

Mathematisches Institut
der Universität München

_____ **LMU**
Ludwig_____
Maximilians_____
Universität_____
München_____

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D-80333 München

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Kraus)
Wintersemester 2005/06, Blatt 5

16. Permutationen

Es seien Permutationen σ, τ der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ durch folgende Wertetabelle definiert:

n	1	2	3	4
$\sigma(n)$	4	3	2	1
$\tau(n)$	2	3	4	1

Man gebe in Zykelschreibweise an: $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma, \sigma\sigma := \sigma^2, \tau\tau := \tau^2$ und entsprechend die Potenzen $\sigma^3, \sigma^4, \tau^3, \tau^4$.

(5 Punkte)

17. Matrizenprodukt

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei ${}^tA \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die an der Hauptdiagonalen gespiegelte Matrix, d.h., ist $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$, so ist ${}^tA = (\bar{a}_{ji})_{j=1, \dots, n, i=1, \dots, m}$ mit $\bar{a}_{ji} := a_{ij}$ für alle i, j .

Man zeige: Für $A \in \mathbb{R}^{l \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

(5 Punkte)

18. Ringe

Sei R ein Ring mit den neutralen Elementen 0 und 1. Man zeige für Elemente $a, b \in R$:

- (a) $0a = a0 = 0$
- (b) $-(ab) = (-a)b = a(-b)$
- (c) $(-a)(-b) = ab$
- (d) $-a = (-1)a$

0

Haus- und Postanschrift:
Theresienstraße 39
D-80333 München

Telefon: 0 89 / 2180 - 4402
Telefax: 0 89 / 280 52 48
Telex: 5 29 815 UNIVM D
email: kraus@rz.mathematik.uni-muenchen.de

Straßenbahn
Linie 27
Haltestelle Pinakothek

(e) $0 = 1 \implies R = \{0\}$

(5 Punkte)

19. Endliche Körper

Für kleine natürliche Zahlen a, b kann an sich einfach von folgender Tatsache überzeugen: Sind a und b teilerfremd, so gibt es ganze Zahlen r, s mit $ra + sb = 1$. (Dies ist allgemein, also nicht nur für kleine Zahlen, richtig und kann mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bewiesen werden). Man zeige:

- (a) Ist p eine Primzahl a eine natürliche Zahl mit $0 < a < p$, so gibt es $x \in \{1, \dots, p-1\}$ mit $a \odot x = 1$.

Dabei sei $\odot : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ die Multiplikation in $\mathbb{Z}_p$, d.h. $a \odot x$ ist die eindeutig bestimmte Zahl in $\{0, \dots, p-1\}$, die sich von ax um ein Vielfaches von p unterscheidet (also der Rest bei Division von ax durch p).

- (b) Für eine natürliche Zahl $m \geq 2$ gilt: Genau dann ist $\mathbb{Z}_m$ ein Körper, wenn m prim ist.

(5 Punkte)

Abgabe: Montag, 21.11.2005, 14.15 h, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts (bei der Bibliothek)