Mathematisches Institut
der Universität München

Ludwig-Maximilians-Universität München

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D–80333 München

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Kraus)
Wintersemester 2005/06, Blatt 4

12. **Durch eine Matrix definierte Abbildung:**

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die Zeilenstufenform von A haben m von Null verschiedene Zeilen.

(a) Man beweise:
Die Abbildung $\hat{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist surjektiv.

(b) Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung defür an, daß $\hat{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bijektiv ist.

(5 Punkte)

13. **Injektiv und surjektiv**

Sei M eine Menge und $x_0 \in M$. Sei $f : M \to M$ eine injektive Abbildung.

(a) Man zeige: Durch

$$\begin{array}{rcl} g : M & \longrightarrow & M \\ y & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{falls } \exists x \in M[f(x) = y] \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

wird eine Abbildung definiert.

(b) Die so definierte Abbildung $g : M \to M$ ist surjektiv.

(3 Punkte)

14. **Endliche und unendliche Mengen**

Eine Menge M werde hier **E-Menge** genannt, wenn jede injektive Abbildung $f : M \to M$ bijektiv ist.

(a) Man zeige: $\emptyset$ ist eine E-Menge.

(b) Man gebe ein weiteres Beispiel einer E-Menge an.

0

Haus– und Postanschrift:
Theresienstraße 39
D–80333 München

Telefon: 0 89 / 2180 - 4402
Telefax: 0 89 / 280 52 48
Telex: 5 29 815 UNIVM D
email: kraus@rz.mathematik.uni-muenchen.de

Straßenbahn
Linie 27
Haltestelle Pinakothek

(c) Man zeige: Nicht jede Menge ist eine E-Menge.

(d) Man zeige: Eine Menge M ist bereits dann eine E-Menge, wenn jede surjektive Abbildung $g : M \to M$ bijektiv ist.

Hinweis: Man verwende Aufgabe 13 und führe einen Beweis durch Widerspruch, d.h., man zeige, daß die Annahme, eine injektive Abbildung $f : M \to M$ sei nicht surjektiv, zu einem Widerspruch führt.

(7 Punkte)

15. **Rechenregeln für Bild und Urbild**

Man beweise fünf der folgenden Regeln:

a)	$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
b)	$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$	$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
c)	$f^{-1}(f(A)) \supset A$	$f(f^{-1}(A)) \subset A$
d)	$f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A)$	

(5 Punkte)

Abgabe: Montag, 14.11.2005, 14.15 h, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts (bei der Bibliothek)