

Mathematisches Institut
der Universität München

Ludwig_____
Maximilians_____
Universität_____
München_____

LMU

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D-80333 München

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Kraus)
Wintersemester 2005/06, Blatt 7

23. **Untervektorräume.** Welche der folgenden Mengen ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründung!

(a) $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = 0, z = 0, x - y = 0 \right\}$

(b) $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y - z = 1 \right\}$

(c) $W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, 2x + z = 1, x = 0 \right\}$

(d) $X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

(4 Punkte)

24. **Lineare Abbildungen.** Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründung!

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$

$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$

$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2x + y$

$i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2x + 2y + 1$

(4 Punkte)

0

Haus- und Postanschrift:
Theresienstraße 39
D-80333 München

Telefon: 0 89 / 2180 - 4402
Telefax: 0 89 / 280 52 48
Telex: 5 29 815 UNIVM D
email: kraus@rz.mathematik.uni-muenchen.de

Straßenbahn
Linie 27
Haltestelle Pinakothek

25. Lineare Unabhängigkeit

- (a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K , und seien $u, v, w \in V$ linear unabhängig.

Man zeige:

Je drei der Vektoren $u, v, w, u + v + w$ sind linear unabhängig.

- (b) Gilt die entsprechende Aussage, wenn man vier linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ hat und vier Vektoren aus der Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$ herausgreift?

(4 Punkte)

26. Basis des Lösungsraums eines homogenen linearen Gleichungssystems, Parametrisierungsabbildung.

$L \subset \mathbb{R}^4$ sei die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Man bestimme die Lösungsmenge L mit dem Gauß-Algorithmus.
Hinweis: Die Lösung hat die Form $x(t_1, t_2)$; sie hängt von zwei frei wählbaren Parametern $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ab.
- (b) Man bestimme speziellen Lösungen $a := x(1, 0)$ und $b := x(0, 1)$ (also die Lösungen zu den Parameterwerten $t_1 = 1, t_2 = 0$ bzw. $t_1 = 0, t_2 = 1$).
- (c) Man zeige: a und b sind linear unabhängig.
- (d) Man zeige: Die Abbildung

$$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow L$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto x(t_1, t_2)$$

ist linear.

- (e) Man zeige: a und b bilden eine Basis des Lösungsraums L .

(9 Punkte)

Abgabe: Montag, 5.12.2005, 14.15 h, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts (bei der Bibliothek)