

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D-80333 München

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Kraus)
Wintersemester 2005/06, Blatt 12

42. Koordinatentransformationen

München liegt auf ca. $48^\circ =: \varphi$ nördlicher Breite und ca. $12^\circ =: \psi$ östlicher Länge.

Sei $\mathcal{M} := \{m_1, m_2, m_3\}$ die lokale Basis für München des $\mathbb{R}^3$ wie folgt:

- m_1 weise nach Norden.
- m_2 weise nach Westen.
- m_3 weise senkrecht nach oben.

Man denke sich den Erdmittelpunkt als den Ursprung des $\mathbb{R}^3$, also die Basisvektoren m_1, m_2, m_3 im Erdmittelpunkt beginnend.

Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ folgende Standardbasis des $\mathbb{R}^3$:

- e_1 weise vom Erdmittelpunkt auf den Schnittpunkt des Äquators mit dem Längen-Halbkreis von München (12°).
- e_2 weise in der Äquatorebene auf den Längenhalbkreis 102° (also sei w_2 orthogonal zu w_1).
- e_3 weise vom Äquator zum Nordpol.

(a) Man stelle die Basisvektoren m_1, m_2, m_3 als Spalten bzgl. der Basis $\mathcal{E}$ dar.

(b) Man zeige: Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}}$ ist $T := \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix}$.

(5 Punkte)

43. Koordinatentransformationen

Angaben wie in der vorherigen Aufgabe.

Die Erddrehung wird dargestellt, indem man statt der „absoluten“ Basis $\mathcal{E}$ aus der vorherigen Aufgabe eine von der Zeit t abhängige Basis $\mathcal{E}(t) = \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ einführt, die aus $\mathcal{E}$ durch Anwendung der Drehung mit der Drehmatrix

0

Haus- und Postanschrift:
Theresienstraße 39
D-80333 München

Telefon: 0 89 / 2180 - 4402
Telefax: 0 89 / 280 52 48
Telex: 5 29 815 UNIVM D
email: kraus@rz.mathematik.uni-muenchen.de

Straßenbahn
Linie 27
Haltestelle Pinakothek

$D_E(t) := \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hervorgeht; dabei sei $\omega := 2\pi/86164$ (da die Erde in 86164 Sekunden einmal um ihre Achse rotiert). Es gilt $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}$. Entsprechend sei die lokale Matrix $\mathcal{M}(t)$ definiert.

- (a) Man weise nach: Für alle t gilt: $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{E}(t)} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{E}}$.
- (b) Man bestimme die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{E}(t)}^{\mathcal{E}(0)}$.
- (c) Man bestimme die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{M}(t)}^{\mathcal{M}(0)}$. (Hinweis: Man benutze Satz 4.2.12.4 der Vorlesung.)
- (d) Man stelle den Vektor m_1 bzgl. der Basis $\mathcal{M}(t)$ dar.
Das ist die beobachtete Drehung des Foucaultschen Pendels gegenüber dem Orts-Koordinatensystem, vgl. z.B.

<http://www.goethe.lb.bw.schule.de/physik/foucault/foucault.htm>

(5 Punkte)

44. Permutationen

- (a) Man stelle folgende Permutationen als Produkt von Transpositionen dar:
 - i. $(2\ 3)$
 - ii. $(1\ 2\ 3)$
 - iii. $(1\ 5\ 4\ 7)$
 - iv. $(1\ 2\ 5\ 3\ 8\ 4\ 11)$
- (b) Man zeige: Ein Zyklus der Länge k ($k \geq 2$) kann als Produkt von $k - 1$ Transpositionen geschrieben werden.

(4 Punkte)

45. Permutationen

Man zeige: In jeder Permutationsgruppe ist die Zahl der geraden und der ungeraden Permutationen gleich.

(4 Punkte)

Abgabe: Montag, 31.1.2006, 14.15 h, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts (bei der Bibliothek)