Mathematisches Institut
der Universität München

Ludwig-Maximilians-Universität München

LMU

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D–80333 München

# Übungen zur Vorlesung
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Kraus)
# Wintersemester 2005/06, Klausur 2

9.2.2006

---

Dieser Leistungsnachweis entspricht auch den Anforderungen
nach § 55 Abs. 1 Nr. 2 Buchstabe — LPO I
nach § — Abs. — Nr. — Buchstabe — LPO I

UNIVERSITÄT MÜNCHEN

## ZEUGNIS

*Der/Die Studierende der*

*Herr/Frau* *aus*

*geboren am* *in* *hat im* Winter-*Halbjahr* 2005/06

*meine* ~~*Seminar*~~*-Übungen* Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

*mit* *besucht.*

*Er/Sie hat*

*schriftliche Arbeiten geliefert, die mit ihm/ihr besprochen wurden.*

MÜNCHEN, *den*

Nichtzutreffendes ist zu durchstreichen

UNI-BEDARF MÜNCHEN Amtliches Formular 26

1. **Rang einer Matrix**

   Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ reelle $3 \times 3$ - Matrizen. Für welche $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt:
   $\mathrm{rg}A = \ rgB = r \Longrightarrow \mathrm{rg}(BA) = r$?

   Begründungen!

2. **Koordinatentransformationen**

Sei $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ mit dem Drehwinkel $90°$ um die Achse

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man gebe die Matrixdarstellung von $d$ bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ an. Man bestimme dazu zuerst die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $d$ bzgl. einer geeigneten Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

*Es gibt zwei solche Drehungen (nach links und nach rechts bei einer gewählten Orientierung). Es ist eine der beiden Drehungen zu betrachten, Auswahl beliebig.*

3. **Permutationen**

Man berechne:

(a)

$$\sum_{\sigma \in S_5} \varepsilon(\sigma)$$

(b)

$$\sum_{\sigma \in S_5} |\varepsilon(\sigma)|$$

4. **Determinanten**

(a) Man berechne über $\mathbb{Z}_3$:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Man berechne über $\mathbb{R}$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

5. **Diverse Fragen**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? *(Pro richtiger Antwort 0,5 Punkte, pro falscher Antwort -0,5 Punkte, pro nicht gegebener Antwort 0 Punkte. Negative Gesamtpunktzahlen werden durch Gesamtpunktzahl 0 ersetzt.)*

| Frage | w | f |
|---|---|---|
| Zwei affine Unterräume $x_1 + U_1$ und $x_2 + U_2$ eines Vektorraums $V$ sind genau dann gleich, wenn gilt: $U_1 = U_2$ und $x_1 - x_2 \in U_1$ | | |
| Das Signum einer Transposition ist $+1$ | | |
| $\det : K^{n \times n} \to K$ ist für alle $n \geq 1$ linear | | |
| $\det A \in \mathbb{Z}$, falls alle Koeffizienten von $A$ ganze Zahlen sind | | |
| $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ | | |
| $\det(AB) = \det(BA)$ | | |
| $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ | | |
| $\det(A + B) = \det A + \det B$ | | |
| $\det(A + B) = \det(B + A)$ | | |
| $\det(-A) = -\det A$ | | |

Pro Aufgabe 5 Punkte.

*Jede Klausurteilnehmer hat für sich alleine zu arbeiten. Wer abschreibt oder abschreiben läßt oder unerlaubte Hilfsmittel benutzt, wird sofort disqualifiziert.*
*Es ist ein Lichtbildausweis offen bereitzuhalten und bei der Abgabe vorzuzeigen*

**Lösungen:**

1. **Rang einer Matrix** Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ reelle $3 \times 3$ - Matrizen. Für welche $r \in \{0,1,2,3\}$ gilt: $\text{rg}A = \; rgB = r \Longrightarrow \text{rg}(BA) = r$?

   (a) $r = 0$: Beide Matrizen enthalten nur Nullen, also auch ihr Produkt. Die Aussage ist daher in diesem Fall richtig.

   (b) $r = 3$: Aussage richtig.

   Erste Begründung: Ist der Rang bei $A$ und $B$ maximal, sind die Abbildungen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ Isomorphismen, also auch $\widehat{BA} = \hat{B} \circ \hat{A}$ und damit auch der Rang von $BA$ maximal.

   Zweite Begründung: Ist der Rang bei $A$ und $B$ maximal, so sind die Determinanten $\neq 0$, also nach dem Determinantenmultiplikationssatz auch $\det(BA) = \det B \det A \neq 0$.

   (c) $r = 1$: Aussage falsch.

   Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (d) $r = 2$: Aussage falsch.

   Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. **Koordinatentransformationen** Vgl. Staatsexamensaufgaben Herbst 1998, Thema 3, Aufgabe 4

   Sei $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ mit dem Drehwinkel 90° um die Achse

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Man gebe die Matrixdarstellung von $d$ bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ an. Man bestimme dazu zuerst die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $d$ bzgl. einer geeigneten Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

   *Es gibt zwei solche Drehungen (nach links und nach rechts bei einer gewählten Orientierung). Es ist eine der beiden Drehungen zu betrachten, Auswahl beliebig.*

   Die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ entstehe aus $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ durch eine Drehung um 45° um die Achse $\mathbb{R} \cdot e_3$; dabei geht

   $e_1$ über in $b_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   $e_2$ in $b_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   $e_3$ bleibt fest (d.h. $e_3 = b_3$).

   Die Drehmatrix dieser Koordinatentransformation ist also

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix des Basiswechsels ist

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Drehung um den Winkel -45°)}$$

Bzgl. der Matrix $B$ wird $d$ dargestellt durch die durch die folgende Matrix oder (je nach Auswahl der Drehrichtung) durch ihre inverse (= transponierte) Matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(d).$$

Bzgl. der Matrix $E$ wird daher die Drehung $d$ dargestellt Matrix:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(d) = \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(d) \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = BDB^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man kann die Aufgabe auch wie folgt lösen und damit den formalen Kalkül der Basistransformationen vermeiden:

Die Basisdarstellung der kanonischen Basisvektoren bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ ist

$e_1 = \sqrt{2}/2\, b_1 - \sqrt{2}/2\, b_2,$

$e_2 = \sqrt{2}/2\, b_1 + \sqrt{2}/2\, b_2,$

$e_3 = b_3.$

Die Bilder von $e_1, e_2$ und $e_3$ unter der Abbildung $d$ berechnen sich also bzgl. der Basis $\mathcal{B}$:

$$d(e_1) = D \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}/2\, b_1 - \sqrt{2}/2\, b_3 =$$

$1/2\, e_1 + 1/2\, e_2 - \sqrt{2}/2\, e_3.$

$$d(e_2) = D \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}/2\, b_1 + \sqrt{2}/2\, b_3 =$$

$1/2\, e_1 + 1/2\, e_2 \sqrt{2}/2\, e_3.$

$$d(e_3) = D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -b_2 =$$

$\sqrt{2}/2\, e_1 - \sqrt{2}/2\, e_2.$

Daraus ergibt sich ebenfalls die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(d) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}.$

## 3. Permutationen

(a) $\sum_{\sigma\in S_5}\varepsilon(\sigma)$ = Anzahl der geraden Permutationen in $S_5$ - Anzahl der ungeraden Permutationen in $S_5 = 0$, da es in jeder Permutationsgruppe gleich viel gerade und ungerade Permutationen gibt.

(b) $\sum_{\sigma\in S_5}|\varepsilon(\sigma)| = \sum_{\sigma\in S_5} 1$ = Anzahl der Permutationen in $S_5 = 5! = 120$.

## 4. Determinanten

(a) Über $\mathbb{Z}_3$ ist

$$\det\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\2&2&0\end{pmatrix} = \qquad \text{(mit 1. } Z_3 := Z_3 + Z_2\text{. 2. } Z_2 := Z_1 + Z_2)$$

$$\det\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \qquad (Z_2 \text{ und } Z_3 \text{ vertauschen})$$

$$-\det\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = -2\cdot 1\cdot 1 = -2 \qquad \text{(da Dreiecksmatrix)}$$

(b) Über $\mathbb{R}$ ist

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\8&7&6&5\\9&10&11&12\\16&15&14&13\end{pmatrix} = \qquad (Z_2 := Z_1 + Z_2, Z_4 := Z_3 + Z_4)$$

$$= \det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\9&9&9&9\\9&10&11&12\\25&25&25&25\end{pmatrix} =$$

$$= 9\cdot 25\cdot \det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\9&10&11&12\\1&1&1&1\end{pmatrix} =$$

$= 9\cdot 25\cdot 0 = 0.$

## 5. Diverse Fragen

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? *(Pro richtiger Antwort 0,5 Punkte, pro falscher Antwort -0,5 Punkte, pro nicht gegebener Antwort 0 Punkte. Negative Gesamtpunktzahlen werden durch Gesamtpunktzahl 0 ersetzt.)*

| Frage | w | f |
|---|---|---|
| Zwei affine Unterräume $x_1 + U_1$ und $x_2 + U_2$ eines Vektorraums $V$ sind genau dann gleich, wenn gilt: $U_1 = U_2$ und $x_1 - x_2 \in U_1$ | X | |
| Das Signum einer Transposition ist $+1$ | | X |
| $\det : K^{n\times n} \to K$ ist für alle $n \geq 1$ linear | | X |
| $\det A \in \mathbb{Z}$, falls alle Koeffizienten von $A$ ganze Zahlen sind | X | |
| $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ | X | |
| $\det(AB) = \det(BA)$ | X | |
| $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ | X | |
| $\det(A+B) = \det A + \det B$ | | X |
| $\det(A+B) = \det(B+A)$ | X | |
| $\det(-A) = -\det A$ | | X |