Mathematisches Institut
der Universität München

Ludwig-Maximilians-Universität München

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D–80333 München

**Übungen zur Vorlesung**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Kraus)**
**Wintersemester 2005/06, Blatt 6**

20. **Matrizenprodukte und Rechnen mit Vektoren und Matrizen**

Es sei $K$ ein Körper. Für Indexwerte $i, j \in \mathbb{N}$ ist das Kroneckersymbol $\delta_{ij}$ definiert durch

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $i = 1, 2, 3$ seien Spaltenvektoren $e_i \in K^3$ definiert als

$$e_i := \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{pmatrix}$$

(a) Man berechne für alle Indexwerte $i, j \in \{1, 2, 3\}$ die Produkte ${}^te_ie_j$ und $e_i\,{}^te_j$.

(b) Man berechne die Summen

$$\sum_{i=1}^{3} {}^te_ie_i, \quad \sum_{i=1}^{3} e_i\,{}^te_i, \quad \sum_{i,j=1}^{3} {}^te_ie_j \text{ und } \sum_{i,j=1}^{3} e_i\,{}^te_j$$

(8 Punkte)

21. **Darstellung von Vektoren als Linearkombination von Basisvektoren**

Bezeichnungen wie in der vorherigen Aufgabe.

(a) Man zeige: Jeder Spaltenvektor $x \in K^3$ läßt sich auf genau eine Weise als Summe $x = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$ mit Körperelementen $\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. darstellen.

(b) Wie erhält man entsprechende Darstellungen für Zeilenvektoren $x \in K_3$ und für $3 \times 3$-Matrizen $A \in K_3^3 = K^{3\times3}$?

(5 Punkte)

0

22. **Lineare Gleichungssysteme über endlichen Körpern**

(a) Man stelle man die Tabellen für die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_5$ auf.

(b) Durch Rechnen in $\mathbb{Z}_5$ bestimme man alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_5$ (es wird also nach Lösungen $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$ gesucht):

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 2 \end{array} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \end{array}$$

Bitte den Gauß-Algorithmus verwenden!

(5 Punkte)

*Abgabe: Montag, 28.11.2005, 14.15 h, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts (bei der Bibliothek)*