

Professor Dr. Günther Kraus
Mathematisches Institut, Theresienstraße 39, D-80333 München

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Kraus)
Wintersemester 2005/06, Blatt 3

8. Logische Schaltfunktionen:

Für Aussagen A, B wird eine neue Verknüpfung $|$ (gesprochen „NAND“) definiert durch die Wahrheitstafel

A	B	$A B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

- (a) Wie hängt $A|B$ mit $A \wedge B$ zusammen?
- (b) Was bedeutet $A|A$?
- (c) Man zeige für Aussagen A, B :

$$(A \vee B) \iff ((A|A)|(B|B))$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 7 d).

- (d) Man gebe in entsprechender Weise einen Ausdruck in $|$ an, der logisch äquivalent zu $A \implies B$ ist.

(5 Punkte)

9. Regeln der Mengenalgebra

Es seien L, M, N Teilmengen einer festen Menge U . Es wird folgende Bezeichnung verwendet: $CM := U \setminus M$, analog für N usw.

a) Idempotenz	$M \cap M = M$	$M \cup M = M$
b) Kommutativität	$M \cap N = N \cap M$	$M \cup N = N \cup M$
c) Assoziativität	$L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N$	$L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N$
d) Absorption	$M \cap (M \cup N) = M$	$M \cup (M \cap N) = M$
e) Distributivität	$L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$	$L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$
f) Komplementarität	$M \cap CM = \emptyset$	$M \cup CM = U$
g) Regeln von de Morgan	$C(M \cap N) = CM \cup CN$	$C(M \cup N) = CM \cap CN$
h) Konsistenz	$M \cap N = M \iff M \subset N$	$M \cup N = N \iff M \subset N$

0

Haus- und Postanschrift:
Theresienstraße 39
D-80333 München

Telefon: 0 89 / 2180 - 4402
Telefax: 0 89 / 280 52 48
Telex: 5 29 815 UNIVM D
email: kraus@rz.mathematik.uni-muenchen.de

Straßenbahn
Linie 27
Haltestelle Pinakothek

Diese Regeln beruhen auf entsprechenden Regeln für das logische Schließen. Z.B. bedeutet die erste Regel von de Morgan:

$$\mathcal{C}(M \cap N) = \mathcal{C}M \cup \mathcal{C}N$$

für ein Element $x \in U$

$$(\neg(x \in M \wedge x \in N)) \iff (\neg(x \in M) \vee \neg(x \in N))$$

(vgl. Übungsaufgabe 7 e))

Man gebe in entsprechender Weise für fünf weitere der obengenannten Regeln der Mengenalgebra die entsprechenden logischen Regeln an.

(5 Punkte)

10. Potenzmenge:

Man beweise oder widerlege (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen für Mengen M, N :

- (a) $M \subset N \iff \mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N)$
- (b) $\mathcal{P}(M) \setminus \mathcal{P}(N) \subset \mathcal{P}(M \setminus N)$
- (c) $\mathcal{P}(M \cap N) = \mathcal{P}(M) \cap \mathcal{P}(N)$

(5 Punkte)

11. Kartesisches Produkt:

Seien M, N Mengen. Zentraler Punkt bei der Einführung des kartesischen Produkts $M \times N$ ist die Bildung von Paaren (m, n) mit $m \in M, n \in N$. Hier wiederum ist die wesentliche Eigenschaft, daß zwei Paare (m, n) und (m', n') genau dann gleich sind, wenn $m = m'$ und $n = n'$ gilt.

- (a) Man beweise: Die in der Vorlesung gegebene Definition beschreibt den Paarbegriff korrekt, d.h., für $m, m' \in M$ und $n, n' \in N$ gilt:

$$\{\{m\}, \{m, n\}\} = \{\{m'\}, \{m', n'\}\} \implies (m = m' \wedge n = n')$$

Es wird daran erinnert, daß für den Fall $m = n$ vereinbart ist: $\{m, m\} = \{m\}$.

- (b) Man könnte daran denken, ein Paar (m, n) nicht in der Form $\{\{m\}, \{m, n\}\}$ einzuführen, sondern als $\{\{m\}, \{\{n\}\}\}$. Ergibt eine solche Definition eine korrekte Umsetzung des Paarbegriffs, d.h., gilt stets:

$$\{\{m\}, \{\{n\}\}\} = \{\{m'\}, \{\{n'\}\}\} \implies (m = m' \wedge n = n')?$$

Als Beispiel betrachte man $M = N = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

(5 Punkte)

Abgabe: Montag, 7.11.2005, 14.15 h, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts (bei der Bibliothek)