = 8\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$-16\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = -16\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 240$$

5.2 Eigenwerte

5.2.1 Aussagen über Polynome

Es werden hier Polynome mit Koeffizienten in einem Körper K betrachtet. Statt K kann man auch einen Ring R nehmen, z.B. $\mathbb{Z}$.

Bemerkung 5.2.1.1 *1. Die Polynome $f \in K[X]$ können in der Form $f = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu X^\nu$ geschrieben werden; die a_ν heißen die* **Koeffizienten** *von f. Man verwendet auch die Schreibweise $f(X) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu X^\nu$. Die Menge der Polynome ist ein Ring (man kann beliebig addieren, substrahieren und multiplizieren, aber i.a. nicht dividieren), und zwar ein kommuativer Ring mit Einselement.*

2. *Das Nullelement des Rings $K[X]$ ist das* **Nullpolynom**, *das mit* 0 *bezeichnet wird; es hat keine von Null verschiedenen Koeffizienten.*

3. *Ist $f(X) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu X^\nu$ und $a_n \neq 0$, heißt n der* **Grad** *von f, Bezeichnung:* $\deg f$ *oder* $\mathrm{grad} f$. *a_n heißt dann der* **höchste Koeffizient** *von f.*

4. *Als Grad des Nullpolynoms wird definiert:* $\deg 0 := -\infty$.

5. *$f, g \in K[X] \Longrightarrow \deg(fg) = \deg f + \deg g$.*

   Beweis: Betrachte das Produkt der höchsten Koeffizienten von f und g.

Satz 5.2.1.2 (Division mit Rest in Polynomringen) *Sei K ein Körper, und seien $f, g \in K[X], g \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[X]$ mit*

1. *$\deg r < \deg g$*

2. *$f = qg + r$*

Beweis:

1. Eindeutigkeit: Seien $q_1, r_1, q_2, r_2, \in K[X]$ mit $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$ und $f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$.

   Dann gilt: $0 = (q_1 - q_2)g + r_1 - r_2$

   Es reicht zu zeigen: $q_1 = q_2$.

   Aus der Annahme $(q_1 - q_2) \neq 0$ folgt dann $\deg(q_1 - q_2) \geq 0$, also (betrachte jeweils die höchsten Koeffizienten):

   $\deg(r_1 - r_2) = \deg((q_1 - q_2)g) = \deg(q_1 - q_2) + \deg g \geq \deg g$,

   also insbesondere $\deg r_1 \geq \deg g$ oder $\deg r_2 \geq \deg g$, Widerspruch.

2. Existenz: Fallunterscheidung:

   (a) $\exists q \in K[X]\ [qg = f]$.
   Setze $r := 0$, und es folgt die Behauptung.

   (b) $\forall q \in K[X]\ [qg \neq f]$.
   $M := \{\deg(f - qg) : q \in K[X]\} \subset \mathbb{N}$.
   Die Menge M ist nicht leer wegen $\deg f \in M$. Es wird nun benutzt, daß jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein minimales Element besitzt (diese einfach nachzuweisende Eigenschaft von $\mathbb{N}$ heißt auch: $\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet.)
   Sei also $m := \min M$.
   Dann gibt es ein $q \in K[X]$ mit $\deg(f - qg) = m$.
   Setze $r := f - qg$, also $\deg r = m$. Zu zeigen: $\deg r < \deg g$.
   Beweis durch Widerspruch. Annahme, $\deg r \geq \deg g$.
   Sei $g := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu X^\nu$, $r := \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu X^\mu$, wobei $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ und $m \geq n$ gilt. Dann ist
   $\deg r > \deg(r - g\frac{b_m}{a_n} X^{m-n})$ (betrachte wiederum die höchsten Koeffizienten)
   $= \deg(f - qg - g\frac{b_m}{a_n} X^{m-n})$
   $= \deg(f - (q + \frac{b_m}{a_n} X^{m-n})g)$
   $\geq m$ nach Definition von m.
   Also gilt $m = \deg r > m$, ein Widerspruch.

Bemerkungen und Beispiele 5.2.1.3 *Explizite Durchführung der Division mit Rest von Polynomen:*

Definition 5.2.1.4 *Sei K ein Körper.*

1. *Sei $f \in K[X]$. Die Abbildung $\tilde{f} : K \to K, \quad a \mapsto \tilde{f}(a) := f(a) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu a^\nu$ heißt die durch f bestimmte* **Polynomabbildung***.*

2. *$a \in K$ heißt* **Nullstelle** *von f $:\Longleftrightarrow f(a) = 0$.*

Bemerkung 5.2.1.5 *Sei K ein Körper und $f \in K[X]$.*

1. *$a \in K$ Nullstelle von f $:\Longrightarrow f$ ist Vielfaches von $X - a$, und zwar gilt $f = q \cdot (X - a)$ mit $\deg q = \deg f - 1$.*

   Beweis: Division mit Rest:

   $f = q \cdot (X - a) + r$ mit $\deg r < \deg(X - a) = 1$, also $r \in K$.

   Wegen $f(a) = 0$ und $(X - a)(a) = 0$ folgt: $r = 0$.

2. *$f \neq 0, \ \deg f = n \Longrightarrow f$ hat höchstens n Nullstellen in K.*

   Annahme, f hat Nullstellen $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Durch Division erhält man Quotienten $q_1, \ldots, q_{n+1}$ mit $\deg q_i = \deg f - i$, Widerspruch.

3. **sog. Fundamentalsatz der Algebra***:Im Fall $K = \mathbb{C}$ gilt: $f \neq 0, \ \deg f = n \Longrightarrow f$ hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.*

   Dieser Satz wurde erstmals 1799 vom damals 22-jährigen Gauß bewiesen. Im Gegensatz zu seinem Namen ist er kein Satz der Algebra, sondern gehört in die Analysis. Äquivalente Formulierungen sind:

   (a) Jedes nichtkonstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

   (b) Jedes Polynom $\in \mathbb{C}[X]$ zerfällt in Linearfaktoren.

4. *Auch in der Algebra gibt es einen Satz, der die Existenz von Nullstellen eines nichtkonstanten Polynoms sicherstellt. Man findet die Nullstelle aber i.a. nicht im Körper K selbst, sondern in einer* **Körpererweiterung** *L von K, das ist ein Körper L mit $K \subset L$.*

   Beide Beweis gehen über den Inhalt dieser Vorlesung hinaus.

5. *Über $\mathbb{R}$ gibt es nichtkonstante Polynome ohne Nullstellen, z.B. $X^2 + 1$.*

6. *Man kann zeigen: Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ von ungeradem Grad hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.*

7. *Sei $a \in K$. $\mu(f, a) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \ : \ f$ ist Vielfaches von $(X - a)^k\}$ heißt* **Vielfachheit der Nullstelle** *a von f.*

8. *Sei $a \in K$. $f(a) = 0 \Longleftrightarrow \mu(f, a) > 0$.*

5.2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.2.2.1 *Sei K ein Körper.*

1. *Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus.*

   $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** *von f, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ in V gibt mit $f(v) = \lambda v$. Der Vektor $v \in V$ heißt dann ein zum Eigenwert λ gehöriger* **Eigenvektor***.*

2. *Sei $A \in K^{(n,n)}$.*

   $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** *von A, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ in K^n gibt mit $Av = \lambda v$. Der Vektor $v \in K^n$ heißt dann ein zum Eigenwert λ gehöriger* **Eigenvektor***.*

Bemerkungen und Beispiele 5.2.2.2 1. *Ist $v \in V$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in K$, so ist auch αv Eigenvektor zu λ für jedes $\alpha \in K^*$.*

2. *Eigenvektoren sind stets $\neq 0$ vorausgesetzt (für $v = 0$ gilt $f(v) = \lambda v$ für alle $\lambda \in K$).*

   Eigenwerte können aber den Wert 0 annehmen.

3. *Ist $\dim V < \infty$, so ist $\lambda \in K$ genau dann Eigenwert eines Endomorphismus $f : V \to V$, wenn λ Eigenwert einer zu f bzgl. einer Basis $\mathcal{V} \subset V$ zugeordneten Matrix ist.*

   Beweis: Betrachte den Isomorphismus $\kappa_{\mathcal{V}} \to V$.

4. *Es seien $V = K^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $A = (\delta_{\mu\nu}\lambda_\mu)_{\mu.\nu=1,\ldots,n}$ die Diagonalmatrix mit den Elementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in der Hauptdiagonalen.*

   Dann sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von A (bzw. von $\hat{A}$), und $e_1, \ldots, e_n$ sind Eigenvektoren zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

   Die Koordinatenachsen werden also durch $\hat{A}$ jeweils auf sich abgebildet.

5. *Sei V ein K-VK, $\dim V = n$, $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus von V und $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so daß jeder Basisvektor Eigenvektor von f ist. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann wird f bzgl. dieser Basis $\mathcal{V}$ durch die Matrix $(\delta_{\mu\nu}\lambda_\mu)_{\mu.\nu=1,\ldots,n}$ dargestellt.*

   Die durch die Basisvektoren festgelegten Koordinatenachsen werden also durch f jeweils auf sich abgebildet.

   Beweis: Betrachte das die zugeordnete Matrix definierende Diagramm.

6. *Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ. Ist φ kein Vielfaches von π, wird keine Gerade auf sich abgebildet; die Matrix kann also in diesem Fall keine Eigenwerte besitzen.*

7. *Die Matrix* $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ *beschreibt eine Komposition eines Drehung des* $\mathbb{R}^2$ *um den Winkel* φ *und einer Spiegelung an der durch den Vektor* $\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$ *bestimmten Achse. Die folgenden Achsen werden auf sich abgebildet:*

   — *Die Achse durch den Vektor* $\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$.

   — *Die darauf senkrecht stehende Achse, also die Achse durch den Vektor* $\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi+\pi}{2} \\ \sin\frac{\varphi+\pi}{2} \end{pmatrix}$.

   Diese beiden Vektoren sind also Eigenvektoren; die zugehörigen Eigenwerte sind 1 *und* -1.

8. *Eigenwerte und Eigenvektoren spielen auch eine (besonders) große Rolle bei unendlichdimensionalen Vektroräumen. Z.B. hat die Abbildung* $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad f \mapsto f'$ *folgende Eigenwerte bzw. Eigenvektoren:*

Eigenwert	*Eigenvektor*
$\lambda \in \mathbb{R}$ *(beliebig)*	$ce^{\lambda x}$ $(c \in \mathbb{R}^*$ *beliebig)*

Definition 5.2.2.3 *Sei* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

1. *Sei* V *ein* K*-VR,* $\dim V = n$*. Ein Endomorphismus* $f \in \mathrm{End}(V)$ *heißt* **diagonalisierbar**, *wenn* f *bzgl. einer geeigneten Basis von* V *durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.*

2. *Eine Matrix* $A \in K^{(n,n)}$ *heißt* **diagonalisierbar**, *wenn* A *ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h.:* $\exists S \in GL(n, K)$ $[SAS^{-1}$ *Diagonalmatrix* $]$

Bemerkung 5.2.2.4 1. f *diagonalisierbar* $\iff$ *die (bzgl. einer festen Basis) zugeordnete Matrix ist diagonalisierbar.*

2. f *diagonalisierbar* $\iff$ V *besitzt eine Basis, die nur aus Eigenvektoren von* f *besteht.*

Lemma 5.2.2.5 *Sei* $n \in \mathbb{N}$, V *ein* n*-dimensionaler* K*-Vektorraum und* $f \in \mathrm{End}(V)$ *ein Endomorphismus.*
Es seien $m \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ *paarweise verschiedene Eigenwerte und* $v_1, \ldots, v_m$ *Eigenvektoren zu den Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.
Dann sind $v_1, \ldots, v_m$ *l.u., insbesondere gilt* $m \leq n$
Beweis: Induktion nach m:

1. $m = 1$. Dann ist $v_1 \neq 0$, also l.u.

2. Sei $m > 1$ und die Aussage für je $m-1$ pw. verschiedene Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren bewiesen.

   Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ mit $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$. Dann gilt:

   $0 = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m) =$

   $\alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_m f(v_m) =$

   $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m v_m.$

   Andererseits gilt:

   $0 = \lambda_m(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m) =$

   $\alpha_1 \lambda_m v_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m v_m.$

   Daraus folgt:

   $0 = (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m v_m) - (\alpha_1 \lambda_m v_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m v_m) =$

   $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m.$

   Nach Induktionsvoraussetzung sind $v_1, \ldots, v_{m-1}$ l.u.; daraus folgt:

   $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0$

   $\vdots$

   $\alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$

   und daraus, da die EW pw. verschieden sind, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$ und somit, da auch $\alpha_m v_m = 0$, wegen $v_m \neq 0$ somit $\alpha_m = 0$.

Korollar 5.2.2.6 *Sei $n \in I\!N$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus.*
Voraussetzung: f besitze n paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.
Dann ist f diagonalisierbar.
Der Beweis folgt aus dem Lemma und der letzten Bemerkung, da man auf die Existenz eines Basis aus Eigenvektoren von f schließen kann.

5.2.3 Das charakteristische Polynom, Diagonalisierung

Lemma 5.2.3.1 *Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus und $\lambda \in K$ Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *λ ist EW von f.*
2. $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_V) \neq 0$

Der Beweis ist klar.
Definition 5.2.3.2 *Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus und $\lambda \in K$. Der UVR*

$$\mathrm{Eig}(f;\lambda) := \ker(f - \lambda \mathrm{id}_V) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

von V heißt Eigenraum *von f bezüglich λ.*

Bemerkung 5.2.3.3 *1.* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in K \Longrightarrow \mathrm{Eig}(f;\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(f;\lambda_2) = 0$

Beweis: Wäre $v \neq 0$ *in* $\mathrm{Eig}(f;\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(f;\lambda_2)$*, so wäre* v *EV zu* λ_1 *und zu* λ_2*; zwei EV zu* λ_1 *und zu* λ_2 *müssen aber l.u. sein.*

2. *Zur Bestimmung des Eigenraums zu einem gegebenen Eigenwert* $\lambda \in K$ *muß man das homogene Gleichungssystem*

   $(A - \lambda E)x = 0$

   lösen; dabei sei A *die dem Endomorphismus* f *bei fester Wahl einer Basis zugeordnete Matrix.*

Lemma 5.2.3.4 *Sei* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Seien* V *ein* n*-dimensionaler* K*-Vektorraum,* $f \in \mathrm{End}(V)$ *ein Endomorphismus und* $\lambda \in K$ *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

   (a) λ *ist EW von* f*.*

   (b) $\det(f - \lambda \mathrm{id}_V) = 0$

2. *Seien* $A \in K^{(n,n)}$*,* $E = E_n$ *und* $\lambda \in K$ *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

   (a) λ *ist EW von* A*.*

   (b) $\det(A - \lambda E) = 0$

Beweis: Man kann o.E. annehmen: $V = K^n, f = \hat{A}$. Dann gilt:
$\ker(f - \lambda \mathrm{id}_V) \neq 0 \Longleftrightarrow$
$0 < \dim\ker(f - \lambda \mathrm{id}_V) =$ (Dimensionsformel)
$n - \dim \mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{id}_V) =$
$n - \mathrm{Rg}(A - \lambda E) \Longleftrightarrow$
$\mathrm{Rg}(A - \lambda E) < n \Longleftrightarrow$
$\det(A - \lambda E) = 0.$
$\det(f - \lambda \mathrm{id}_V) = 0.$

Definition 5.2.3.5 (Charakteristisches Polynom) *Sei* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Sei* $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{(n,n)}$*. Das Polynom*

$$\chi_A := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(a_{1\sigma(1)} - \delta_{1\sigma(1)}X) \cdot \ldots \cdot (a_{n\sigma(n)} - \delta_{n\sigma(n)}X)$$

   heißt **charakteristisches Polynom** *von* A*.*

2. *Es seien* V *ein* n*-dimensionaler* K*-Vektorraum,* $\mathcal{V}$ *eine Basis von* V *und* $f \in \mathrm{End}(V)$*. Das Polynom*

$$\chi_f := \chi_{M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f)}$$

   heißt **charakteristisches Polynom** *von* f*.*

Bemerkung 5.2.3.6 *Sei $n \in I\!N$.*

1. $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{(n,n)} \Longrightarrow \chi_A$ *ist ein Polynom vom Grad n.*

   Beweis: Der Summand mit $\sigma = (1)$ liefert beim Ausmultiplizieren einen Term X^n; alle anderen Summanden enthalten nur Terme von Grad $< n$.

2. $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{(n,n)} \Longrightarrow \forall\lambda \in K\ [\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)]$

   Beweis: Leibniz-Formel.

3. $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{(n,n)} \Longrightarrow [\chi_A = \det(A - XE)]$

   Beweis: Folgt in entsprechender Weise aus der Leibniz-Formel für Matrizen mit Koeffizienten im Ring $K[X]$.

4. $f \in \mathrm{End}(V), \dim V = n < \infty \Longrightarrow \chi_f = \det(f - X\mathrm{id}_V)$.

   Beweis: Nach Definition der Determinante eines Endomorphismus. Die genaue Begründung muß aber etwas anders geführt werden als bei der Bemerkung vorher, weil man zwar beim Rechnen mit Matrizen vom Koeffizientenkörper K zum Polynomring über K als Koeffizientenbereich übergehen kann, aber nicht den Skalarenkörper K des Vektorraums V durch den Polynomring $K[X]$ ersetzen kann. Man muß stattdessen V als Vektorraum über dem **Körper der rationalen Funktionen** *$K(X)$ ersetzen.*

   Insbesondere gilt:

5. $f \in \mathrm{End}(V), \dim V = n < \infty \Longrightarrow \chi_f$ *ist unabhängig von der Auswahl der Basis $\mathcal{V}$ definiert.*

Satz 5.2.3.7 *Sei $n \in I\!N$ und $\lambda \in K$.*

1. *Sei $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{(n,n)}$. Dann gilt:*

   λ EW von $A \Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$.

2. *Sei $f \in \mathrm{End}(V), \dim V = n < \infty$. Dann gilt:*

   λ EW von $f \Longleftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$.

Beweis: Folgt aus den obigen Bemerkungen und aus dem vorangegangenen Lemma.

Beispiel 5.2.3.8 1. $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi =$$

$$\cos^2\varphi - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2 + \sin^2\varphi =$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1.$$

Dieses Polynom hat nur im Fall $\cos^2\varphi - 1 =$ *reelle Lösungen, und zwar die Lösungen* 1 *bzw.* -1*; der Eigenraum ist jeweils* $\mathbb{R}^2$*.*

Das ist klar aus der geometrischen Situation heraus.

Für einen Beweis für den Eigenwert $\varphi = \pi, \lambda = -1$ *muß man das Gleichungssystem* $(A - \lambda E)x = 0$*. für diesen Fall lösen. Es ist*

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$*, also*

$A - \lambda E = 0$*;*

daraus folgt die Behauptung.

2. *Die komplexen Eigenwerte von* $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *sind* $\lambda_1 := \cos(\varphi) + \sqrt{(\cos(\varphi))^2 - 1}$ *und* $\lambda_2 := \cos(\varphi) - \sqrt{(\cos(\varphi))^2 - 1}$

   Für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ *ergibt sich die Matrix*

   $$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{bmatrix}$$

   und als Eigenwerte $\lambda_1 = 1/2 - 1/2\sqrt{-1}\sqrt{3}$*,* $\lambda_2 = 1/2 + 1/2\sqrt{-1}\sqrt{3}$*, der Eigenraum ist jeweils eindimensional.*

   Zur genauen Bestimmung des Eigenraums z.B. für λ_1 *hat man das Gleichungssystem* $(A - \lambda_1 E)x = 0$ *zu lösen, also (für* $\varphi = \frac{\pi}{3}$ *):*

   $$\begin{bmatrix} 1/2\sqrt{-1}\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{-1}\sqrt{3} \end{bmatrix} x = 0$$

   Durch Addition des i-fachen der 1. Zeile zur 2. Zeile wird dieses Gleichungssystem:

   $$\begin{bmatrix} 1/2\sqrt{-1}\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

   Durch Division der ersten Zeile durch $1/2\sqrt{-1}\sqrt{3}$ *erhält man (als Gauß-Jordan-Form) das Gleichungssystem*

   $$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

   Setzt man $x_2 = i$ *ein, berechnet man* $x_1 = 1$*; der Eigenraum zu* λ_1 *wird also aufgespannt durch den Vektor* $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$*.*

Bemerkung 5.2.3.9 *Sei* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.*

   Beweis: Seien $A, B \in K^{(n,n)}$ *und* $S \in GL(n.K)$ *mit* $B = SAS^{-1}$*. Für die Matrizen* $A - XE, B - XE$ *(Matrizen mit Koeffizienten in* $K[X]$*) gilt dann:*

$$S(A-XE)S^{-1} = SAS^{-1} - SXES^{-1} = SAS^{-1} - XSES^{-1} = B - XE,$$

daraus folgt:

$$\det(B - XE) = \det S \cdot \det(A - XE) \cdot \det S^{-1} = \det(A - XE)$$

2. *Aus der letzten Bemerkung folgt ebenfalls die Unabhängigkeit des charakteristischen Polynoms χ_f von der Auswahl der Basis.*

Lemma 5.2.3.10 *Sei $n \in I\!N$.*

1. *V ein n-dimensionaler K-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus.*

   f diagonalisierbar $\Longrightarrow$ χ_f zerfällt in Linearfaktoren $\lambda_i - X$; die Nullstellen λ_i sind EW von f.

2. *Sei $A \in K(n, n)$.*

   A diagonalisierbar $\Longrightarrow$ χ_A zerfällt in Linearfaktoren $\lambda_i - X$; die Nullstellen λ_i sind EW von A.

Beweis: Es genügt, die erste der beiden Aussagen zu beweisen.
Aus der Voraussetzung folgt, daß es n l.u. EV $v_1, \ldots, v_n$ gibt; bei Wahl dieser EV als Basis ist die f darstellende Matrix A eine Diagonalmatrix mit den zugehörigen (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ als Hauptdiagonalelementen.
Damit ist auch $A - XE$ eine Diagonalmatrix; die Diagonalelemente sind $\lambda_1 - X, \ldots, \lambda_n - X$.
Es folgt:
$\chi_f = \det(A - XE) = (\lambda_1 - X) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - X) =$
$(-1)^n (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n)$.
Die EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ müssen nicht pw. verschieden sein. Faßt man gleiche EW zusammen, erhält man:
$\chi_f = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{r_k} =$
$(-1)^n (X - \lambda_1)^{\mu(\chi_f, \lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{\mu(\chi_f, \lambda_k}$,
wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die pw. verschiedenen EW und $\mu(\chi_f, \lambda_1), \ldots, \mu(\chi_f, \lambda_1)$ ihre Vielfachheiten als Nullstellen von χ_f sind.
Lemma 5.2.3.11 *Sei $n \in I\!N, V$ ein n-dimensionaler K-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Das charakteristische Polynom zerfalle in Linearfaktoren:*
$\chi_f = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\mu(\chi_f, \lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{\mu(\chi_f, \lambda_k}$.
Dann gilt für $i = i, \ldots, k$:
$1 \leq \dim \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \leq \mu(\chi_f, \lambda_i)$.

Definition: $\mu(\chi_f, \lambda_i)$ wird in diesem Zusammenhang die **algebraische Vielfachheit** von λ_i genannt, $\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ die **geometrische Vielfachheit**.

Beweis: Sei $i = i, \ldots, k$, $\lambda := \lambda_i$.
λ EW von $f \Longrightarrow \mathrm{Eig}(f, \lambda) \neq 0 \Longrightarrow \dim \mathrm{Eig}(f, \lambda) > 0$.
Zu zeigen: $\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda) \leq \mu(\chi_f, \lambda)$.

Sei $\{v_1, \dots, v_s\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$.
Dann sind $v_1, \dots, v_s$ l.u.; nach dem Steinitzschen Austauschsatz gibt es daher eine Basis $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ von V
Bzgl. dieser Basis wird f dargestellt durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$
mit $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$
Daraus folgt nach 5.1.3.2, 9:
$\chi_f = \det(A - XE) =$
$\det \begin{pmatrix} A_1 - XE_s & C \\ 0 & A_2 - XE_{n-s} \end{pmatrix} =$
$(\lambda - X)^s \cdot \chi_{A_2}$.
Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Beispiel 5.2.3.12 *1.* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & -4 - X \end{pmatrix} = X^2 + 4X + 1$

Es gibt also zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_i = -2 \pm \sqrt{3}$.

Die zugehörigen Eigenvektoren v_i *sind l.u.; sie bilden also eine Basis; damit ist* A *diagonalisierbar.*

Es ist $v_1 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & -2 - X \end{pmatrix} = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$

Es gibt also nur einen EW $\lambda = -1$ *mit* $\mu(\chi_a; -1) = 2$.

Es ist $\mathrm{Eig}(A; -1) = L(A + E) = L(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix})$.

Wegen $\mathrm{rg}(A + E) = 1$ *gilt* $\dim \mathrm{Eig}(A; -1) = 1 < 2$. *Eine Basis von* $\mathrm{Eig}(A; -1)$ *ist gegeben z.B. durch den Eigenvektor* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Es kann also keine aus Eigenvektoren von A *bestehende Basis des* $\mathbb{R}^2$ *geben* $\Longrightarrow$ A *ist nicht diagonalisierbar.*

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Es ist $\chi_A(X) =$

$$\det\begin{pmatrix} 3-X & 4 & 3 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 2 & 3-X \end{pmatrix} =$$

$$-\det\begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ 1 & 2 & 3-X \\ 3-X & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$-\det\begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ 0 & 2-X & 2-X \\ 3-X & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$(2-X)\det\begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4-3X+X^2 & X \end{pmatrix} =$$

$$(2-X)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & X \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & X & 4-3X+X^2 \end{pmatrix} =$$

$$(2-X)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & X \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-4X+X^2 \end{pmatrix} =$$

$= (2-X)^3$.

Die Matrix A hat also den einzigen Eigenwert 2*, und es gilt:* $\mu(\chi_a, 2) = 3$.

Betrachte nun $\mathrm{Eig}(A; 2) = L(A-2E) = L(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix})$*! Ohne Rechnung sieht man:*

$\mathrm{rg}(A-2E) = 2$*, also* $\dim L(A-2E) = 1 < 3$*. Es gibt damit — bis auf Vielfache* $\neq 0$ *— nur einen einzigen Eigenvektor, nämlich* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$*; damit ist A nicht diagonalisierbar.*

Beispiel 5.2.3.13 (Federpendel) *Eine Masse m sei an einer Feder aufgehängt; in Ruhestellung habe sie die Position* $x = 0$.

Bei Abweichung von dieser Ruheposition um den Wert x wirkt auf die Masse die Kraft $-Dx$*; dabei ist D die sog. Federkonstante.*

Bei Bewegung der Masse wird die Geschwindigkeit durch die Ableitung $u = x'$ *von* $x(t)$ *nach der Zeit t beschrieben; die Beschleunigung durch die zweite Ableitung* $x'' = u'$.

Die Federkraft $-Dx$ *erzeugt nach Newton eine Beschleunigung* x''*, für die gilt:* $mx'' = -Dx$.

Ferner wirkt bei der Geschwindigkeit x' *ene Reibungskraft* $-kx'$.

Wenn keine weitere äußere Kraft wirkt, hat man daher die Gleichung $mx'' = -Dx - kx'$. *Setzt man, wie üblich,* $\frac{D}{m} = \omega^2$, $\frac{k}{m} = 2\mu$, *erhält man die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung*

$$x'' + 2\mu x' + \omega^2 x = 0$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen

$$x' = u$$

$$u' = -\omega^2 x - 2\mu u$$

,
also mit der Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x' \\ u' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}$$

Im letzten Beispiel hatten wir diese Matrix betrachtet mit den Werten $\omega = 1$ *und* $\mu = 2$ *bzw.* $\mu = 1$.
Im ersten Beispiel ($\mu = 2$*, also* $\mu > |\omega|$*) ist diese Matrix A über* $I\!R$ *diagonalisierbar — das gilt stets für* $\mu > \omega$.
Im zweiten Beispiel ($\mu = 1$*, also* $\mu = |\omega|$*) ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.*
Man kann zeigen (Übungsaufgabe!), daß im Fall $0 \leq \mu < |\omega|$ *die Matrix A über* $\mathbb{C}$ *diagonalisierbar ist.*
Die physikalische Bedeutung ist:

$0 \leq \mu < \omega$	*schwache Dämpfung*	*komplex diagonalisierbar*	*periodische Schwingung*
$\mu = \omega$	*aperiodischer Grenzfall*	*nicht diagonalisierbar*	
$\mu > \omega$	*starke Dämpfung*	*reell diagonalisierbar*	*langsames Abklingen*

Auf eine weitere Ausführung der Zusammenhänge wird hier verzichtet.
Bemerkung: *Im aperiodischen Grenzfall ist A trigonalisierbar, d.h.: ähnlich zu einer Dreiecksmatrix.*

Satz 5.2.3.14 *Sei* $n \in I\!N, V$ *ein* n*-dimensionaler* K*-VR und* $f \in \mathrm{End}(V)$ *ein Endomorphismus.*
Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. f *ist diagonalisierbar.*

2. *Das charakteristische Polynom* χ_f *zerfällt in Linearfaktoren*
   $\chi_f = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\mu(\chi_f, \lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{\mu(\chi_f, \lambda_k}$,
   und es gilt für $i = i, \ldots, k$:
   $\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) = \mu(\chi_f, \lambda_i)$.

3. *V ist die direkte Summe der Unterverktorräume* $\mathrm{Eig}(f,\lambda_1),\dots,\mathrm{Eig}(f,\lambda_k)$, *d.h.*

   $V = \mathrm{Eig}(f,\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f,\lambda_k)$. *d.h.:*

   (a) $V = \mathrm{Eig}(f,\lambda_1) + \dots + \mathrm{Eig}(f,\lambda_k)$.

   (b) *Sind* $w_1 \in \mathrm{Eig}(f,\lambda_1)\setminus\{0\},\dots,w_k \in \mathrm{Eig}(f,\lambda_k)\setminus\{0\}$, *so sind* $w_1,\dots,w_k$ *l.u.*

Beweis:

1. Sei f diagonalisierbar.

   Nach dem vorangegangenen Lemma zerfällt χ_f in Linearfaktoren, d.h. $\chi_f = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\mu(\chi_f,\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_k)^{\mu(\chi_f,\lambda_k}$, und die Nullstellen $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ sind EW von f.

   Zu zeigen: $\forall i = i,\dots,k$ [$s_1 = \dim \mathrm{Eig}(f,\lambda_i) = \mu(\chi_f,\lambda_i) = r_i$].

   Es gibt eine Basis $\{v_1,\dots,v_n\}$ von V aus EV von f, und zwar kann man o.E. annehmen:

   $v_1,\dots,v_{s_1}$ sind EV zum EW λ_1,

   $v_{s_1+1},\dots,v_{s_1+s_2}$ sind EV zum EW λ_2,

   $\vdots$

   $v_{s_1+\ldots+s_{k-1}+1},\dots,v_n$ sind EV zum EW λ_k.

   Also gilt $s_1+\ldots+s_k = n = r_1+\ldots+r_k$; zusammen mit $s_i \le r_i$ für alle i folgt die Behauptung.

2. Sei nun vorausgesetzt: Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt in Linearfaktoren

   $\chi_f = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\mu(\chi_f,\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_k)^{\mu(\chi_f,\lambda_k}$,

   und es gilt für $i = i,\dots,k$:

   $\dim \mathrm{Eig}(f,\lambda_i) = \mu_i := \mu(\chi_f,\lambda_i)$.

   Dann gibt Basen der Eigenräume $\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$ der Länge $\mu_i, i = 1,\dots,k$; es seien:

   — $v_1,\dots,v_{\mu_1}$ l.u. EV zum EW λ_1,
   $v_{\mu_1+1},\dots,v_{\mu_1+\mu_2}$ l.u. EV zum EW λ_2,
   $\vdots$
   $v_{\mu_1+\ldots+\mu_{k-1}+1},\dots,v_{\mu_1+\ldots+\mu_k} = v_n$ l.u. EV zum EW λ_k.

   Dann sind $v_1,\dots,v_n$ l.u.

   Denn: Seien $\alpha_1,\dots\alpha_n \in K$ mit $\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n = 0$, und sei angenommen: nicht alle α_i sind 0. Sei etwa $\alpha_1 \neq 0$. Dann ist $w_1 := \alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_{\mu_1} v_{\mu_1}$ EV zum EW λ_1. Wegen $w_1+\alpha_{\mu_1+1}v_{\mu_1+1}+\ldots+\alpha_n v_n = 0$ gibt es dann weitere, analog aufgebaute Vektoren $w_i = \alpha_{\mu_1+\ldots+\mu_{i-1}+1}v_{\mu_1+\ldots+\mu_{i-1}+1}+$

$\ldots + \alpha_{\mu_1+\ldots\mu_i} v_{\mu_1+\ldots+\mu_i}$, $i = 2, \ldots, n$ mit $w_1 + \ldots + w_n = 0$. Das kann aber nicht sein, da die w_i entweder 0 oder EV zum EW λ_i sind und da EV zu paarweise verschiedenen Eigenwerten nach Lemma 5.2.2.5 l.u. sind.

Also bilden $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Daraus folgt unmittelbar die Darstellung

$V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_k)$.

3. Sei nun vorausgesetzt: $V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_k)$. Dann hat man wiederum die Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V aus EV von f, sodaß gilt:

   $v_1, \ldots, v_{s_1}$ sind EV zum EW λ_1,

   $v_{s_1+1}, \ldots, v_{s_1+s_2}$ sind EV zum EW λ_2,

   $\vdots$

   $v_{s_{k-1}+1}, \ldots, v_n$ sind EV zum EW λ_k.

   Bezüglich dieser Basis wird f dargestellt durch die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen λ_1 (s_1−mal), ..., λ_k (s_k−mal).

Algorithmus 5.2.3.15 *Bestimmung aller Eigenwerte eines Endomorphismus bzw. einer Matrix und Diagonalisierung.*
Es reicht, den Fall einer Matrix $A \in K^{(n.n)}$ zu betrachten.

1. *Berechne $\chi_A = \det(A - XE)$.*

   I.a. wird man dazu $A - XE$ durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen. Bei Zeilenvertauschungen erhält man einen Faktor -1; ggflls sind weitere Faktoren zu berücksichtigen. Man erhält also eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen ist.

   Bei kleineren Matrizen ist auch die direkte Anwendung der Leibniz-Formel sinnvoll. Häufig verwendet man zur Berechnung die sog. Laplace-Entwicklung, ein rekursives Verfahren zur Leibniz-Formel.

2. *Zerlege χ_A in Linearfaktoren:*

   $\chi_A = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{r_k}$

   Bemerkung: Dieser Teil des Algorithmus ist nicht direkt Teil der Linearen Algebra, sondern — je nach Aufgabenstellung – der Algebra bzw. der Analysis. Denn für $n > 4$ gibt es keine Lösungsformel zur Bestimmung der Nullstellen. Die explizite Bestimmung der Nullstellen als sog. Radikal ist nur in Ausnahmefällen möglich. Im Fall $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ können die Nullstellen näherungsweise durch numerische Verfahren bestimmt werden.

3. *Bestimme für jeden Eigenwert λ_1 den Eigenraum $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ durch Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_i E)x = 0$.*

4. *Stimmen algebraische und geometrische Vielfachheiten aller EW überein, kann man direkt die zu A ähnliche Diagonalmatrix hinschreiben, d.h., die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen λ_1 (s_1-mal), ..., λ_k (s_k-mal).*

   Im anderen Fall ist die Matrix (bzw. der Endomorphismus) nicht diagonalisierbar.

Bemerkung 5.2.3.16 *Ist f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, stimmen aber algebraische und geometrische Vielfachheiten der Eigenwerte nicht überein, so ist f nach dem Satz nicht diagonalisierbar. Jedoch kann f durch eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix dargestellt werden (Trigonalisierung). Insbesondere ist jede Matrix $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar.*

Inhaltsverzeichnis

1 Der Gauß-Algorithmus **1**
1.1 Reelle lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Vektoren . . . 1
1.1.1 Lineare Gleichungssysteme 1
1.1.2 Matrix-Schreibweise 2
1.1.3 Spezielle Matrizen und die entsprechenden linearen Gleichungssysteme. 3
1.2 Der Algorithmus 4
1.2.1 Spezialfälle 4
1.2.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme 4
1.2.3 Homogene lineare Gleichungssysteme 4
1.2.4 Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems 5
1.2.5 Die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems 5

2 Grundbegriffe der Mengenlehre **6**
2.1 Die mathematische Sprache 6
2.1.1 Mathematische Aussagen 6
2.1.2 Verknüpfung mathematischer Aussagen 6
2.1.3 Prädikate und Quantoren 8
2.2 Mengen 8
2.2.1 Der naive Mengenbegriff 8
2.2.2 Die Antinomie von Bertrand Russell 9
2.2.3 Zur axiomatischen Einführung des Mengenbegriffs . . 9
2.2.4 Das kartesische Produkt von Mengen 12
2.3 Abbildungen 13
2.3.1 Abbildungen 13
2.3.2 Injektiv, surjektiv, bijektiv 15
2.3.3 Die inverse Abbildung 16
2.3.4 Komposition von Abbildungen 16
2.3.5 Bild und Urbild 17

3 Algebraische Grundstrukturen **18**
3.1 Gruppen 18
3.1.1 Verknüpfungen 18

3.1.2 Gruppen 19
3.1.3 Homomorphismen 20
3.1.4 Beispiel einer nicht-abelschen Verknüpfung: Das Matrizenprodukt 21
3.2 Ringe und Körper 23
3.2.1 Ringe 23
3.2.2 Körper 24

4 Vektorräume 25
4.1 Matrizen und Vektoren über beliebigen Körpern 25
4.1.1 Addition von Matrizen 25
4.1.2 Die transponierte Matrix 26
4.1.3 Das Produkt von Matrizen mit Skalaren 26
4.1.4 Das Matrizenprodukt 27
4.2 Vektorräume und lineare Gleichungssysteme 28
4.2.1 Vektorräume 28
4.2.2 Lineare Abbildungen 29
4.2.3 Untervektorräume, Kern und Bild 30
4.2.4 Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit 30
4.2.5 Basis, Dimension 32
4.2.6 Isomorphismen, Lösungsraum homogener linearer Gleichungssysteme mit Stufenmatrix, Dimensionsformel für lineare Abbildungen. 36
4.2.7 Der Rang einer Matrix 39
4.2.8 Elementarmatrizen 41
4.2.9 Die inverse Matrix 43
4.2.10 Affine Unterräume und inhomogene lineare Gleichungssysteme 45
4.2.11 Die einer linearen Abbildung zugeordnete Matrix . . . 48
4.2.12 Basiswechsel (Koordinatentransformationen) 50
4.2.13 Ähnliche und äquivalente Matrizen 53

5 Determinanten und Eigenwerttheorie 55
5.1 Determinanten 55
5.1.1 Permutationen 55
5.1.2 Das Signum einer Permutation 56
5.1.3 Determinanten 58
5.2 Eigenwerte 69
5.2.1 Aussagen über Polynome 69
5.2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren 72
5.2.3 Das charakteristische Polynom, Diagonalisierung 74